

Preparatoria Num. 15



ALGEBRA I

2a. PARTE

1er Semestre
1991



ALGH

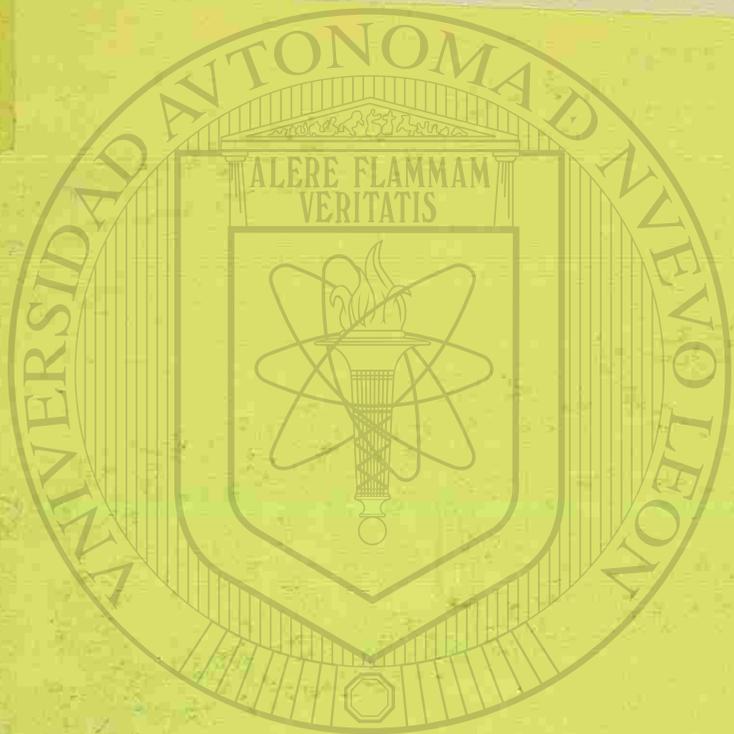
QA159
.G3
1990

ASCA

PRIMER SEMESTRE



1020115302



ÁLGEBRA I

(2da. PARTE)

ING. MIGUEL ÁNGEL GARCÍA RAMÍREZ,
ING. JOSÉ LUIS GUERRA TORRES,
ING. FÉLIX REVERA CARRILLO.

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

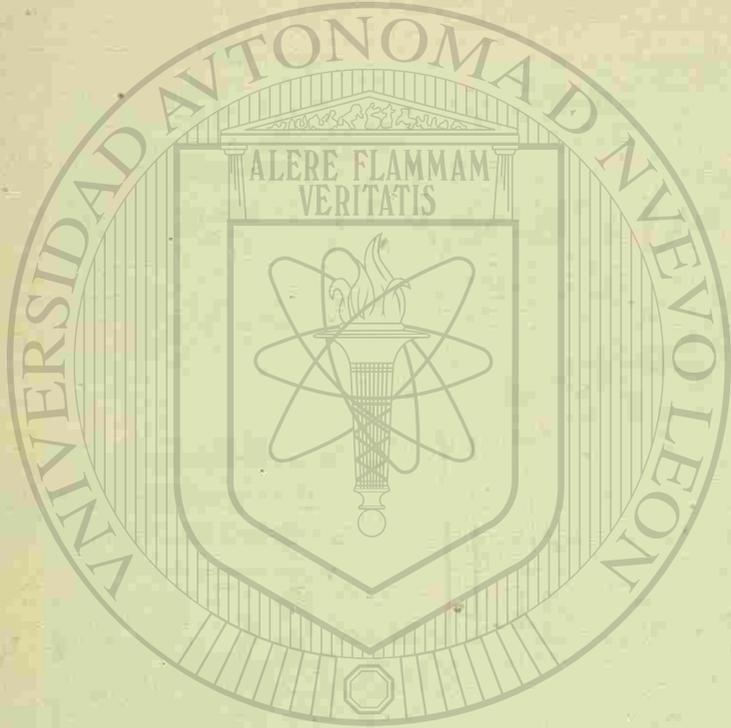
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

AGOSTO 1990

Handwritten signature or mark



1030215302



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

ÁLGEBRA I

(2da. PARTE)

Lección 2. SUMAS ALGEBRAICAS.

ING. MIGUEL ANGEL GARZA TAMEZ.
ING. JOSÉ LUIS GUERRA TORRES.
ING. PABLO RIVERA CARRILLO.



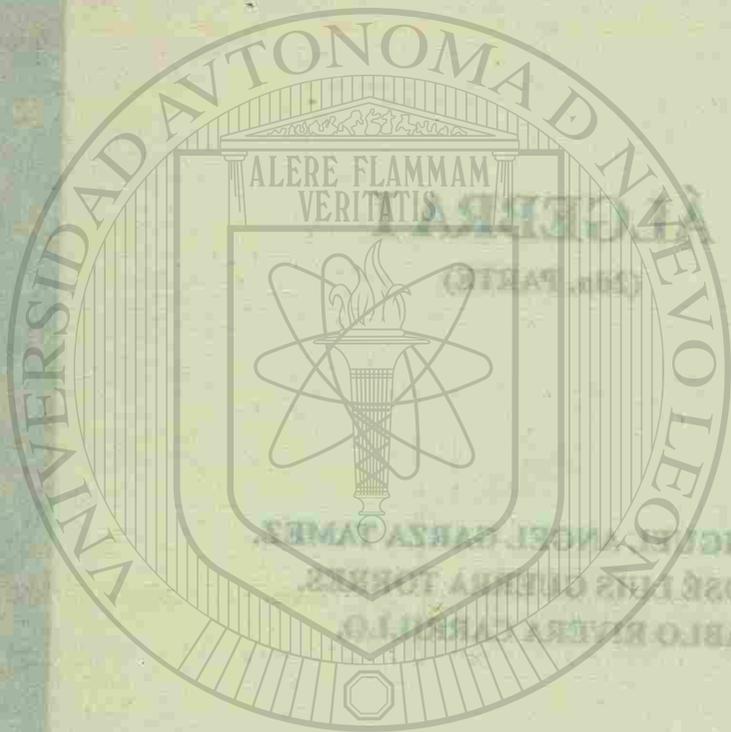
AGOSTO 1990

998744

QA159

53

1990



FONDO UNIVERSITARIO

163611

AGOSTO 1990

ÍNDICE.

CAPÍTULO	PÁG.
I OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.	
Lección 1.	
1-1 Definiciones.....	1
Respuestas a la autoevaluación.....	10
Lección 2. SUMAS ALGEBRAICAS.	
1-2 Adición algebraica.....	11
Respuestas a la autoevaluación.....	20
Lección 3. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.	
1-3 Multiplicación algebraica.....	21
1-4 División algebraica.....	28
Respuestas a las autoevaluaciones.....	36
Lección 4. PRODUCTOS ESPECIALES.	
1-5 Productos especiales.....	39
1-6 El producto de dos binomios con términos correspondientes semejantes.....	39
1-7 El cuadrado de un polinomio.....	48

1-8 El cubo de la suma o diferencia de un binomio.	49
Respuestas a las autoevaluaciones.	52

II FACTORIZACIÓN.

Lección 1.

2-1 Descomposición en factores.	55
2-2 Factores primos.	57
2-3 Máximo común divisor.	59
2-4 Cálculo del m.c.d. por factores primos.	61
2-5 La propiedad distributiva como herramienta para la factorización de polinomios.	64
2-6 Factorización de una diferencia de dos cuadrados.	68
2-7 Factorización de trinomios cuadrados perfectos.	72
2-8 Factorización de una expresión que es el cubo de un binomio.	75
2-9 Factorización de la suma o diferencia de dos cubos.	77
Respuestas a las autoevaluaciones.	80

Lección 2. FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

2-10 Trinomio general de segundo grado.	85
2-11 Descomposición por agrupación.	101
2-12 Mínimo común múltiplo.	104
2-13 M.C.M. por descomposición de factores primos.	106

2-14 M.C.M. de monomios.	109
2-15 M.C.M. de polinomios.	110
Respuestas a las autoevaluaciones.	113

III OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Lección 1. OPERACIONES CON LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

3-1 Propiedades de las fracciones algebraicas.	117
3-2 Reducción a términos mínimos.	118
3-3 Multiplicación y división de fracciones.	126
Respuestas a las autoevaluaciones de la lección 1.	133

Lección 2. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

3-4 Reducción de una fracción a un mínimo denominador.	137
3-5 Suma de fracciones algebraicas.	144
3-6 Resta de fracciones algebraicas.	155
3-7 Suma y resta combinadas de fracciones algebraicas.	161
3-8 Fracciones complejas.	164
Respuestas a las autoevaluaciones de la lección 2.	170



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIDAD VII

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

INTRODUCCIÓN

En esta unidad veremos las partes principales de las expresiones algebraicas y estarás en condiciones de ordenar cualquiera de ellas.

Al término del estudio de esta unidad, el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS:

1. Definir el Algebra como rama de las matemáticas y establecer su diferencia con la Aritmética.
2. Identificar a partir de ejemplos dados, los conceptos de cantidad positiva, cero, cantidad negativa y valor absoluto.
3. Definir los términos o conceptos siguientes:

Expresión algebraica	exponente.
Término	Monomio.
Signo	Binomio.

Coeficiente

Trinomio.

Parte literal

Polinomio.

Grado.

4. Ordenar correctamente un polinomio según las potencias de una literal.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1. Estudia la lección 1 del capítulo I de tu texto. Para los objetivos del 1 al 4 estudia la sección 4-1 del mismo capítulo. Es importante que tengas presente la definición del álgebra o un significado más amplio de esta materia, puesto que es la base para estudios superiores.

Copia en tu cuaderno todas las definiciones que encuentres y con base a ello, trata de distinguir un concepto de otro. Para que puedas comprender mejor estos objetivos, resuelve la autoevaluación.

2. Como ritmo de trabajo te sugerimos el siguiente:

1er. día - objetivo 1.

2do. día - objetivo 2.

3er. día - objetivos 3 y 4.

4to. día - Laboratorio.

3. El requisito para tener derecho a presentar esta unidad será entregar resuelto el Laboratorio de la unidad a tu maestro.

AUTOEVALUACIÓN.

1. Grupo de números y letras combinadas entre sí mediante una o más de las operaciones fundamentales y que puede tener uno o más términos.

0) Coeficiente.

1) Grado.

2) Término

3) Expresión algebraica.

4) Exponente.

2. Un refrigerador de las 8 A. M. marca una temperatura de -10° a las 3 P. M. ha ascendido 20° , expresa la temperatura a las 3 P. M.

0) -30°

1) $+10^{\circ}$

2) -10°

3) 32°

4) 20°

- Una embarcación se mueve hacia el norte 28 km, si se regresa hacia el sur 13 km, ¿a qué distancia se encuentra el punto de partida?

0) 15

1) 28

2) 41

3) 13

4) 10

4. Encuentra el valor absoluto de -7.

0) $1/7$

1) -7

2) 7

3) 0

4) 1

5. Es el exponente de una letra, con respecto a la letra.

0) Factor

1) Grado

2) Coeficiente

3) Base

4) Término.

6. Encuentra el grado del siguiente término con respecto a la letra "y": $9x^3y^5z^2a$

- 0) Primero 1) Segundo 2) Tercero
3) Quinto 4) Noveno.

7. Expresión algebraica que consta de dos o más términos.

- 0) Expresión 1) Polinomio 2) Literal
3) Coeficiente 4) Exponente.

8. Respecto al número de términos, ¿cómo se clasifica la expresión: $3ab - 2ac - 3de$?

- 0) Coeficiente 1) Factor 2) Tercer grado
3) Trinomio 4) Binomio.

9. Ordenar el siguiente polinomio, con respecto a las potencias ascendentes de la letra "a".

$$3a^5y^2 - 2y - 5a^3y^2 + 2ay^3 + 1 + 2a^2y$$

- 0) $1 - 2y - 2ay^3 + 2a^2y - 5a^3y^2 + 3a^5y^2$
1) $1 + 2ay^3 - 5a^3y^2 + 3a^5y^2 + 2a^2y + 2y$
2) $2ay^3 + 5a^3y^2 - 3a^5y^2 - 2a^2y + 2y + 1$
3) $3a^3y^2 - 5a^3y^2 + 2a^2y + 2ay^3 - 2y + 1$
4) $2a^2y - 5a^3y^2 + 2ay^3 + 3a^5y^2 + 1 - 2y$

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 1.

1-1 DEFINICIONES.

"El Algebra es la rama de las matemáticas, cuyo objeto es simplificar y generalizar las cuestiones relativas a los números". El Algebra proporciona los medios para expresar de manera concisa las relaciones entre números entre sí desconocidos, además de proporcionar los medios para manipular tales números. Estos dos aspectos de la utilidad del Algebra se harán más evidentes a medida que el estudiante avance en sus cursos profesionales.

El concepto de "cantidad" en Algebra, es mucho más amplio que en Aritmética.

En Aritmética, las cantidades se representan por números y éstos expresan valores determinados. Así, 20 expresa un sólo valor: veinte. Para expresar un valor mayor o menor que éste, habrá que escribir un número distinto de 20.

En Algebra, para lograr la generalización, las cantidades se representan por medio de letras, las cuales pueden representar todos los valores. Así, "a" representa el valor que nosotros le asignemos, y por lo tanto puede representar 20 ó más de 20 ó menos de 20, a nuestra elección, aunque conviene advertir que cuando en un problema asignamos a una letra un valor determinado, esa letra no puede representar en el mismo problema, otro valor distinto del que le hemos asignado.

En la vida diaria es frecuente el uso de símbolos para significar anotaciones y facilitar las operaciones, como el signo \$, que indica pesos y el signo °, que indica grados, pero los más usados son simples

6. Encuentra el grado del siguiente término con respecto a la letra "y": $9x^3y^5z^2a$

- 0) Primero 1) Segundo 2) Tercero
3) Quinto 4) Noveno.

7. Expresión algebraica que consta de dos o más términos.

- 0) Expresión 1) Polinomio 2) Literal
3) Coeficiente 4) Exponente.

8. Respecto al número de términos, ¿cómo se clasifica la expresión: $3ab - 2ac - 3de$?

- 0) Coeficiente 1) Factor 2) Tercer grado
3) Trinomio 4) Binomio.

9. Ordenar el siguiente polinomio, con respecto a las potencias ascendentes de la letra "a".

$$3a^5y^2 - 2y - 5a^3y^2 + 2ay^3 + 1 + 2a^2y$$

- 0) $1 - 2y - 2ay^3 + 2a^2y - 5a^3y^2 + 3a^5y^2$
1) $1 + 2ay^3 - 5a^3y^2 + 3a^5y^2 + 2a^2y + 2y$
2) $2ay^3 + 5a^3y^2 - 3a^5y^2 - 2a^2y + 2y + 1$
3) $3a^3y^2 - 5a^3y^2 + 2a^2y + 2ay^3 - 2y + 1$
4) $2a^2y - 5a^3y^2 + 2ay^3 + 3a^5y^2 + 1 - 2y$

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 1.

1-1 DEFINICIONES.

"El Algebra es la rama de las matemáticas, cuyo objeto es simplificar y generalizar las cuestiones relativas a los números". El Algebra proporciona los medios para expresar de manera concisa las relaciones entre números entre sí desconocidos, además de proporcionar los medios para manipular tales números. Estos dos aspectos de la utilidad del Algebra se harán más evidentes a medida que el estudiante avance en sus cursos profesionales.

El concepto de "cantidad" en Algebra, es mucho más amplio que en Aritmética.

En Aritmética, las cantidades se representan por números y éstos expresan valores determinados. Así, 20 expresa un sólo valor: veinte. Para expresar un valor mayor o menor que éste, habrá que escribir un número distinto de 20.

En Algebra, para lograr la generalización, las cantidades se representan por medio de letras, las cuales pueden representar todos los valores. Así, "a" representa el valor que nosotros le asignemos, y por lo tanto puede representar 20 ó más de 20 ó menos de 20, a nuestra elección, aunque conviene advertir que cuando en un problema asignamos a una letra un valor determinado, esa letra no puede representar en el mismo problema, otro valor distinto del que le hemos asignado.

En la vida diaria es frecuente el uso de símbolos para significar anotaciones y facilitar las operaciones, como el signo \$, que indica pesos y el signo °, que indica grados, pero los más usados son simples

abreviaturas en las que la primera letra de una palabra reemplaza a toda la palabra. La longitud de un rectángulo puede ser representada por "L", el radio y el diámetro de una circunferencia por "r" y "d", la presión de un gas, por "p", etc.

Estas letras pueden representar un número cualquiera. Entero o fraccionario. Así, si el largo de un rectángulo mide 30 centímetros, la "L" representa 30 cm., pero si el lado midiera medio metro, la "L" representa $1/2$ m.

Las letras que representan algún número se llaman "literales". Comúnmente, las últimas letras del alfabeto: x, y, z, se utilizan para representar cantidades desconocidas y los números para representar las cantidades conocidas.

En Algebra, la suma, la resta, la multiplicación y la división se indican como en Aritmética con los signos + (más) - (menos), x (multiplicado por) y ÷ (dividido entre).

En el caso de la multiplicación, en lugar del signo x, suele usarse un punto entre los factores, o también, colocando los factores entre paréntesis. Así, $c \cdot d$ y $(c)(d)$ equivalen a $c \times d$. Los signos de multiplicación no se usan cuando se desea expresar el producto de varios factores literales o numéricos. Por ejemplo, abc es igual a $a \times b \times c$; $3xy$ es igual a $3 \cdot x \cdot y$.

El signo de división, también puede ser expresado por medio de una raya de quebrado entre los dos números que se quieren dividir, observando únicamente que el número de arriba es el dividendo y el que está abajo es el divisor. Entonces $a \div b$ se indica también como a/b .

Existen otros símbolos, los paréntesis en sus diferentes formas: paréntesis circular (), paréntesis rectangular [], y paréntesis de llaves { }.

El paréntesis es una agrupación de términos e indica que la operación colocada entre ellos, debe efectuarse primero. Así, $3(6 + 2)$, indica que el resultado de la suma de $6 + 2$ debe multiplicarse por 3.

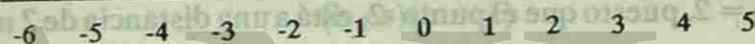
"Punto de referencia y conceptos de cantidad positiva y negativa". - Al salir de la escuela, un alumno puede dirigirse hacia la derecha o hacia la izquierda. La escuela es el punto de partida o de referencia.

Una cantidad, puede estar al norte o al sur del ecuador. El ecuador es la línea de referencia. También, puede estar al este o al oeste de un meridiano determinado. El meridiano es la línea de referencia.

La temperatura de un cuerpo, puede ser superior o inferior a 0°C .

En el globo terrestre, tanto las alturas como las depresiones tienen como referencia, el nivel del mar.

Para representar gráficamente problemas de esta naturaleza es indispensable conocer el punto de partida o referencia y el sentido del fenómeno. Cada uno de los ejemplos anteriores, se representa mediante una gráfica formada por una línea recta horizontal, en la que se marca "0", el origen o punto de referencia y las cantidades, se toman a uno y otro lado de dicho punto. (Ver figura).



Los números que se encuentran a la derecha del origen, son números positivos y se les asigna el signo +.

Los números que se encuentran a la izquierda del origen son números negativos y se les asigna el signo -.

El signo +, también tiene dos significados, adición y sentido. Así, +5 indica que a una cierta cantidad hay que añadirles 5 unidades, o bien, que el cinco está a la derecha del origen en el eje orientado.

El signo -, también tiene dos significados, sustracción y sentido. Así, -8 indica que a cierta cantidad se le han restado 8 unidades, o que el 8, está a la izquierda del cero en el eje orientado.

"Concepto de cero". - Cero es la ausencia de cantidad. Toda cantidad positiva es mayor que cero y cero es mayor que cualquier cantidad negativa.

Entre dos cantidades cualquiera, es mayor la cantidad que se encuentra más a la derecha en la recta orientada; así, +5 es mayor que +3, +2 es mayor que -4, -2 es mayor que -6, etc.

"El valor absoluto".- Los números algebraicos están constituidos por positivos, el cero y los negativos. (R)

El valor absoluto de un número algebraico es el valor de dicho número sin tomar en cuenta su signo. Así el valor absoluto de -10 es 10.

Las cantidades de 5 y -5 tienen el mismo valor absoluto; -6 y -12 tienen diferente valor absoluto. Los puntos que corresponden a -5 y 5 en la recta numérica, están a la misma distancia del origen pero en direcciones opuestas. Si nos interesara la distancia del punto 0 sin importarnos la dirección, entonces, usamos la idea de valor absoluto.

El valor absoluto de un número, que representa su distancia al 0, se indica escribiendo el número entre dos líneas verticales:

$|-2|$ se lee "el valor absoluto de -2".

$|-2| = 2$, puesto que el punto -2, está a una distancia de 2 unidades de 0.

Es claro, que el valor absoluto de un número cualquiera y el de su opuesto, son iguales, puesto que el número y su opuesto, están a la misma distancia de 0.

Por ejemplo:

$|3| = |-3| = 3$ y es obvio que $|0| = 0$,

De lo anterior se observa fácilmente la diferencia entre cantidades aritméticas y algebraicas. Las primeras son las que expresan solamente el valor absoluto de las cantidades por medio de los números, pero no nos indican el sentido o valor relativo de estas cantidades.

"Expresiones algebraicas".- Un grupo de números y letras combinadas entre sí mediante una o más operaciones fundamentales recibe el nombre de expresión algebraica.

Las expresiones $5a$, $2a + 1$, $3a^2 - 2c$, $6x^2 + 2y + 4$, son ejemplos de expresiones algebraicas.

"Término".- Un número o una letra o varios números y letras combinadas entre sí, mediante las operaciones de multiplicación y de división, o de ambas, recibe el nombre de término.

Puesto que un término no implica ni adición ni sustracción, todo grupo de letras, que en una expresión algebraica esté separado de otros grupos, mediante los signos más o menos, es un término.

Por ejemplo en la expresión: $3a^2 - 2ab + 4b$; $5y^3$; $2a - 4b^4$; son términos.

También la suma de dos o más números encerrada en un paréntesis, se considera como un solo número. Así, en la expresión:

$$a^2 - \frac{(b - c)(b + c)}{b^2 + c^2}$$

en donde, $b - c$; $b + c$; $b^2 + c^2$; se consideran como tres cantidades individuales. Además como

$$\frac{(b - c)(b + c)}{b^2 + c^2}$$

comprende únicamente la multiplicación y división, representada, por tanto, a un sólo término de la expresión algebraica.

Los elementos de que consta un término, son cinco: el signo, el coeficiente, la parte literal, el exponente y el grado.

"El signo".- Los términos positivos, son los que van precedidos del signo (+); los términos negativos, son los que van precedidos del signo menos (-). El signo (+), comúnmente se elimina, delante de los términos positivos.

"Coeficiente".- Es el número o letra que indica cuántos sumandos iguales se toman.

En el término $5x$, el 5 indica que se han tomado 5 sumandos iguales a "x"; $5x = x + x + x + x + x$. El 5, es el coeficiente. En el término $3a^2b$, el 3 indica que se han tomado 3 sumandos iguales a, a^2b .

"Parte literal".- La parte literal de un término, son las letras que tenga el término. Así, en el término $4ab$, la parte literal son las letras ab . En el término $2x^2y/3ab^2$, la parte literal es x^2y/ab^2 .

"Exponente".- El exponente de un término es el número que se coloca en la parte superior derecha de una o más letras del término, para indicar el número de veces que dicha letra se ha tomado como factor.

El área de un cuadrado de lado L es, $A = L \times L$, y se escribe L^2 ; el volumen de un cubo de lado "a" es, $V = a \times a \times a$ y se escribe $V = a^3$. En las expresiones anteriores, el 2 y el 3 son los exponentes.

En el término a^4 , el 4 es el exponente, que indica que se ha tomado cuatro factores iguales a, "a", así, $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$.

"Grado".- El grado de un término, con respecto a una letra, es el exponente de dicha letra.

El grado de un término, con respecto a todas las letras que lo forman, es la suma de los exponentes de todas las letras.

En el término "a", el exponente es 1; "a" es un término de primer grado; en el término a^2 , el exponente es 2, a^2 es un término de segundo grado, a^3 es un término de tercer grado.

El término ab^2 es de primer grado con respecto a a y de segundo grado con respecto a b. Si se consideran las dos literales, el término ab^2 , es de tercer grado con respecto a ab.

El grado de una expresión algebraica puede ser absoluto o con relación a una letra.

El grado absoluto de un término de mayor grado, por ejemplo, en la expresión $2a^4 + 3a^3 - a^2 - 5a + 2$, el primer término es de cuarto grado y a la vez la expresión anterior tiene un grado absoluto de 4.

El grado de un polinomio con relación a una letra, es el de mayor exponente de dicha letra, en la expresión. Así, en la expresión, $x^4 + b^3x - bx$, es de séptimo grado, con relación a la letra "x" y de tercer grado con relación a la "b".

"Ordenación de una expresión".- Antes de efectuar ciertas operaciones, como por ejemplo, en la división algebraica, se necesita ordenarlo, es decir, escribir sus términos de manera que los exponentes,

de una misma literal, vayan aumentando o disminuyendo.

En el primer caso, resulta que la expresión está ordenada según las potencias ascendentes de una letra y en el segundo caso, está ordenado, según las potencias descendentes de dicha letras.

Así en la expresión, $ax^2 + bx^4 + 1 - cx^3 + dx^6 - x^5$, ordenado según las potencias ascendentes de x resulta:

$$1 + ax^2 - cx^3 + bx^4 - x^5 + dx^6$$

y según las potencias descendentes de la misma letra, queda:

$$dx^6 - x^5 + bx^4 - cx^3 + ax^2 + 1.$$

El término independiente de una expresión, con relación a una letra, es el término que no tiene dicha letra.

Así, en la expresión, $2x^2 + 3x + 4$, el término independiente con relación a la x es, 4, y en la expresión $a^2 + 5ab + 2b^2$ el término independiente, con relación a la b es, a^2 .

"Clasificación de las expresiones algebraicas".- Las expresiones algebraicas, se clasifican de acuerdo con el número de términos incluidos en ellos, a saber: monomios, binomios, trinomios y polinomios. La expresión algebraica, que tiene un sólo término, se llama **monomio** si consta de dos o más términos se llama, **polinomio**.

Si un polinomio consta de dos términos, es **binomio** y si consta de tres términos, **trinomio**.

Así, en la expresión, $2a + 4ab - 5b^2/3c$, es un ejemplo de un trinomio, y en la expresión, $a + b$, es un ejemplo de un binomio, pues tiene dos términos.

"Términos semejantes".- Términos semejantes son aquellos que sólo difieren por sus coeficientes numéricos, o sea, son los que tienen las mismas literales con los mismos exponentes, sin tomar en cuenta los coeficientes.

Por ejemplo, $5ab^2 - 7ab^2$; $14ab^2$: son términos semejantes.

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

Expresar los siguientes problemas, como cantidades positivas o negativas.

1.- Juan tenía \$40 y recibió \$280. Encuentra su situación económica.

2.- A las 7 a.m. el termómetro indica $+8^{\circ}\text{C}$. A las 7 p.m. la temperatura ha descendido, 11°C . Expresa la temperatura a las 7 p.m.

3.- Expresa que un poste está enterrado 2 m. en el suelo y sobresale 8 m.

4.- Expresa que una montaña tiene una altura de 3,780 m. sobre el nivel del mar.

5.- Dos corredores parten de un punto en dirección contraria. El que corre hacia el norte del punto, va a 6 m/seg., y el otro va 8 m/seg. Expresa sus distancias del punto, después de 9 seg.

6.- Expresa que en Egipto, se encontró un papiro que se escribió en 1850 antes de J.C., y que indica que desde entonces ya se cultivaba la ciencia del álgebra.

7.- Expresa qué número, se encuentra 7 unidades a la derecha del cero y otro 3 unidades a la izquierda.

8.- Un autobús recorre 32 km a la izquierda de su punto de partida y luego retrocede 17 km. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

9.- Expresa que el punto de ebullición del alcohol etílico es de 78.4°C y que su punto de fusión es de 112°C bajo cero.

Encuentra el grado absoluto de los siguientes términos.

10.- $5x^3y^4$

11.- $4abcx^2$

Encuentra el grado del siguiente término, con respecto a la literal indicada: $10m^2n^3b^4c^5$

12.- Respecto a, n

13.- Respecto a, c

Encuentra el grado absoluto de los siguientes polinomios.

14.- $a^5 - 6a^4b^3 - 4a^2b + a^2b^4 - 3b^6$

15.- $y^5 - by^4 + b^2y^3 - b^3y^2 + b^4y^2$

Encuentra el grado del siguiente polinomio, respecto a la literal indicada: $x^{10} - x^8y^2 + 3x^4y^6 - x^6y^4 + x^2y^8$

16.- Respecto a, x

17.- Respecto a, y

18.- Ordenar el siguiente polinomio con respecto a las potencias descendentes de, x;

$$4a^3x^2 - 5ax^6 + 9a^2x^7 - 4a^4x^3 + 5x + 7$$

19.- Ordenar el polinomio anterior con respecto a las potencias ascendentes de, a.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

1) + \$ 320

2) -3

3) -2 m, + 8 m.

4) + 3,780 m.

5) + 54 m; -72 m.

6) -1,850.

7) +7, -3.

8) -15 km.

9) + 78.4°C; -112°C.

10) Séptimo grado.

11) Quinto grado.

12) Tercer grado.

13) Quinto grado.

14) Séptimo grado.

15) Sexto grado.

16) Décimo grado.

17) Octavo grado.

18) $9a^2x^7 - 5ax^6 - 4a^4x^3 + 4a^3x^2 + 5x + 7$

19) $7 + 5x - 5ax^6 + 9a^2x^7 + 4a^3x^2 - 4a^4x^3$

UNIDAD VIII

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

INTRODUCCIÓN.

En esta unidad veremos las operaciones con expresiones algebraicas y estarás en condiciones de sumar y restar correctamente expresiones algebraicas y a usar los símbolos de agrupación.

Al término del estudio de esta unidad, el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS:

1. Definir correctamente el concepto de suma y adición algebraica.
2. Sumar algebraicamente monomios y polinomios.
3. Eliminar correctamente los símbolos de agrupación. ®

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

1) + \$ 320

2) -3

3) -2 m, + 8 m.

4) + 3,780 m.

5) + 54 m; -72 m.

6) -1,850.

7) +7, -3.

8) -15 km.

9) + 78.4°C; -112°C.

10) Séptimo grado.

11) Quinto grado.

12) Tercer grado.

13) Quinto grado.

14) Séptimo grado.

15) Sexto grado.

16) Décimo grado.

17) Octavo grado.

18) $9a^2x^7 - 5ax^6 - 4a^4x^3 + 4a^3x^2 + 5x + 7$

19) $7 + 5x - 5ax^6 + 9a^2x^7 + 4a^3x^2 - 4a^4x^3$

UNIDAD VIII

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

INTRODUCCIÓN.

En esta unidad veremos las operaciones con expresiones algebraicas y estarás en condiciones de sumar y restar correctamente expresiones algebraicas y a usar los símbolos de agrupación.

Al término del estudio de esta unidad, el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS:

1. Definir correctamente el concepto de suma y adición algebraica.
2. Sumar algebraicamente monomios y polinomios.
3. Eliminar correctamente los símbolos de agrupación. ®

PROCEDIMIENTO SUGERIDO:

1. Para los objetivos 1, 2 y 3 estudia la lección 2 del capítulo I y resuelve la autoevaluación. En esta lección se exponen las reglas para la suma de expresiones algebraicas, justificadas con las propiedades para la adición de los números reales, por lo que te recomendamos, si no las recuerdas, las estudies de nuevo (capítulo 11). Practica estos objetivos resolviendo la autoevaluación, cuidando de no confundirte a la hora de juntar términos semejantes, en la simplificación de la expresión algebraica.

2. El requisito para tener derecho a presentar esta unidad será entregar resuelto el laboratorio de la unidad a tu maestro.

AUTOEVALUACIÓN.

1. Para efectuar una suma se necesita que todos los sumandos sean:

- 0) Exponentes 1) Signos. 2) Factores.
3) Diferente especie. 4) De la misma especie.

2. Reducir los términos semejantes: $3a^3 - 2a^2 - 1 + 2a - 3a^2 - a^3 - 3a$

- 0) $3a^3 - 3a^2 - 2a + 1$ 1) $2a^3 - 5a^2 - a - 1$
2) $3a^3 + 2a^2 + 2a + 1$ 3) $2a^3 - 2a^2 - 2a + 1$
4) $a^3 - a^2 - 3a - 1$

Elimina los símbolos de agrupación y simplifica

3. $[3a - (a - b - c) + (2b + c)]$

- 0) $a + b - c$ 1) $2a + 3b + 2c$ 2) $a - 2c$
3) $2c - a$ 4) $2a - 3b$

4. $[2x - (1 - 2x) - (-2 + x)]$

- 0) $-3x$ 1) $1 - x$ 2) -1
3) $x + 1$ 4) $3 - 3x$

5. $(2b - 3b^2 - 10 + a) + (2a^2 - 3b - 2b^2 - a) + (1 + 3b - a^2 + a)$

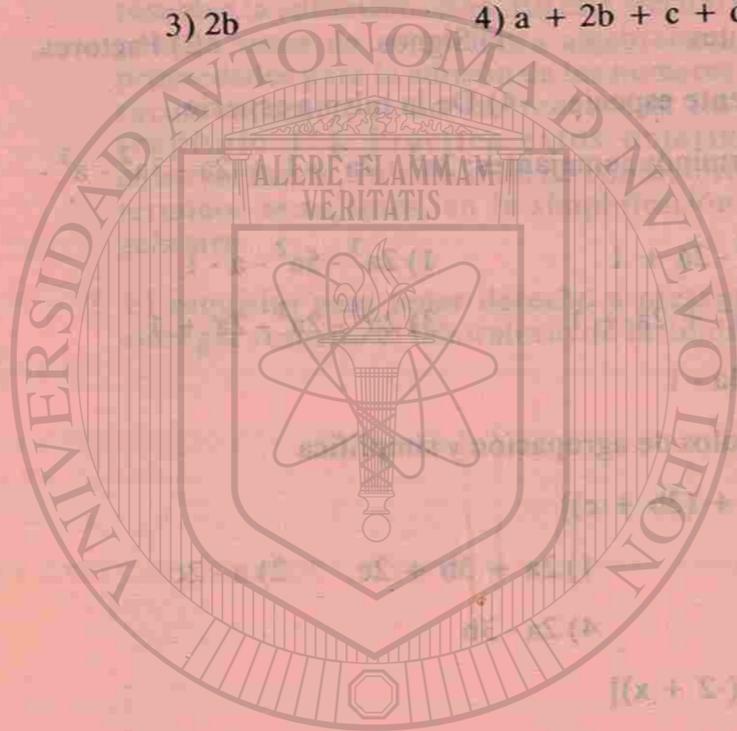
- 0) $a^2 - 8b^2 - a - 5b + 3$ 1) $a^2 - 3$
2) $a^2 - 5b^2 + a + 8b - 9$ 3) $3 - a^2 + b$
4) $2a^2 + b - a + 5$

6. $(2a - b + 2c - d) - (c + 3a - 2d + b)$

0) $-a - 2b + c + d$ 1) $c - d$

2) $2a - b + 2c - d$

3) $2b$ 4) $a + 2b + c + d$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECA

SUMAS ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 2.

1-2 ADICIÓN ALGEBRAICA.

"DEFINICIÓN"

La adición o suma, es la operación que tiene por objeto, reunir varias cantidades de la misma especie en una sola. El signo empleado para esta operación es, +. Cada una de las cantidades que entran en una adición se llaman **sumandos** y al resultado de la adición se llama **suma**.

En Algebra, los términos suma y diferencia, se usan en el mismo sentido que en Aritmética, si se aplican a números positivos. Sin embargo, su aplicación a números negativos, hace necesario precisar el procedimiento de adición.

En Aritmética, la suma siempre significa aumento, pero en Algebra, la suma es un concepto muy general, pues puede significar aumento o disminución ya que hay sumas algebraicas que equivalen a una resta aritmética.

"Reglas para la adición algebraica".

En la suma de números algebraicos, se presentan dos casos:

Primer caso, que los sumandos tengan igual signo.

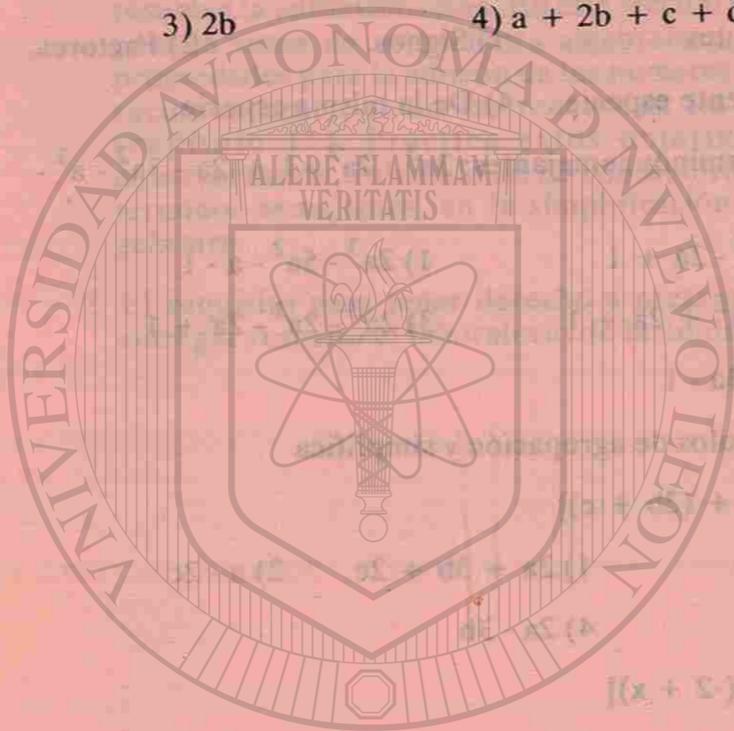
Para sumar dos números algebraicos, de igual signo, se suman los valores absolutos a dichos números, conservándoles el signo.

6. $(2a - b + 2c - d) - (c + 3a - 2d + b)$

0) $-a - 2b + c + d$ 1) $c - d$

2) $2a - b + 2c - d$

3) $2b$ 4) $a + 2b + c + d$



SUMAS ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 2.

1-2 ADICIÓN ALGEBRAICA.

"DEFINICIÓN"

La adición o suma, es la operación que tiene por objeto, reunir varias cantidades de la misma especie en una sola. El signo empleado para esta operación es, +. Cada una de las cantidades que entran en una adición se llaman **sumandos** y al resultado de la adición se llama **suma**.

En Algebra, los términos suma y diferencia, se usan en el mismo sentido que en Aritmética, si se aplican a números positivos. Sin embargo, su aplicación a números negativos, hace necesario precisar el procedimiento de adición.

En Aritmética, la suma siempre significa aumento, pero en Algebra, la suma es un concepto muy general, pues puede significar aumento o disminución ya que hay sumas algebraicas que equivalen a una resta aritmética.

"Reglas para la adición algebraica".

En la suma de números algebraicos, se presentan dos casos:

Primer caso, que los sumandos tengan igual signo.

Para sumar dos números algebraicos, de igual signo, se suman los valores absolutos a dichos números, conservándoles el signo.

Ejemplo:

$$(5) + (3) = 5 + 3 = 8$$

$$(-5) + (-3) = -5 - 3 = -(5 + 3) = -8$$

Segundo caso, que los sumandos tengan diferente signo.

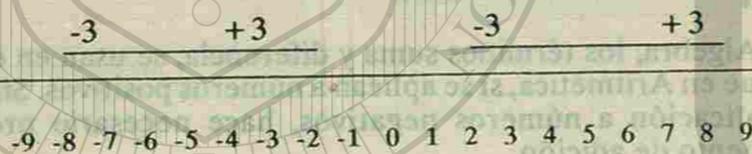
Para sumar dos números algebraicos de diferente signo, se restan los valores absolutos y el resultado tendrá el signo del número de mayor valor absoluto.

Ejemplo:

$$(5) + (-3) = 5 - 3 = 2$$

$$(-5) + (3) = -(5 - 3) = -2$$

Estos resultados se pueden obtener gráficamente en la siguiente figura.



"SUMA DE MONOMIOS"

Para efectuar la suma de dos términos semejantes (poseen las mismas letras con los mismos exponentes), se efectúa la suma algebraica de los coeficientes y se agrega el grupo de letras. La suma de dos términos que contienen diferentes literales, se pueden expresar únicamente colocando el signo "+" entre ellos.

Ejemplo:

Encontrar la suma de las siguientes expresiones:

a) $3a^2b$ y $5a^2b$

b) $6xy$ y $-8xy$

c) $4x$ y $6a$

Solución: a) Para encontrar la suma de estos términos semejantes, escribimos

$$3a^2b + 5a^2b = (3 + 5)a^2b \text{ (Ley distributiva)} \\ = 8a^2b$$

b) Igualmente, escribimos

$$6xy + (-8xy) = -8xy + 6xy \text{ (Ley conmutativa)} \\ = (-8 + 6)xy \text{ (Ley distributiva)} \\ = -(8 - 6)xy \\ = -2xy$$

c) Como los términos $4x$ y $6a$, no son semejantes, no se pueden combinar entre sí, por tanto, únicamente se expresa como:

$$4x + 6a$$

"SUMA DE POLINOMIOS".

La suma de dos polinomios, se reduce a la suma de monomios.

EJEMPLO:

$$\text{Sumar: } (-4a + 9b^2 - 11a^2 + 8) + (5a + b^2 + 5a^2 - 9)$$

Solución: Escribiendo todos los términos unos a continuación de otros con sus respectivos signos.

$$= -4a + 9b^2 - 11a^2 + 8 + 5a + b^2 + 5a^2 - 9$$

Agrupando los términos semejantes de la expresión, tenemos,

$$= (-4a + 5a) + (9b^2 + b^2) + (-11a^2 + 5a^2) + (8 - 9) \text{ (Ley asociativa)}$$

$$= (-4 + 5)a + (9 + 1)b^2 + (-11 + 5)a^2 + (8 - 9) \text{ (Ley distributiva)}$$

$$= a + 10b^2 - 6a^2 - 1$$

Si se tienen que sumar más de dos polinomios, se procede en igual forma, que para dos.

En la práctica, para facilitar la reducción de los términos semejantes, en una misma columna, como se muestra a continuación.

EJEMPLO:

Sumar los tres polinomios siguientes:

$$6a^2x^2 + x^4 + a^4 - 4a^3x - 4ax^3 + 9$$

$$7ax^3 - 7a^2x^2 + 5a^3x + 3a^4 - x^4 - 5$$

$$2a^4 - a^3x + 2a^2x^2 - 10ax^3 - 3x^4 - 3$$

Solución: Para sumar los polinomios anteriores se les dispone como sigue:

$$a^4 - 4a^3x + 6a^2x^2 - 4ax^3 + x^4 + 9$$

$$3a^4 + 5a^3x - 7a^2x^2 + 7ax^3 - x^4 - 5$$

$$2a^4 - a^3x + 2a^2x^2 - 10ax^3 - 3x^4 - 3$$

$$\hline 6a^4 + a^2x^2 - 7ax^3 - 3x^4 + 1$$

Por tanto, habiendo reducido los términos semejantes de cada columna, se obtiene, que la suma buscada es:

$$6a^4 + a^2x^2 - 7ax^3 - 3x^4 + 1$$

EJEMPLO:

Encontrar la diferencia si $-5x + 4y + 5$ se sustrae de $2x + 6y - 3$.

Solución: Podemos obtener la diferencia encontrando la suma de la segunda expresión anterior (el minuendo) y el inverso aditivo de la primera expresión (el sustraendo). Obtenemos que el inverso aditivo del sustraendo cambiando el signo de cada uno de sus términos. Así tenemos:

$$2x + 6y - 3$$

$$5x - 4y - 5$$

$$\hline 7x + 2y - 8$$

es la respuesta.

"SÍMBOLOS DE AGRUPACIÓN"

Cuando un grupo de términos, en una expresión algebraica, van a ser manejados como un sólo número, se encierran en paréntesis circulares (), o rectangulares [], o bien llaves { }. Estos símbolos, se usan también para indicar que se van a efectuar ciertas operaciones algebraicas y el orden en el cual deben efectuarse. Por ejemplo:

$$(2x + 4y - z) + (3x - 2y + 3z)$$

significa que el número representado por la expresión en el primer paréntesis, debe sumarse al representado por la expresión en el segundo. De igual modo

$$(6a - 5b - 2c) - (2a - 3b - 2c)$$

indica que el número representado por la última expresión debe restarse del representado por la primera.

Con objeto de efectuar las operaciones indicadas, mediante el uso de los símbolos de agrupación, se necesita quitar dichos símbolos, antes de llevar a cabo la operación final.

Si la operación indicada es la adición, se puede, por la ley asociativa, omitir los símbolos de agrupación y combinar los términos semejantes. Así, en la expresión de arriba se tiene,

$$\begin{aligned}(2x + 4y - z) + (3x - 2y + 3z) &= 2x + 4y - z + 3x - 2y + 3z \\ &= (2x + 3x) + (4y - 2y) + (-z + 3z) \\ &= 5x + 2y + 2z\end{aligned}$$

Si en una expresión algebraica, es necesario eliminar un símbolo de agrupación precedido por un signo menos, debe cambiarse el signo de cada uno de los términos encerrados por estos símbolos. Así

$$\begin{aligned}(6a - 5b + 2c) - (2a - 3b + 2c) &= 6a - 5b + 2c - 2a + 3b - 2c \\ &= (6a - 2a) + (-5b + 3b) + (2c - 2c) \\ &= (6 - 2)a + (-5 + 3)b + (2 - 2)c \\ &= 4a - 2b\end{aligned}$$

o sea, si los símbolos de agrupación están precedidos por un signo más, pueden eliminarse sin ningún cambio en la expresión. Y si lo que precede a un símbolo de agrupación es un signo menos, los signos de todos los términos deben cambiarse al retirar el símbolo de agrupación.

Recíprocamente, si en una expresión algebraica, es necesario insertar un par de símbolos de agrupación, precedido de un signo menos, deben cambiarse los signos de cada uno de los términos que queden encerrados.

Cuando en una expresión algebraica, contiene uno o más pares de símbolos de agrupación, encerrados en otro par, es aconsejable empezar a eliminar los símbolos internos.

EJEMPLO:

Quitar los símbolos de agrupación y simplificar combinando los términos semejantes, en la expresión:

$$2x - \{3x + [4x - (x - 2y) + 3y] - 4y\} + 2y$$

Solución: Los pasos del procedimiento, para eliminar los símbolos de agrupación, en la expresión anterior, se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}2x - \{3x + [4x - (x - 2y) + 3y] - 4y\} + 2y \\ &= 2x - \{3x + [4x - x + 2y + 3y] - 4y\} + 2y \text{ (eliminar} \\ &\text{ paréntesis circular).} \\ &= 2x - \{3x + [3x + 5y] - 4y\} + 2y \text{ (combinar} \\ &\text{ términos semejantes en paréntesis rectangular)}\end{aligned}$$

$$= 2x - \{3x + 3x + 5y - 4y\} + 2y \text{ (eliminar paréntesis rectangular)}$$

$$= 2x - \{6x + y\} + 2y \text{ (combinar términos semejantes en llaves)}$$

$$= 2x - 6x - y + 2y \text{ (eliminar llaves)}$$

$$= -4x + y \text{ (simplificar)}$$

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

Realiza las operaciones indicadas.

1.- $(-14) + 6$

2.- $(-2) + (-3)$

3.- $(5) + (-3)$

4.- $(-3) - (-2)$

5.- $9 + (-3)$

6.- $(-17) + (-5)$

7.- $18 + (-17) + (-1)$

8.- $(-20) - 13$

9.- $5 + (-9)$

10.- $(-4) - (-5)$

11.- $(mn) + (-mn) + 6mn$

12.- $(-x) - (-7x)$

13.- $2a - 5a$

14.- $8x - 2x$

15.- $5a - 6a - 7a$

16.- $(-8a) - (-3a) - (-6a)$

17.- $2y - 3y - 5y$

18.- $3x^2 - 2xy$

19.- $-2x^3y + 7x^3y$

20.- $2ab + (-3ab)$

21.- $8a - 8b$

Sumar las tres expresiones en cada uno de los problemas 22 a 25. Sustraiga luego la tercera expresión de la suma de las dos primeras.

22.- $7x - 3y + 11; -14x + 10y + 10; 8x + 8y + 13$

23.- $3a + 4b - c; 2c - 4a + 7b; 3b - c + 5a$

24.- $2x^2y - 4xy^2 - 6xy; 3xy + 7x^2y + 2xy^2; -xy^2 + 4xy + 2x^2y$

25.- $2r - 3rs + 7s; -4s - 3r + 5rs; 2rs + 3s - 8r$

Quitar los símbolos de agrupación y simplificar combinando términos semejantes.

26.- $2x - (y + z) + (x - y - z)$

27.- $(3a - 2b) - (a + 4b + 1)$

28.- $(2a^2 + 3ab + c) + (2c - 5a^2 - ab)$

29.- $(7r + 4s - 3r^2s^2) - (3s + 6r + 3r^2s^2)$

30.- $(4a) + (b - 3) - (3a + 1)$

31.- $x - (y - z + 4) + (x + z - 2)$

32.- $(x - y) - (2x - 3y) - (-x + y)$

33.- $1 - [a - 2b - (3 - a) + 3]$

34.- $8x - [(x + 3y) - (3x - 3y)]$

35.- $-[a + (3 - a) - (4 + 3a)]$

36.- $(25x^2 - 22xy + 15y^2) - [(4x^2 + 2y^2) - (15xy - 10y^2)]$

37.- $-[5x - y - [3y - (z - y + 2x) - 4x] + z]$

38.- $3ab - \{-(2ab + 4a) + [3b - (-ab + a + 2ab)]\}$

39.- $-[x - 2xy + y - [3x + 5xy + 6y - (x - y) + 5]]$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

- | | |
|------------------|---|
| 1) -8 | 21) $8a - 8b$ |
| 2) -5 | 22) $x + 15y + 34; -15x - y + 8$ |
| 3) 2 | 23) $4a + 14b; -6a + 8b + 2c$ |
| 4) -1 | 24) $11x^2y - 3xy^2 + xy; 7x^2y - xy^2 - 7xy$ |
| 5) 6 | 25) $-9r + 4rs + 6s; 7r$ |
| 6) -22 | 26) $3x - 2y - 2z$ |
| 7) 0 | 27) $2a - 6b - 1$ |
| 8) -33 | 28) $-3a^2 + 2ab + 3c$ |
| 9) -4 | 29) $r + s - 6r^2s^2$ |
| 10) 1 | 30) $a + b - 4$ |
| 11) $6mn$ | 31) $2x - y + 2z - 6$ |
| 12) $6x$ | 32) y |
| 13) $-3a$ | 33) $1 - 2a + 2b$ |
| 14) $6x$ | 34) $10x - 6y$ |
| 15) $-8a$ | 35) $3a + 1$ |
| 16) a | 36) $21x^2 - 7xy + 3y^2$ |
| 17) $-6y$ | 37) $-11x + 5y - 2z$ |
| 18) $3x^2 - 2xy$ | 38) $6ab + 5a - 3b$ |
| 19) $5x^3y$ | 39) $x + 7xy + 6y + 5$ |
| 20) $-ab$ | |

UNIDAD IX

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

INTRODUCCIÓN

En esta unidad aprenderás a efectuar las operaciones de multiplicación y división con las expresiones y a simplificar el resultado.

Al término del estudio de esta unidad, el estudiante estará en condiciones de:

OBJETIVOS:

1. Definir correctamente el concepto de multiplicación.
2. Aplicar correctamente las leyes de los signos de la multiplicación de números algebraicos.
3. Aplicar correctamente las leyes de los exponentes en la multiplicación de monomios y de polinomios.
4. Definir correctamente el concepto de división.
5. Aplicar correctamente las leyes de los signos en la división de números algebraicos.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

- | | |
|------------------|---|
| 1) -8 | 21) $8a - 8b$ |
| 2) -5 | 22) $x + 15y + 34; -15x - y + 8$ |
| 3) 2 | 23) $4a + 14b; -6a + 8b + 2c$ |
| 4) -1 | 24) $11x^2y - 3xy^2 + xy; 7x^2y - xy^2 - 7xy$ |
| 5) 6 | 25) $-9r + 4rs + 6s; 7r$ |
| 6) -22 | 26) $3x - 2y - 2z$ |
| 7) 0 | 27) $2a - 6b - 1$ |
| 8) -33 | 28) $-3a^2 + 2ab + 3c$ |
| 9) -4 | 29) $r + s - 6r^2s^2$ |
| 10) 1 | 30) $a + b - 4$ |
| 11) $6mn$ | 31) $2x - y + 2z - 6$ |
| 12) $6x$ | 32) y |
| 13) $-3a$ | 33) $1 - 2a + 2b$ |
| 14) $6x$ | 34) $10x - 6y$ |
| 15) $-8a$ | 35) $3a + 1$ |
| 16) a | 36) $21x^2 - 7xy + 3y^2$ |
| 17) $-6y$ | 37) $-11x + 5y - 2z$ |
| 18) $3x^2 - 2xy$ | 38) $6ab + 5a - 3b$ |
| 19) $5x^3y$ | 39) $x + 7xy + 6y + 5$ |
| 20) $-ab$ | |

UNIDAD IX

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

INTRODUCCIÓN

En esta unidad aprenderás a efectuar las operaciones de multiplicación y división con las expresiones y a simplificar el resultado.

Al término del estudio de esta unidad, el estudiante estará en condiciones de:

OBJETIVOS:

1. Definir correctamente el concepto de multiplicación.
2. Aplicar correctamente las leyes de los signos de la multiplicación de números algebraicos.
3. Aplicar correctamente las leyes de los exponentes en la multiplicación de monomios y de polinomios.
4. Definir correctamente el concepto de división.
5. Aplicar correctamente las leyes de los signos en la división de números algebraicos.

6. Aplicar correctamente las leyes de los exponentes en la división de monomios y de polinomios.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO:

1. Estudia la lección 3 del capítulo I de tu libro de texto. Para los objetivos del 1 al 3 estudia la sección 1-3 de la misma lección; tal vez te parezcan muy sencillas las reglas de los signos y de los exponentes, pero deberás ponerles mucha atención y practicarlas, ya que la mayor parte de las veces, es donde se comete el error al efectuar la multiplicación. Estudia y analiza los ejemplos que vienen, y en base a ellos, trata de resolver la autoevaluación 1 de la lección 2.

Para los objetivos 4, 5 y 6 estudia la sección 4-4 de la misma lección. Aquí se presentan todas las formas de dividir una expresión algebraica entre otra. Es necesario que domines, también, las reglas de los signos y de los exponentes para la división. Resuelve la autoevaluación 2.

2. Como ritmo de trabajo te sugerimos el siguiente:

1er. día - objetivos 1 y 2.

2do. día - objetivo 3.

3er. día - objetivos 4 y 5.

4to. día - objetivo 6 y Laboratorio.

3. El requisito para tener derecho a presentar esta unidad será entregar resuelto el laboratorio de la unidad a tu maestro.

AUTOEVALUACIÓN.

Efectuar las siguientes operaciones y simplificar:

1. $(-1)(-5)$

0) -6

1) 6

2) 5

3) -5

4) -4

2. $(+2)^3(-3)^2(-2)^4$

0) -1316

1) 1492

2) 1152

3) 1052

4) 1352

3. $(-a^2)(2a^3)$

0) -2a

1) a^5

2) $-2a^5$

3) $-a^5$

4) $-3a^6$

4. $(x^2y)(2y^2)(-3xy)(-2)$

0) $6x^2y$

1) $12xy^2$

2) $12x^3y^4$

3) $-12xy$

4) $-6x^3y^2$

5. $(3x^2 - 2x - 2)(-2x)$

0) $3x^2 - 2x^2 - 2x$

1) $x^3 - 3x^2 - 5x$

2) $-6x^3 + 4x^2 + 4x$

3) $4x^3 - 4x^2 + 4x$

4) $6x^3 - 4x^2 - 4x$

6. $(x^2 - 3xy + 3y^2)(x - 2y)$

0) $x^3 - 5x^2y + 9xy^2 - 6y^3$

1) $x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$

2) $3x^3 - x^2y - xy^2 - 9y^3$

$$3) 2x^3 - 5x^2y - 9xy^2 - 6y^3$$

$$4) x^3 + 5x^2y - 8xy^2 - 3y^3$$

$$7. (x - 4)^2$$

$$0) x^2 - 4x + 16$$

$$1) x^2 - 8x + 4$$

$$2) x^2 - 8x + 16$$

$$3) x^2 + 8x - 16$$

$$4) x^2 - 16$$

$$8. (x - 4)(x + 4)$$

$$0) x^2 - 16$$

$$1) x^2 - 8x + 16$$

$$2) x^2 - 4x + 16$$

$$3) x^2 + 8x - 4$$

$$4) x^2 - 8x + 4$$

$$9. (-9)/(-3)$$

$$0) 3$$

$$1) -3$$

$$2) 6$$

$$3) -6$$

$$4) -12$$

$$10.$$

$$\frac{36a^4b^2c^3}{6a^2b^2c^2}$$

$$0) 3ac$$

$$1) 6a^2c^3$$

$$2) 3ac^3$$

$$3) 6a^2c$$

$$4) 6a^3c^2$$

$$11. (6a^4b^5 - 12a^5b^4)/(6a^4b^4)$$

$$0) b - 2$$

$$1) -2$$

$$2) -2ab$$

$$3) ab^2 - 2a^2b$$

$$4) b - 2a$$

$$12. (4x^3 - 10x^2 + 2x + 4)/(2x^2 - 3x - 2)$$

$$0) x - 1$$

$$1) 2x - 1$$

$$2) 2x - 3$$

$$3) 2x - 2$$

$$4) 2x + 1$$

MULTIPLICACIONES Y DIVISIÓN CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 3.

1-3 MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA.

Definición.

La multiplicación es la operación que tiene por objeto, repetir un número como sumando, tantas veces como unidades tiene el otro. Así, $5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$.

El número que se repite se llama **multiplicando** y el número que indica las veces que el multiplicando es repetido, se llama **multiplicador**.

El resultado se llama **producto** y al multiplicando y al multiplicador se llaman también, **factores del producto**.

El signo de la multiplicación es una cruz (x) o un punto (\cdot), que se lee multiplicando por, o simplemente por, y que se coloca entre el multiplicando y el multiplicador.

"Leyes de los signos para la multiplicación".

En la multiplicación de números reales se presentan dos casos:

Primer caso, cuando los factores son del mismo signo.

"El producto de dos factores del mismo signo, es positivo: Por ejemplo:

$$(5) (3) = 15$$

$$3) 2x^3 - 5x^2y - 9xy^2 - 6y^3$$

$$4) x^3 + 5x^2y - 8xy^2 - 3y^3$$

$$7. (x - 4)^2$$

$$0) x^2 - 4x + 16$$

$$1) x^2 - 8x + 4$$

$$2) x^2 - 8x + 16$$

$$3) x^2 + 8x - 16$$

$$4) x^2 - 16$$

$$8. (x - 4)(x + 4)$$

$$0) x^2 - 16$$

$$1) x^2 - 8x + 16$$

$$2) x^2 - 4x + 16$$

$$3) x^2 + 8x - 4$$

$$4) x^2 - 8x + 4$$

$$9. (-9)/(-3)$$

$$0) 3$$

$$1) -3$$

$$2) 6$$

$$3) -6$$

$$4) -12$$

$$10.$$

$$\frac{36a^4b^2c^3}{6a^2b^2c^2}$$

$$0) 3ac$$

$$1) 6a^2c^3$$

$$2) 3ac^3$$

$$3) 6a^2c$$

$$4) 6a^3c^2$$

$$11. (6a^4b^5 - 12a^5b^4)/(6a^4b^4)$$

$$0) b - 2$$

$$1) -2$$

$$2) -2ab$$

$$3) ab^2 - 2a^2b$$

$$4) b - 2a$$

$$12. (4x^3 - 10x^2 + 2x + 4)/(2x^2 - 3x - 2)$$

$$0) x - 1$$

$$1) 2x - 1$$

$$2) 2x - 3$$

$$3) 2x - 2$$

$$4) 2x + 1$$

MULTIPLICACIONES Y DIVISIÓN CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 3.

1-3 MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA.

Definición.

La multiplicación es la operación que tiene por objeto, repetir un número como sumando, tantas veces como unidades tiene el otro. Así, $5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$.

El número que se repite se llama **multiplicando** y el número que indica las veces que el multiplicando es repetido, se llama **multiplicador**.

El resultado se llama **producto** y al multiplicando y al multiplicador se llaman también, **factores del producto**.

El signo de la multiplicación es una cruz (x) o un punto (\cdot), que se lee multiplicando por, o simplemente por, y que se coloca entre el multiplicando y el multiplicador.

"Leyes de los signos para la multiplicación".

En la multiplicación de números reales se presentan dos casos:

Primer caso, cuando los factores son del mismo signo.

"El producto de dos factores del mismo signo, es positivo. Por ejemplo:

$$(5) (3) = 15$$

$$(-5)(-3) = 15$$

Segundo caso, cuando los factores son de signo diferente.

"El producto de dos factores de signo diferente, es negativo".
Por ejemplo:

$$(-5)(3) = 15$$

$$(5)(-3) = -15$$

Para encontrar el producto de $(-8)(-6)(-5)$; se multiplican los primeros dos factores y el resultado se multiplica por el tercero así:

$$(-8)(-6)(-5) = (+48)(-5) = -240$$

Para encontrar el producto de $(-2)(-3)(-4)(-5)$; se multiplican los primeros dos factores y los últimos dos factores, los resultados se multiplican entre sí, para obtener el producto, así

$$(-2)(-3)(-4)(-5) = (+6)(+20) = 120$$

De estos ejemplos se deduce lo siguiente:

"El producto de cualquier número de factores positivos, es positivo".

"El producto, de un número par de factores negativos, es positivo".

"El producto, de un número impar de factores negativos, es negativo".

"Ley de los exponentes en la multiplicación".

Hay productos en que el mismo factor ocurre dos, tres o más veces. Un producto de ese tipo puede expresarse escribiendo el factor un número apropiado de veces, pero es más conveniente usar una notación abreviada, así

$$a \times a = a^2 \text{ (léase "a cuadrada")}$$

$$a \times a \times a = a^3 \text{ (Léase "a cúbica")}$$

$$a \times a \times a \times a = a^4 \text{ (Léase "a cuarta")}$$

Estas son ilustraciones de la siguiente definición:

"Si a es un número y n es un entero positivo, entonces, a^n denota el producto de n factores, cada uno de los cuales es a .
Esto es

$$a^n = a \times a \times a \times \dots \times a \text{ (n factores)}$$

La cantidad a^n es llamada n -ésima potencia de a y se lee " a es la base y n el exponente. La primera potencia de un número se expresa usualmente sin exponente. Así, por definición,

$$a^1 = a$$

Como consecuencia de la definición anterior, se tiene la siguiente ley, aplicable a los productos que comprenden potencias de los números:

"Si a es un número real y m y n son enteros positivos, entonces,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Demostración: La cantidad a^m significa el producto de m factores, cada uno de los cuales es a , y a^n significa a tomado como factor n veces. En total, a ocurre como factor $m+n$ veces, lo cual exhibimos, escribiendo

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

"MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS".

Regla.- Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto, se escriben las letras de los factores, en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto, vendrá dado por la ley de los signos.

EJEMPLO:

multiplicar:

$$a) x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5 \text{ (Ley de los exponentes)}$$

$$b) a^4 \cdot a^3 \cdot a^2 = a^{4+3+2} = a^9 \text{ (Ley de los exponentes)}$$

$$c) (-2a^3b^2)(3ab^4) = -2 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot a \cdot b^2 \cdot b^4 \text{ (Ley Conmutativa)}$$
$$= (-2 \times 3)(a^3 \cdot a)(b^2 \cdot b^4) \text{ (Ley asociativa)}$$
$$= -6a^4b^6 \text{ (Ley de los exponentes)}$$

"MULTIPLICACIÓN DE UN MONOMIO POR UN POLINOMIO".

Regla.- Para multiplicar un monomio por un polinomio se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso, la ley de los signos, y se hace la suma algebraica de los productos parciales.

EJEMPLO:

Multiplicar

$$(2y^3)(x^2 - 3xy - 2y^2)$$

Solución: Usando la ley distributiva para la multiplicación y la ley de los exponentes, obtenemos

$$2y^3(x^2 - 3xy - 2y^2) = 2y^3(x^2) + 2y^3(-3xy) + 2y^3(-2y^2)$$
$$= 2x^2y^3 - 6xy^4 - 4y^5$$

El paso intermedio se escribe para enfatizar el proceso. El procedimiento usual es escribir tan solo el resultado final.

"MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR POLINOMIOS".

Regla.- Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la ley de los signos y la ley de los exponentes y se combinan los términos semejantes.

Para facilitar la combinación de términos semejantes en la multiplicación de polinomios, se ordena cada uno de ellos según las potencias ascendentes o descendentes de una misma literal y se escriben uno debajo de otro. Se multiplican luego, todos los términos del multiplicando por cada término del multiplicador, empezando por la izquierda, se escriben después los productos parciales de modo que sus términos semejantes, si los hay, se correspondan en columna y se hace la reducción.

EJEMPLO:

Multiplicar

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$

Solución:

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$a - b$$

multiplicación por a:

$$a^3 - 2a^2b + ab^2$$

multiplicación por -b:

$$-a^2b + 2ab^2 - b^3$$

producto:

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

EJEMPLO:

Multiplicar :

$$(2x^2 + xy - 3y^2)(x^2 - 3xy + y^2)$$

Solución:

$$2x^2 + xy - 3y^2$$

$$x^2 - 3xy + y^2$$

multiplicación por x^2 :

$$2x^4 + x^3y - 3x^2y^2$$

multiplicación por $-3xy$:

$$-6x^3y - 3x^2y^2 + 9xy^3$$

multiplicación por y^2 :

$$+ 2x^2y^2 + xy^3 - 3y^4$$

$$2x^4 - 5x^3y - 4x^2y^2 + 10xy^3 - 3y^4$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Multiplique como se indica y combina términos semejantes.

1) $(4)(-2)$

16) $-2x^2(3x - 3y + 2)$

2) $(-5)(-4)$

17) $(x - 3)(x + 5)$

3) $(2)(-1)(-4)$

18) $(1 - 2a)(4 + 3a)$

4) $(-3)(-1)(-2)$

19) $(a + 2b)(a - 2b)$

5) $(5ab)(2ab)$

20) $(2c - 3d)(c + d)$

6) $(-6x^2y)(3xy^2)$

21) $(x - y)(x + 4y)$

7) $(-2x^2)(-3x)$

22) $(x^2 - 8x + 16)(x - 4)$

8) $(ab)(-2b)(3a)$

23) $(a - 7ac + 8c)(3a - 2c)$

9) $(-ab)(2b)(-5a)$

24) $(4a^2 + 2ab + b^2)(2a - b)$

10) $(3a^2b^2)(2ab)(a^2b)$

25) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$

11) $ab(a^3 - b^3)$

26) $(a + b - 1)(a + b + 1)$

12) $-7x^2(4x - 3)$

27) $(2x - y + 4)(2x + y + 4)$

13) $2a^2b(3ab^2 + a)$

28) $(a + 2)(a + 1)(a + 3)$

14) $-8x^2y(-2x + 3y + 1)$

29) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

15) $6a(3a - 2b - c)$

30) $(1 - b)(2 + b)(3 - b)$

1-4 DIVISIÓN ALGEBRAICA.

"Definición".

La división es la operación que tiene por objeto, repartir un número, en tantas partes iguales, como unidades tiene el otro, o hallar las veces que un número contiene a otro. Cualquiera de estos dos aspectos de la división viene a ser una operación inversa a la multiplicación, así como la resta lo es de la suma; de modo que la división, puede siempre definirse como una operación que tiene por objeto hallar uno de los dos factores, cuando se conoce su producto y el otro factor. Así, $24 \div 6 = 4$, porque $4 \times 6 = 24$.

El producto dado, se llama **dividendo**, el factor conocido se llama **divisor** y el factor que se busca se denomina **cociente**.

El signo de la división se representa de las siguientes formas:

$$a \div b, a:b, a/b$$

Si el cero es considerado como la ausencia total de cantidad, entonces es evidente que

$$n + 0 = n; \quad m \times 0 = 0; \quad 0/n = 0$$

Sin embargo, cualquier intento, para establecer un proceso en el que se emplee el cero como divisor, conduce a una situación absurda.

Por ejemplo, si se interpreta el cociente, $a \div b$, como el número de veces, que debe sumarse b para obtener a , entonces, $a/0$ es el número de veces que debe sumarse cero para obtener a . Evidentemente, ello carece de sentido. Por lo tanto, si el divisor es cero, la operación de división no queda definida y por ello, se excluye la división entre cero.

"Leyes de los signos para la división".

Las leyes de los signos en la división, son las mismas que en la multiplicación.

"El cociente, de dos números del mismo signo, es positivo".

"El cociente, de dos números de signos diferentes, es negativo".

Las leyes de los signos, se pueden representar también en la siguiente forma:

+ entre + dá, +
- entre - dá, +
+ entre - dá, -
- entre + dá, -

"Leyes de los exponentes para la división algebraica".

"Si m y n son enteros positivos y $a \neq 0$, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ si } m > n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = 1 \text{ si } m = n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ si } n > m$$

Demostración.- Si $m > n$, tenemos por la ley de los exponentes para la multiplicación

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n \cdot a^{m-n}}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} (a^{m-n}) = a^{m-n}$$

Si $m = n$, tenemos por la definición de la división

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

Dejemos la demostración de la última parte de la ley al estudiante.

"División de dos monomios".

Regla.- Para dividir dos monomios, se divide el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor y a continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra un exponente igual, a la diferencia entre el exponente que tiene el dividendo y el exponente que tiene el divisor. El signo, lo da la ley de los signos para la división.

EJEMPLO:

Dividir:

$$a) \quad 36a^3 + (-18a) = \frac{36a^3}{-18a} = -2a^2$$

$$b) \quad (-12a^5) + (-36a^5) = \frac{-12a^5}{-36a^5} = \frac{1}{3}$$

$$c) \quad 7a^3b^2c^3 + 21ab^3c^3 = \frac{7a^3b^2c^3}{21ab^3c^3} = \frac{a^2}{3b}$$

De este ejemplo se deduce que:

- 1.- El coeficiente del cociente de dos monomios, es cociente de los valores absolutos, de los coeficientes del dividendo y del divisor.
- 2.- Cada literal, de las que forman el dividendo, interviene en el cociente, con un exponente calculado, de acuerdo con la ley anterior mencionada, a menos que una misma literal tenga igual exponente, en el dividendo y en el divisor; en este caso, no se escribe, por ser su cociente, igual a 1.

"División de un polinomio entre un monomio".

Regla.- para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio, separando los cocientes parciales con sus propios signos.

EJEMPLO:

Dividir $3x^2y - 6xy^2 + 12x + 3x$

$$\text{Solución: } \frac{3x^2y - 6xy^2 + 12x}{3x} = \frac{3x^2y}{3x} - \frac{6xy^2}{3x} + \frac{12x}{3x}$$
$$= xy - 2y^2 + 4$$

"División de dos polinomios".

Para dividir un polinomio entre otro polinomio, se efectúan los siguientes pasos:

- 1.- Tanto el dividendo como el divisor, se disponen en orden ascendente o descendente, de las potencias de alguna letra que aparezca en ambos.
- 2.- Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y se obtiene así, el primer término del cociente.
- 3.- Se multiplica el divisor por el primer término del cociente y el producto obtenido, se sustrae del dividendo.
- 4.- El residuo obtenido, en el paso anterior, se trata como a un nuevo dividendo y se repiten con él, los pasos 2 y 3.
- 5.- Se continúa este proceso, hasta obtener un residuo en el cual, el mayor exponente de la letra que se escogió, en el paso 1, sea menor, que el mayor exponente de dicha letra en el divisor.

Si el residuo es cero, la división es exacta y el resultado puede expresarse como

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente}$$

Si el residuo no es cero, expresamos el resultado como

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

EJEMPLO:

Dividir: $4x^4 - 16x^3 + 36x^2 - 40x + 25 \div 2x^2 - 4x + 5$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 4x + 5 \overline{) 4x^4 - 16x^3 + 36x^2 - 40x + 25} \\ \underline{-4x^4 + 8x^3 - 10x^2} \\ 8x^3 - 10x^2 - 40x + 25 \\ \underline{-8x^3 + 26x^2 - 40x + 25} \\ 10x^2 - 20x + 25 \\ \underline{-10x^2 + 20x - 25} \\ 0 \end{array}$$

(1er. Residuo)

$$+ 8x^3 - 16x^2 + 20x$$

(2do. Residuo)

$$- 10x^2 + 20x - 25$$

0 (Residuo)

Solución:

Primer término del cociente. - Para obtener el primer término del cociente se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

$$4x^4 \div 2x^2 = 2x^2$$

Primer producto parcial. - Para obtener el primer producto parcial, se multiplica el divisor por el primer término del cociente

$$(2x^2 - 4x + 5) = 4x^4 - 8x^3 + 10x^2$$

y se resta del dividendo, para obtener el primer residuo.

Segundo término del cociente. - Se obtiene, dividiendo el primer término del primer residuo, entre el primer término del divisor

$$-8x^3 \div 2x^2 = -4x$$

Segundo producto parcial. - Se obtiene multiplicando el divisor por el segundo término del cociente.

$$(2x^2 - 4x + 5) = -8x^3 + 16x^2 - 20x$$

y se resta del primer residuo, para obtener el segundo residuo.

Tercer término del cociente. - Se obtiene dividiendo el primer término del segundo residuo entre el primer término del divisor.

$$10x^2 \div 2x^2 = 5$$

Tercer producto parcial. - Se obtiene multiplicando el divisor por el tercer término del cociente

$$(2x^2 - 4x + 5)(5) = 10x^2 - 20x + 25$$

y se resta del segundo residuo, para obtener un residuo final de cero.

Prueba de la división. - Puede verificarse cuando la división es exacta, multiplicando el divisor por el cociente, debiendo dar el dividendo, si la operación está correcta.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Realice las divisiones indicadas.

1. $2a^4 \div a^2$

2. $(-36a^2b^3) \div (-6a^2b)$

3. $(8xy) \div (-4xy)$

4. $2a^2b^3c^4 \div a^3b^2c^3$

5. $(-9x^3y^4) \div (-3x^2y^5)$

6. $(16a^3b^2) \div (-4a^3b)$

7. $(14a^2 - 21a^3) \div (7a^2)$

8. $(15x^2y^3 - 9xy) \div (3xy)$

9. $(9x^2 - 6x + 3) \div (-3)$

10. $(c^2d - cd^2 - cd) \div (cd)$

11. $(c^2d + 2c^2d^4 - c^2d^2) \div (c^2d^2)$

12. $(9a^2b^3 - 10a^4b^4) \div (5a^2b^3)$

13. $(a^2 - 7a + 6) \div (a - 1)$

14. $(x^2 + 4x - 12) \div (x + 6)$

15. $(x^2 - 5x - 14) \div (x + 2)$

16. $(a^2 - 6ab + 8b^2) \div (a - 4b)$

17. $(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \div (x^2 - 4x + 4)$

18. $(a^4 - b^4) \div (a^2 - b^2)$

19. $(9x^2 - 16y^2) \div (3x - 4y)$

20. $(2x^2 + 5xy - 3y^2) \div (2x - y)$

21. $(3x^2 - 8xy + 4y^2) \div (x - 2y)$

22. $(4a^2 + 5ab - 6b^2) \div (a + 2b)$

23. $(8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3) \div (4x^2 + 4xy + y^2)$

24. $(x^3 + 10x^2 + 12x + 27) \div (x^2 + x + 3)$

25. $(2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 11x - 6) \div (x^2 - 3x + 2)$

26. $(a^3 - 27) \div (a^2 + 3a + 9)$

27. $(8a^3 - 1) \div (2a - 1)$

28. $(x^4 + x^2y^2 + y^4) \div (x^2 - xy + y^2)$

29. $(2a^4 - 3a^3 + 3a^2 + a - 1) \div (2a - 1)$

30. $(2x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 11x + 4) \div (2x^2 - 3x + 1)$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 3.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1. -8

2. 20

3. 8

4. -6

5. $10a^2b^2$

6. $-18x^3y^3$

7. $6x^3$

8. $-6a^2b^2$

9. $10a^2b^2$

10. $6a^5b^4$

11. $a^4b - ab^4$

12. $-28x^3 + 21x^2$

13. $6a^3b^3 + 2a^3b$

14. $16x^3y - 24x^2y^2 - 8x^2y$

15. $18a^2 - 12ab - 6ac$

16. $-6x^3 + 6x^2y - 4x^2$

17. $x^2 + 2x - 15$

18. $-6a^2 - 5a + 4$

19. $a^2 - 4b^2$

20. $2c^2 - cd - 3d^2$

21. $x^2 + 3xy - 4y^2$

22. $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

23. $3a^3 - 23a^2c + 38ac^2 - 16c^3$

24. $8a^3 - b^3$

25. $x^3 + y^3$

26. $a^2 + 2ab + b^2 - 1$

27. $4x^2 + 16x - y^2 + 16$

28. $a^3 + 6a^2 + 11a + 6$

29. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

30. $b^3 - 2b^2 - 5b + 6$

AUTOEVALUACIÓN 2.

1. $2a^2$

2. $6b^2$

3. -2

4. $2bc/a$

5. $3x/y$

6. -4b

7. $2 - 3a$

8. $5xy^2 - 3$

9. $-3x^2 + 2x - 1$

10. $c - d - 1$

11. $1/d + 2d^2 - 1$

12. $9/5 - 2a^2b$

13. $a - 6$

14. $x - 2$

15. $x - 7$

16. $a - 2b$

17. $x - 2$

18. $a^2 + b^2$

19. $3x + 4y$

20. $x + 3y$

21. $3x - 2y$

22. $4a - 3b$

23. $2x + y$

24. $x + 9$

25. $2x^2 + x - 3$

26. $a - 3$

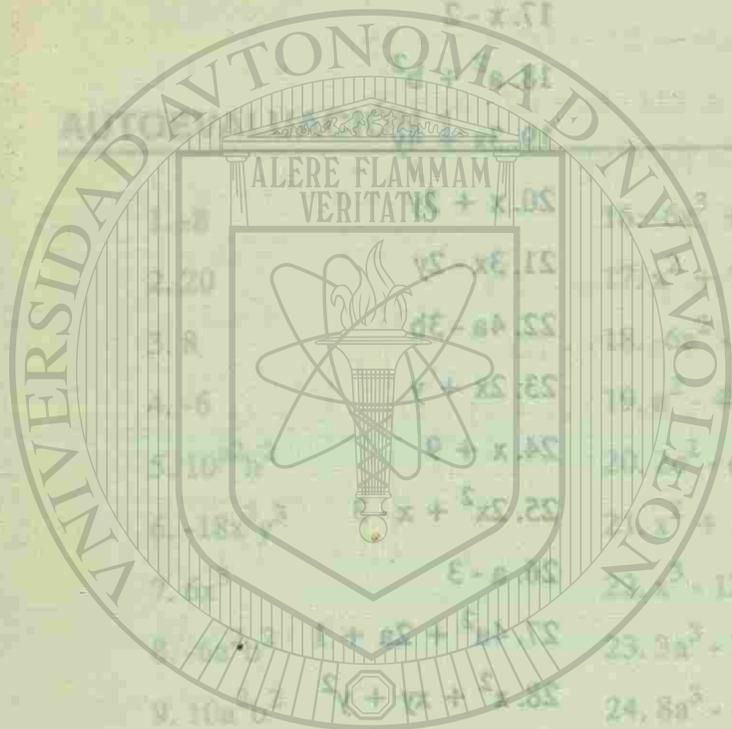
27. $4a^2 + 2a + 1$

28. $x^2 + xy + y^2$

29. $a^3 - a^2 + a + 1$

30. $x^3 - x^2 + x + 4$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES
DE LA SECCIÓN 3.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE ESTUDIOS

UNIDAD X

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

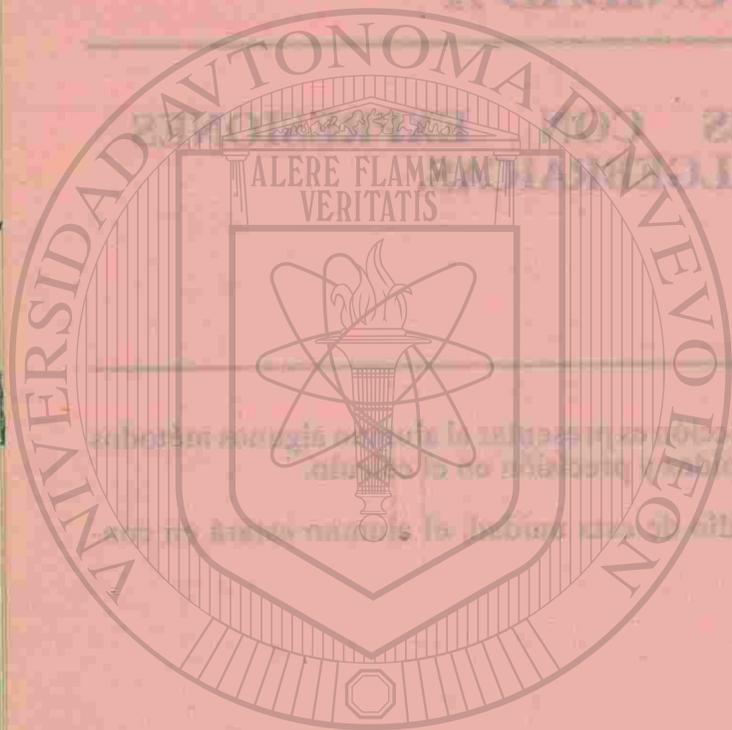
INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta lección es presentar al alumno algunos métodos que contribuirán a dar rapidez y precisión en el cálculo.

Al término del estudio de esta unidad, el alumno estará en condiciones de:

OBJETIVOS:

1. Desarrollar con facilidad algunos productos con coeficientes racionales llamados "productos especiales", tales como:
 - a) El producto de dos binomios con términos semejantes.
 - b) El cuadrado de la suma o diferencia de un binomio.
 - c) El producto de la suma y diferencia de dos números.
 - d) El producto de dos trinomios.
 - e) El cuadrado de un polinomio.
 - f) El cubo de la suma o diferencia de un binomio.



AUTOEVALUACIÓN.

Hallar los productos de los siguientes problemas por los métodos de la lección 4.

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| 1.- $(2a + 3)(a + 5)$ | 19.- $(3r - 5s)(r + 3s)$ |
| 2.- $(a + 4)(2a + 3)$ | 20.- $(5c - d)(c + 2d)$ |
| 3.- $(x + 5)(3x + 2)$ | 21.- $(6h + 8k)(h - 2k)$ |
| 4.- $(3c + 1)(c + 4)$ | 22.- $(w + 9z)(2w - 7z)$ |
| 5.- $(2a + 1)(a + 2)$ | 23.- $(7e + 5f)(e - 2f)$ |
| 6.- $(5a + 4)(a + 3)$ | 24.- $(9g - 7h)(g + 3h)$ |
| 7.- $(4c + 1)(c + 5)$ | 25.- $(2x - 5y)(3x + 7y)$ |
| 8.- $(2y + 3)(y + 7)$ | 26.- $(4p + 3q)(2p - 5q)$ |
| 9.- $(3b + 2c)(b - 4c)$ | 27.- $(3a - 5b)(4a + 7b)$ |
| 10.- $(4f - 3g)(f - 4g)$ | 28.- $(5r - 6s)(3r + 2s)$ |
| 11.- $(n - 7p)(2n - 3p)$ | 29.- $(8g + 3h)(2g + 5h)$ |
| 12.- $(3h - 7k)(h - 2k)$ | 30.- $(5m + 7n)(3m + 4n)$ |
| 13.- $(6c - 5d)(c - 8d)$ | 31.- $(7c - 2d)(5c - 8d)$ |
| 14.- $(7p - 2q)(p - 5q)$ | 32.- $(6r - 11s)(5r - 7s)$ |
| 15.- $(u - 9v)(4u - v)$ | 33.- $(3a + 2)^2$ |
| 16.- $(8a - 3b)(a - 6b)$ | 34.- $(2x - 5)^2$ |
| 17.- $(2x + 3y)(x - 2y)$ | 35.- $(5p + 3)^2$ |
| 18.- $(4m - 3n)(m + 2n)$ | 36.- $(4m - 4)^2$ |

$$37.- (4a - 3b)^2$$

$$38.- (6f + 5g)^2$$

$$39.- (2r - 7s)^2$$

$$40.- (5x + 2y)^2$$

$$41.- (7h + 8k)^2$$

$$42.- (9u - 7v)^2$$

$$43.- (6w - 11z)^2$$

$$44.- (8p + 9q)^2$$

$$45.- (x - 3)(x + 3)$$

$$46.- (m - 5)(m + 5)$$

$$47.- (p - 7)(p + 7)$$

$$48.- (c + 6)(c - 6)$$

$$49.- (4a - 5)(4a + 5)$$

$$50.- (3z - 7)(3z + 7)$$

$$51.- (5t + 8)(5t - 8)$$

$$52.- (2f + 9)(2f - 9)$$

$$53.- (6p - 7q)(6p + 7q)$$

$$54.- (9c + 2g)(9c - 2g)$$

$$55.- (8x + 9y)(8x - 9y)$$

$$56.- (10h - 7k)(10h + 7k)$$

$$57.- (a + b + c)^2$$

$$58.- (x - y + z)^2$$

$$60.- (c + d + 2e)^2$$

$$61.- (u + 2v - 2w)^2$$

$$62.- (3p - 2q + 3r)^2$$

$$63.- (3f - 4g - 3h)^2$$

$$64.- (5r + 2s - 3t)^2$$

$$65.- [x + (y + z)][2x + (y + z)]$$

$$66.- [2(a + b) - c][3(a + b) - c]$$

$$67.- [2u + 3(u - v)][3u + 2(u - v)]$$

$$68.- [2(e + f) - 3g][3(e + f) + 4g]$$

$$69.- [4r - 3(x - t)][5r + 2(s - t)]$$

$$70.- [3(b + c) + 4d][2(b + c) - 2d]$$

$$71.- [3(x - 2y) + 2z][4(x - 2y) - 5z]$$

$$72.- [(a + 2c) - 3][(a + 2c) + 3]$$

$$73.- (x - 2)^3$$

$$74.- (5 - x)^3$$

$$75.- (x - 1)^3$$

$$76.- (2a + 3b)^3$$

$$77.- (a - 4)^3$$

$$78.- (a + 3)^3$$

$$79.- (3x + y)^3$$

$$80.- (x + 27)^3$$

$$59.- (e - f - g)^2$$

PRODUCTOS ESPECIALES.

LECCIÓN 4.

1-5 PRODUCTOS ESPECIALES.

Se llaman productos especiales a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación. De este modo se puede, para muchos tipos de productos, abreviar el proceso de multiplicación.

1-6 EL PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON TÉRMINOS CORRESPONDIENTES SEMEJANTES.

Los términos correspondientes de los binomios " $ax + by$ " y " $cx + dy$ " son semejantes.

términos semejantes

$$(ax + by) (cx + dy)$$

términos semejantes

Obtendremos el producto de estos dos binomios por el

$$37.- (4a - 3b)^2$$

$$38.- (6f + 5g)^2$$

$$39.- (2r - 7s)^2$$

$$40.- (5x + 2y)^2$$

$$41.- (7h + 8k)^2$$

$$42.- (9u - 7v)^2$$

$$43.- (6w - 11z)^2$$

$$44.- (8p + 9q)^2$$

$$45.- (x - 3)(x + 3)$$

$$46.- (m - 5)(m + 5)$$

$$47.- (p - 7)(p + 7)$$

$$48.- (c + 6)(c - 6)$$

$$49.- (4a - 5)(4a + 5)$$

$$50.- (3z - 7)(3z + 7)$$

$$51.- (5t + 8)(5t - 8)$$

$$52.- (2f + 9)(2f - 9)$$

$$53.- (6p - 7q)(6p + 7q)$$

$$54.- (9c + 2g)(9c - 2g)$$

$$55.- (8x + 9y)(8x - 9y)$$

$$56.- (10h - 7k)(10h + 7k)$$

$$57.- (a + b + c)^2$$

$$58.- (x - y + z)^2$$

$$60.- (c + d + 2e)^2$$

$$61.- (u + 2v - 2w)^2$$

$$62.- (3p - 2q + 3r)^2$$

$$63.- (3f - 4g - 3h)^2$$

$$64.- (5r + 2s - 3t)^2$$

$$65.- [x + (y + z)][2x + (y + z)]$$

$$66.- [2(a + b) - c][3(a + b) - c]$$

$$67.- [2u + 3(u - v)][3u + 2(u - v)]$$

$$68.- [2(e + f) - 3g][3(e + f) + 4g]$$

$$69.- [4r - 3(x - t)][5r + 2(s - t)]$$

$$70.- [3(b + c) + 4d][2(b + c) - 2d]$$

$$71.- [3(x - 2y) + 2z][4(x - 2y) - 5z]$$

$$72.- [(a + 2c) - 3][(a + 2c) + 3]$$

$$73.- (x - 2)^3$$

$$74.- (5 - x)^3$$

$$75.- (x - 1)^3$$

$$76.- (2a + 3b)^3$$

$$77.- (a - 4)^3$$

$$78.- (a + 3)^3$$

$$79.- (3x + y)^3$$

$$80.- (x + 27)^3$$

$$59.- (e - f - g)^2$$

PRODUCTOS ESPECIALES.

LECCIÓN 4.

1-5 PRODUCTOS ESPECIALES.

Se llaman productos especiales a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación. De este modo se puede, para muchos tipos de productos, abreviar el proceso de multiplicación.

1-6 EL PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON TÉRMINOS CORRESPONDIENTES SEMEJANTES.

Los términos correspondientes de los binomios " $ax + by$ " y " $cx + dy$ " son semejantes.

términos semejantes

$$(ax + by) (cx + dy)$$

términos semejantes

Obtendremos el producto de estos dos binomios por el

procedimiento indicado a continuación donde se hace uso del axioma distributivo.

$$(ax + by)(cx + dy) = ax(cx + dy) + by(cx + dy)$$

$$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + adxy + bcxy + bdy^2$$

$$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$$

tenemos, pues,

$$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$$

Analizando el producto de la derecha, vemos que el producto de dos binomios con términos correspondientes semejantes se realiza siguiendo estos pasos:

- 1) Multiplicar los primeros términos de los binomios para obtener el primer término del producto.

$$\begin{array}{c} \boxed{acx^2} \\ \downarrow \\ (ax + by)(cx + dy) \end{array}$$

- 2) Sumar los productos obtenidos al multiplicar el primer término de cada binomio por el segundo del otro. Esto nos lleva al segundo término del producto.

$$\begin{array}{c} (ax + by) \quad (cx + dy) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{bcxy} \\ \downarrow \\ \boxed{adxy} \end{array}$$

$$(ad + bc)xy$$

- 3) multiplica los segundos términos de los binomios para obtener

el tercer término del producto.

$$\begin{array}{c} \boxed{bdy^2} \\ \downarrow \\ (ax + by)(cx + dy) \end{array}$$

De ordinario, estos tres pasos se hacen mentalmente y el resultado se escribe sin paso intermedio.

EJEMPLO 1.

Obtener el siguiente producto: $(2a + 3b)(3a - 5b)$.

Solución:

Escribimos el producto como se indica abajo, tras el problema, y se refieren los resultados a las posiciones indicadas por las flechas.

$$(2a + 3b)(3a - 5b) = 6a^2 - ab - 15b^2$$

$$1) (2a)(3a) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2) [(2a)(-5b)] + [(3b)(3a)] =$$

$$-10ab + 9ab = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3) (3b)(-5b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

EJEMPLO 2.

Obtener el siguiente producto: $(2x - 3)(x + 4)$

Solución:

$$(2x - 3)(x + 4) = 2x^2 + 5x - 12$$

$$1) (2x)(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2) [(2x)(4)] + [(-3)(x)] = 8x - 3x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3) (-3)(4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Hallar los productos de los siguientes problemas utilizando la fórmula 1.

$$1.- (x + 2y)(x + 3y)$$

$$2.- (a + 4b)(a - 7b)$$

$$3.- (2r + 5)(3r - 4)$$

$$7.- (2x + y)(2x - 5y)$$

$$8.- (2u - 5v)(u + 3v)$$

$$4.- (x - 8)(x + 3)$$

$$5.- (x + 7)(x - 1)$$

$$6.- (3a - 4)(2a - 1)$$

$$9.- (5a + 1)(2a + 1)$$

$$10. (2x - 3y)(4x - 5y)$$

"El cuadrado de la suma o diferencia de un binomio"

El cuadrado de la suma del binomio $x + y$ se expresa:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y),$$

usamos la fórmula 1 y obtenemos:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$$

$$= x^2 + (xy + xy) + y^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2$$

En consecuencia

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (2)$$

Análogamente,

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad (3)$$

Así diremos que "el cuadrado de la suma o diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primero, más o menos dos veces el producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo."

EJEMPLO 3.

Obtener el cuadrado de $2a + 5b$.

Solución:

Utilizando la fórmula 2, tenemos que:

$$(2a + 5b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(5b) + (5b)^2$$

$$(2a + 5b)^2 = 4a^2 + 20ab + 25b^2$$

EJEMPLO 4.

Obtener el cuadrado de $3x - 4y$.

Solución:

Utilizando la fórmula 3, tenemos que:

$$(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(4y) + (4y)^2$$

$$(3x - 4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Hallar los productos de los siguientes problemas utilizando las fórmulas 2 y 3.

- | | |
|------------------|--------------------|
| 1.- $(a + 2b)^2$ | 6.- $(2a - 3b)^2$ |
| 2.- $(x - 3y)^2$ | 7.- $(3x + 2y)^2$ |
| 3.- $(a + 4b)^2$ | 8.- $(4x - 5)^2$ |
| 4.- $(x - 5y)^2$ | 9.- $(3a + 4b)^2$ |
| 5.- $(x + 6)^2$ | 10.- $(5x - 3y)^2$ |

"El producto de la suma y diferencia de dos números".

El producto de la suma y diferencia de dos números "x" e "y" se expresa como $(x + y)(x - y)$. Si aplicamos la fórmula 1 a este producto, obtenemos:

$$\begin{aligned}(x + y)(x - y) &= x^2 + (-xy + xy) - y^2 \\ &= x^2 - y^2\end{aligned}$$

es decir,

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \quad (4)$$

Podemos, pues, enunciar el "producto de la suma y diferencia de dos números es igual a la diferencia de sus cuadrados."

EJEMPLO 5.

Obtener el siguiente producto: $(a + 5)(a - 5)$

Solución:

Utilizando la fórmula 4, nos queda:

$$\begin{aligned}(a + 5)(a - 5) &= (a)^2 - (5)^2 \\ &= a^2 - 25\end{aligned}$$

EJEMPLO 6.

Obtener el siguiente producto: $(3x + 5y)(3x - 5y)$

Solución:

Utilizando la fórmula 4, tenemos:

$$\begin{aligned}(3x + 5y)(3x - 5y) &= (3x)^2 - (5y)^2 \\ &= 9x^2 - 25y^2\end{aligned}$$

AUTOEVALUACIÓN 3.

Hallar los productos de los siguientes problemas utilizando la fórmula 4.

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1.- $(x + 2)(x - 2)$ | 6.- $(3x + y)(3x - y)$ |
| 2.- $(2x + 1)(2x - 1)$ | 7.- $(4a + 3b)(4a - 3b)$ |
| 3.- $(3x + 2)(3x - 2)$ | 8.- $(2x + 7y)(2x - 7y)$ |
| 4.- $(a + 3b)(a - 3b)$ | 9.- $(3a + 7b)(3a - 7b)$ |
| 5.- $(2x + 5y)(2x - 5y)$ | 10.- $(-2x + 3y)(-2x - 3y)$ |

"Productos de trinomios"

El cuadrado de un trinomio se puede obtener agrupando convenientemente los términos y aplicando luego la fórmula 2 o la fórmula 3. Con dos ejemplos aclararemos el procedimiento.

EJEMPLO 7.

Obtener el cuadrado de $a + b + c$.

Solución:

Consideremos $b + c$ como un número, para ello metámoslo entre paréntesis: $a + (b + c)$. Luego $[a + (b + c)]^2$ es el cuadrado de la suma de dos números y lo podemos obtener aplicando la fórmula 2, como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= [a + (b + c)]^2 \\ &= (a)^2 + 2(a)(b + c) + (b + c)^2 \\ &= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + (b)^2 + 2(b)(c) + (c)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

EJEMPLO 8.

Obtener el cuadrado de $2x - 3y - 5z$.

Solución:

En este problema meteremos los dos primeros términos entre paréntesis, aplicando la fórmula 3, obtendremos:

$$\begin{aligned}(2x - 3y - 5z)^2 &= [(2x - 3y) - 5z]^2 \\ &= (2x - 3y)^2 - 2(2x - 3y)(5z) + (5z)^2 \\ &= (2x - 3y)^2 - 10z(2x - 3y) + (5z)^2 \\ &= (2x - 3y)^2 - 20xz + 30yz + 25z^2 \\ &= 2(2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 - 20xy + 30zy + 25z^2 \\ &= 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 20xz + 30yz + 25z^2\end{aligned}$$

Algunas veces se pueden agrupar los términos de dos trinomios de modo que uno de ellos sea la suma de dos números y el otro la diferencia de los mismos. Luego utilizaremos las fórmulas de 2 y 4 o la fórmula 3 para obtener el producto. Los siguientes ejemplos aclararán tales casos.

EJEMPLO 9.

Obtener el producto de $(3a + 2b + 5c)(3a + 2b - 5c)$.

Solución:

Si encerramos entre paréntesis los dos primeros términos de cada trinomio, obtenemos $[(3a + 2b) + 5c][(3a + 2b) - 5c]$, es decir, la suma y diferencia de dos números. Por tanto podemos obtener el producto utilizando primero la fórmula 4 y luego completar el problema utilizando la fórmula 2. Así obtendremos:

$$\begin{aligned}[(3a + 2b) + 5c][(3a + 2b) - 5c] &= (3a + 2b)^2 - (5c)^2 \\ &= 9a^2 + 12ab + 4b^2 - 25c^2\end{aligned}$$

EJEMPLO 10.

Hallar el producto de $(3x + 4y + z)(3x - 4y - z)$.

Solución:

Advirtamos primero que si agrupamos los dos primeros términos de cada trinomio, no se obtiene el producto de la suma y diferencia de dos números. Pero si agrupamos los términos del siguiente modo $[3x + (4y + z)][3x - (4y + z)]$, vemos que las expresiones en ambos corchetes son respectivamente la suma y diferencia de dos números. Nótese que los paréntesis en el segundo trinomio van precedidos por un signo menos, y que hemos de cambiar el signo de los términos encerrados. Procederemos como sigue:

$$\begin{aligned}(3x + 4y + z)(3x - 4y - z) &= [3x + (4y + z)][3x - (4y + z)] \\ &= (3x)^2 - (4y + z)^2 \\ &= 9x^2 - (16y^2 + 8yz + z^2) \\ &= 9x^2 - 16y^2 - 8yz - z^2\end{aligned}$$

AUTOEVALUACIÓN 4.

Hallar el producto de los siguientes problemas por inspección:

- | | |
|------------------------|------------------------------------|
| 1.- $(x + 2y + z)^2$ | 6.- $(a + 2b + c)(a + 2b - c)$ |
| 2.- $(2x - y - 3z)^2$ | 7.- $(2x + 3y + 2z)(2x - 3y - 2z)$ |
| 3.- $(3a + 2b + c)^2$ | 8.- $(3a + 2b + c)(3a - 2b - c)$ |
| 4.- $(x - 2y + 3z)^2$ | 9.- $(3a - 2b + c)(3a - 2b - c)$ |
| 5.- $(2x + 3y - 2z)^2$ | 10.- $(a + 2b - c)(a - 2b + c)$ |

1-7 EL CUADRADO DE UN POLINOMIO.

Podemos utilizar la fórmula 2 y el resultado obtenido en el ejemplo 7 de la sección anterior, para obtener el cuadrado de un polinomio que conste de cuatro términos. Procederemos como se indica a continuación:

EJEMPLO 11.

Hallar el cuadrado de $a + b + c + d$.

Solución:

$$(a + b + c + d)^2 = [(a + b + c) + d]^2$$
$$(a + b + c + d)^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)(d) + (d)^2$$

de acuerdo con el ejemplo 7, en donde:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

entonces, se sigue que:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ac + 2bc + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$$

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

El ejemplo anterior y el ejemplo 7 de la sección anterior hacen patente la siguiente regla para obtener el cuadrado de un polinomio.

"El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada término, incrementada por la suma algebraica del doble producto de cada uno por los que le siguen."

EJEMPLO 12.

Hallar el cuadrado de $2a + 3b - 4c - 2d$.

Solución:

$$(2a + 3b - 4c - 2d)^2 = (2a)^2 + (3b)^2 + (-4c)^2 + (-2d)^2 +$$
$$2(2a)(3b) + 2(2a)(-4c) + 2(2a)(-2d) +$$
$$2(3b)(-4c) + 2(3b)(-2d) + 2(-4c)(-2d)$$
$$(2a + 3b - 4c - 2d)^2 = 4a^2 + 9b^2 + 16c^2 + 4d^2 + 12ab - 16ac$$
$$- 8ad - 24bc - 12bd + 16cd$$

1-8 EL CUBO DE LA SUMA O DIFERENCIA DE UN BINOMIO.

El cubo de la suma de un binomio se expresa $(x + y)^3$, en donde, $(x + y)^3 = (x + y)^2(x + y)$, obtendremos este producto por el procedimiento indicando a continuación donde se hace uso de la fórmula 2 y del axioma distributivo.

$$(x + y)^3 = (x + y)^2(x + y)$$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2 + 2xy + y^2)(x + y) \\
 &= x^2(x + y) + 2xy(x + y) + y^2(x + y) \\
 &= x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + xy^2 + y^3 \\
 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
 \end{aligned}$$

en consecuencia,

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad (5)$$

análogamente,

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \quad (6)$$

Así diremos que el cubo de la suma o diferencia de un binomio es igual al cubo del primero, más o menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo y más o menos el cubo del segundo.

EJEMPLO 13.

Obtener, utilizando la fórmula 5, el cubo de $(a + 2)$ y el de $2x + 3y$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 (a + 2)^3 &= (a)^3 + 3(a)^2(2) + 3(a)(2)^2 + (2)^3 \\
 &= a^3 + 6a^2 + 12a + 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2x + 3y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3 \\
 &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 14.

Obtener, utilizando la fórmula 6, el cubo de $x - 4$ y el de $2a - b$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 (x - 4)^3 &= (x)^3 - 3(x)^2(4) + 3(x)(4)^2 - (4)^3 \\
 &= x^3 - 12x^2 + 48x - 64
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2a - b)^3 &= (2a)^3 - 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2 - (b)^3 \\
 &= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3
 \end{aligned}$$

AUTOEVALUACIÓN 5.

Obtener los siguientes productos por inspección.

1.- $(a + 2b + 3c + d)^2$

2.- $(2w - 3x + 2y - z)^2$

3.- $(a - b - 2c - 3d)^2$

4.- $(x + 2y - 3z + w)^2$

5.- $(a - 3b - 2c + 4d)^2$

6.- $(a + 2b)^3$

7.- $(2a - 3b)^3$

8.- $(x - 3y)^3$

9.- $(3x + 2y)^3$

10.- $(3a - 4b)^3$

1020115302

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 1.

AUTOEVALUACIÓN 1.

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| 1.- $x^2 + 5xy + 6y^2$ | 6.- $6a^2 - 11a + 4$ |
| 2.- $a^2 - 3ab - 28b^2$ | 7.- $4x^2 - 8xy - 5y^2$ |
| 3.- $6r^2 + 7r - 20$ | 8.- $2u^2 + uv - 15v^2$ |
| 4.- $x^2 - 5x - 24$ | 9.- $10a^2 + 7a + 1$ |
| 5.- $x^2 + 6x - 7$ | 10.- $8x^2 - 22xy + 15y^2$ |

AUTOEVALUACIÓN 2.

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| 1.- $a^2 + 4ab + 4b^2$ | 6.- $4a^2 - 12ab + 9b^2$ |
| 2.- $x^2 - 6xy + 9y^2$ | 7.- $9x^2 + 12xy + 4y^2$ |
| 3.- $a^2 + 8ab + 16b^2$ | 8.- $16x^2 - 40x + 25$ |
| 4.- $x^2 - 10xy + 25y^2$ | 9.- $9a^2 + 24ab + 16b^2$ |
| 5.- $x^2 + 12x + 36$ | 10.- $25x^2 - 30xy + 9y^2$ |

AUTOEVALUACIÓN 3.

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 1.- $x^2 - 4$ | 6.- $9x^2 - y^2$ |
| 2.- $4x^2 - 1$ | 7.- $164a^2 - 9b^2$ |
| 3.- $9x^2 - 4$ | 8.- $4x^2 - 49y^2$ |
| 4.- $a^2 - 9b^2$ | 9.- $9a^2 - 49b^2$ |
| 5.- $4x^2 - 25y^2$ | 10.- $4x^2 - 9y^2$ |

AUTOEVALUACIÓN 4.

- | |
|--|
| 1.- $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$ |
| 2.- $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy - 12xz + 6yz$ |
| 3.- $9a^2 + 4b^2 + c^2 + 12ab + 6ac + 4bc$ |
| 4.- $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz$ |
| 5.- $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 12xy - 8xz - 12yz$ |
| 6.- $a^2 + 4ab + 4b^2 - c^2$ |
| 7.- $4x^2 - 9y^2 - 12yz - 4z^2$ |
| 8.- $9a^2 - 12ab + 4b^2 - c^2$ |
| 9.- $9a^2 - 4b^2 - 4bc - c^2$ |
| 10.- $a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2$ |

AUTOEVALUACIÓN 5.

- 1.- $a^2 + 4b^2 + 9c^2 + d^2 + 4ab + 6ac + 2ad + 12bc + 4bd + 6cd$
- 2.- $4w^2 + 9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12wx + 8wy - 4wz - 12xy + 6xz - 4yz$
- 3.- $a^2 + b^2 + 4c^2 + 9d^2 - 2ab - 4ac - 6ad + 4bc + 6bd + 12cd$
- 4.- $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + w^2 + 4xy - 6xz + 2xw - 12yz + 4yw - 6zw$
- 5.- $a^2 + 9b^2 + 4c^2 + 16d^2 - 6ab - 4ac + 8ad + 12bc - 24bd - 16cd$
- 6.- $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$
- 7.- $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
- 8.- $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$
- 9.- $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$
- 10.- $27a^3 - 108a^2b + 144ab^2 - 64b^3$

AUTOEVALUACIÓN 3.

- 1.- $x^2 - 4$
- 2.- $4x^2 - 1$
- 3.- $9x^2 - 4$
- 4.- $a^2 - 9b^2$
- 5.- $4x^2 - 25y^2$
- 6.- $9x^2 - y^2$
- 7.- $164a^2 - 9b^2$
- 8.- $4x^2 - 49y^2$
- 9.- $9a^2 - 49b^2$
- 10.- $4x^2 - 9y^2$

AUTOEVALUACIÓN 4.

- 1.- $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$
- 2.- $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy - 12xz + 6yz$
- 3.- $9a^2 + 4b^2 + c^2 + 12ab + 6ac + 4bc$
- 4.- $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz$
- 5.- $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 12xy - 8xz - 12yz$
- 6.- $a^2 + 4ab + 4b^2 - c^2$
- 7.- $4x^2 - 9y^2 - 12yz - 4z^2$
- 8.- $9a^2 - 12ab + 4b^2 - c^2$
- 9.- $9a^2 - 4b^2 - 4bc - c^2$
- 10.- $a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2$

AUTOEVALUACIÓN 5.

- 1.- $a^2 + 4b^2 + 9c^2 + d^2 + 4ab + 6ac + 2ad + 12bc + 4bd + 6cd$
- 2.- $4w^2 + 9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12wx + 8wy - 4wz - 12xy + 6xz - 4yz$
- 3.- $a^2 + b^2 + 4c^2 + 9d^2 - 2ab - 4ac - 6ad + 4bc + 6bd + 12cd$
- 4.- $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + w^2 + 4xy - 6xz + 2xw - 12yz + 4yw - 6zw$
- 5.- $a^2 + 9b^2 + 4c^2 + 16d^2 - 6ab - 4ac + 8ad + 12bc - 24bd - 16cd$
- 6.- $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$
- 7.- $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
- 8.- $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$
- 9.- $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$
- 10.- $27a^3 - 108a^2b + 144ab^2 - 64b^3$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA

DIRECCIÓN GENERAL

UNIDAD XI

FACTORIZACIÓN

INTRODUCCIÓN.

Con esta unidad comenzamos el estudio de la factorización. Esta operación es lo contrario al producto, esto es, a través de él vamos a ver cómo encontrar los factores en que se descompone. Aprenderás a representar como factores ciertos tipos de expresiones algebraicas.

Al término del estudio de esta unidad, el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS:

1. Definir el concepto de factorización.
2. Descomponer en factores primos un número entero o un monomio.
3. Encontrar el máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más monomios.
4. Aplicar correctamente la propiedad distributiva de la multiplicación para extraer un factor común de un polinomio.
5. Descomponer en factores, expresiones algebraicas que involucren los siguientes casos:

AUTOEVALUACIÓN 5.

- 1.- $a^2 + 4b^2 + 9c^2 + d^2 + 4ab + 6ac + 2ad + 12bc + 4bd + 6cd$
- 2.- $4w^2 + 9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12wx + 8wy - 4wz - 12xy + 6xz - 4yz$
- 3.- $a^2 + b^2 + 4c^2 + 9d^2 - 2ab - 4ac - 6ad + 4bc + 6bd + 12cd$
- 4.- $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + w^2 + 4xy - 6xz + 2xw - 12yz + 4yw - 6zw$
- 5.- $a^2 + 9b^2 + 4c^2 + 16d^2 - 6ab - 4ac + 8ad + 12bc - 24bd - 16cd$
- 6.- $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$
- 7.- $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
- 8.- $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$
- 9.- $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$
- 10.- $27a^3 - 108a^2b + 144ab^2 - 64b^3$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA

DIRECCIÓN GENERAL

UNIDAD XI

FACTORIZACIÓN

INTRODUCCIÓN.

Con esta unidad comenzamos el estudio de la factorización. Esta operación es lo contrario al producto, esto es, a través de él vamos a ver cómo encontrar los factores en que se descompone. Aprenderás a representar como factores ciertos tipos de expresiones algebraicas.

Al término del estudio de esta unidad, el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS:

1. Definir el concepto de factorización.
2. Descomponer en factores primos un número entero o un monomio.
3. Encontrar el máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más monomios.
4. Aplicar correctamente la propiedad distributiva de la multiplicación para extraer un factor común de un polinomio.
5. Descomponer en factores, expresiones algebraicas que involucren los siguientes casos:

- a) Diferencia de cuadrados.
- b) Trinomio cuadrado perfecto.
- c) Polinomio cubo perfecto.
- d) Suma o diferencia de dos cubos.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1. Estudia la lección 1 del capítulo II de tu texto. Para los objetivos 1 y 2, estudia las secciones 1 y 2. Se supone en estos objetivos, que el alumno tiene conocimiento de los números primos y de la forma de cómo descomponer en factores a un número algebraico. Es importante que logres comprender bien el significado de factorización y del uso de los números primos, puesto que en ellos se basa la descomposición de factores de una expresión algebraica. Por esto, te sugerimos que resuelvas la autoevaluación 1.

Objetivo 3. Estudia la sección 3. Para este objetivo es necesario que domines el anterior, puesto que se basa en sacar el m.c.d. de la expresión algebraica para encontrar el factor común; así en el primer ejemplo tenemos que:

$$5a^2bx^4 - 15ab^2x^2 - 20ab^3x^4$$

$$\text{factores primos de } 5a^2bx^4 = 5a^2bx^4$$

$$\text{factores primos de } 15ab^2x^2 = 5 \times 3ab^2x^2$$

$$\text{factores primos de } 20ab^3x^4 = 5 \times 2^2ab^3x^4$$

en donde el m.c.d. = $5abx^2$. Ahora con el m.c.d. como factor común queda:

$$5abx^2(ax^2 - 3b - 4b^2x^2)$$

En caso de que no sea directo sacar factor común por m.c.d. resuélvelo por el método de agrupación primero y luego aplica el m.c.d. para extraer el factor común de la expresión. Aplica estos objetivos resolviendo la autoevaluación 2.

Objetivos 4 y 5. Estudia la sección 4 en adelante. Para resolver satisfactoriamente estos objetivos, es necesario que domines los productos especiales, por lo que te sugerimos los saques en limpio en tu cuaderno para que visualices mejor a qué tipo de factorización pertenece cada expresión que analices. Resuelve como práctica de estos objetivos las autoevaluaciones 3, 4, 5 y 6.

2. Aplica tus conocimientos de esta unidad, resolviendo los problemas de la autoevaluación de la unidad volviendo a estudiar aquellos problemas de factorización que hayas comprendido bien.

3. Como ritmo de trabajo, te sugerimos el siguiente:

1er. día - objetivos 1 y 2.

2do. día - objetivos 3 y 4.

3er. día - objetivo 5.

4to. día - Laboratorio.

4. Como requisito para presentar la unidad, deberás entregar a tu maestro el laboratorio de la unidad, resuelto en el salón, el cuarto día. Te sugerimos que consultes otros libros de matemáticas, donde encontrarás suficientes problemas con relación a los objetivos.

AUTOEVALUACIÓN.

1. Operación que consiste en descomponer una expresión algebraica en dos o más factores cuyo producto es igual a la expresión propuesta.

- | | |
|-------------------|----------------|
| 0) Multiplicación | 1) m.c.m. |
| 2) m.c.d. | 3) Agrupación. |
| 4) Factorización. | |

2. El cuadrado del primer término más o menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término, es lo que se llama:

- | | |
|-------------------|----------------------------|
| 0) Cubo | 1) Cuadrado de un binomio. |
| 2) m.c.d. | 3) Diferencia de cubos. |
| 4) Raíz cuadrada. | |

Encuentra los factores primos de las siguientes expresiones:

3. (225)

- | | |
|-------------------|-----------------|
| 0) 1, 2, 7 | 1) 1, 8, 6, 7 |
| 2) 1, 2, 4 | 3) 1, 0, 11, 17 |
| 4) <u>1, 3, 5</u> | |

4. $45m^5p^3$

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 0) 1, 8, m^2p^3 | 1) <u>1, 3, 5, m, p</u> |
| 2) 1, 8, 7, m^3, p^2 | 3) 1, 6, m^5, p^3 |
| 4) 1, m^5, p^3 | |

Encontrar el m.c.d. de las siguientes expresiones:

5. $12a^3b$; $18ab^2$

- | | |
|--------------|----------------------------|
| 0) $3a^2b^2$ | 1) $5ab^2$ |
| 2) $3a^3b$ | 3) <u>$6ab$</u> |
| 4) a^2b | |

6. $8a^3bc^2$; $12ab^3c^3$; $18b^2c^2$

- | | |
|------------------------------|---------------|
| 0) $3b^3c^2$ | 1) $5ab^2c$ |
| 2) <u>$2bc^2$</u> | 3) $3a^2bc^3$ |
| 4) abc^2 | |

Encuentra un factor común de las siguientes expresiones:

7. $2b^2(x^2 - 9c^2) + 5e^3(x^2 - 9c^2)$

- | | |
|---------------|-------------------------------------|
| 0) $(x - c)$ | 1) <u>$(x^2 - 9c^2)$</u> |
| 2) $(x + 9c)$ | 3) $(x - 9c)$ |
| 4) $(x + c)$ | |

8. $6x^4z^2 - 15x^2z + 21x^2z^3$

- | | |
|------------|------------------------------|
| 0) $5xz^2$ | 1) <u>$3x^2z$</u> |
| 2) xz | 3) $6x^4z^2$ |
| 4) $2xz^3$ | |

Encuentra los factores de las siguientes expresiones

9. $(9a^2 - 4x^2)$

- | | |
|-------------------------|---|
| 0) $(9a - 4x)^2$ | 1) $(3a - 2x)^2$ |
| 2) $(3a + 2x)^2$ | 3) <u>$(3a + 2x)(3a - 2x)$</u> |
| 4) $(9a + 4x)(9a - 4x)$ | |

10. $(a^2x^2 - 25y^2)$

0) $(a + 5y)^2$

2) $(ax + 5y)^3$

4) $(ax + 5)(ax - y^2)$

1) $(2x - 5y)^2$

3) $(ax + 5y)(ax - 5y)$

11. $(4a^2 - 16a + 16)$

0) $(2a + 16)^2$

2) $(2a - 8)^2$

4) $(a - 4)^2$

1) $(2a^2 - 4)^2$

3) $(2a - 4)^2$

12. $(4a^2x^2 + 12ax + 9)$

0) $(2ax + 3)^2$

2) $(ax + 3)^2$

4) $(4ax + 9)^2$

1) $(2a - 3)^2$

3) $(2ac + 3)(2ax - 3)$

13. $(a^3x^3 + 3a^2x^2 + 3ax + 1)$

0) $(ax - 1)^2$

2) $(ax + 1)^3$

4) $(a^3x^3 + 1)^2$

1) $(ax + 1)(ax - 1)$

3) $(ax - 1)^3$

14. $(b^3 + 27)$

0) $(b + 3)(b^2 - 3b + 9)$

2) $(b - 3)(b + 3)$

4) $(b - 27)^2$

1) $(b + 3)$

3) $(b - 3)(b^2 + 3b + 9)$

15. $(1 - 8a^3)$

0) $(1 - 2a)(1 + 2a + 4a^2)$

2) $(a + 2a)(a - 2 + 4a^2)$

4) $(a + 2a)(1 - 2a)$

1) $(a - 2)(1 + 2a + 4a^2)$

3) $(a - 2a)$

FACTORIZACIÓN.

LECCIÓN 1.

2-1 DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES.

Dados dos o más factores, se obtiene su producto, multiplicando el uno por otros. Inversamente, dado un producto, se pueden obtener sus factores; a esta operación se le llama, **descomposición en factores**. En general, descomponer una expresión algebraica en factores, es hallar dos o más factores, cuyo producto es igual a la expresión propuesta.

Para descomponer en factores, un número o una expresión algebraica, se buscan todos los factores primos contenidos en dicho número o expresión. Los números primos solo son divisibles entre sí mismo y entre la unidad. Dos o más expresiones algebraicas, son primas entre sí, si solo admiten la unidad como divisor común.

Eratóstenes, matemático griego del siglo III A.C. ideó un procedimiento para obtener los números primos en la serie de los números naturales que se conoce con el nombre de "Criba de Eratóstenes". Básicamente consiste en ir eliminando todos aquellos números que admiten alguna divisibilidad en forma sistemática, acomodando los números como se ve a continuación.

Sea obtener los números primos de los primeros 100 números de la serie de los números naturales.

10. $(a^2x^2 - 25y^2)$

0) $(a + 5y)^2$

2) $(ax + 5y)^3$

4) $(ax + 5)(ax - y^2)$

1) $(2x - 5y)^2$

3) $(ax + 5y)(ax - 5y)$

11. $(4a^2 - 16a + 16)$

0) $(2a + 16)^2$

2) $(2a - 8)^2$

4) $(a - 4)^2$

1) $(2a^2 - 4)^2$

3) $(2a - 4)^2$

12. $(4a^2x^2 + 12ax + 9)$

0) $(2ax + 3)^2$

2) $(ax + 3)^2$

4) $(4ax + 9)^2$

1) $(2a - 3)^2$

3) $(2ac + 3)(2ax - 3)$

13. $(a^3x^3 + 3a^2x^2 + 3ax + 1)$

0) $(ax - 1)^2$

2) $(ax + 1)^3$

4) $(a^3x^3 + 1)^2$

1) $(ax + 1)(ax - 1)$

3) $(ax - 1)^3$

14. $(b^3 + 27)$

0) $(b + 3)(b^2 - 3b + 9)$

2) $(b - 3)(b + 3)$

4) $(b - 27)^2$

1) $(b + 3)$

3) $(b - 3)(b^2 + 3b + 9)$

15. $(1 - 8a^3)$

0) $(1 - 2a)(1 + 2a + 4a^2)$

2) $(a + 2a)(a - 2 + 4a^2)$

4) $(a + 2a)(1 - 2a)$

1) $(a - 2)(1 + 2a + 4a^2)$

3) $(a - 2a)$

FACTORIZACIÓN.

LECCIÓN 1.

2-1 DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES.

Dados dos o más factores, se obtiene su producto, multiplicando el uno por otros. Inversamente, dado un producto, se pueden obtener sus factores; a esta operación se le llama, **descomposición en factores**. En general, descomponer una expresión algebraica en factores, es hallar dos o más factores, cuyo producto es igual a la expresión propuesta.

Para descomponer en factores, un número o una expresión algebraica, se buscan todos los factores primos contenidos en dicho número o expresión. Los números primos solo son divisibles entre sí mismo y entre la unidad. Dos o más expresiones algebraicas, son primas entre sí, si solo admiten la unidad como divisor común.

Eratóstenes, matemático griego del siglo III A.C. ideó un procedimiento para obtener los números primos en la serie de los números naturales que se conoce con el nombre de "Criba de Eratóstenes". Básicamente consiste en ir eliminando todos aquellos números que admiten alguna divisibilidad en forma sistemática, acomodando los números como se ve a continuación.

Sea obtener los números primos de los primeros 100 números de la serie de los números naturales.

PROCEDIMIENTO.

- 1) Se suprimen los múltiplos de 2, excepto 2.
- 2) Se suprimen los múltiplos de 3, excepto 3.
- 3) Se suprimen los múltiplos de 5, excepto 5.
- 4) Se suprimen los múltiplos de 7, excepto 7.

Los números restantes son primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Los números primos obtenidos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

En consecuencia, hay 26 números primos en los 100 primeros números de la serie de números naturales (que únicamente son divisibles entre la unidad y entre sí mismos).

Algunos ejemplos de expresiones algebraicas primas entre sí (solo admiten la unidad como divisor común) son:

- 1) $(a + b)$ y $(a - b)$
- 2) $(3a + 5)$ y $(2b - 4)$
- 3) $(x^2 + x + 1)$ y $(x^2 + 1)$

2-2 FACTORES PRIMOS.

Tomando ahora como base cada uno de los números primos anteriores, sin tomar en cuenta el número 1, todo número puede ser descompuesto en sus factores primos.

Los factores primos de un número son aquellos que pueden servir como divisor exacto al número propuesto. Para encontrarlos se va dividiendo en forma progresiva únicamente entre los números primos con los que se pueden hacer división exacta, sin importar que alguno o varios de ellos se repitan dos o más veces hasta lograr que el número indicado se reduzca a la unidad.

Lo usual es colocar una línea vertical a la derecha del número. A la derecha de dicha línea se van colocando los divisores primos y a la izquierda los dividendos resultantes en la forma siguiente:

EJEMPLOS:

Encontrar los factores primos de 120:

120	2	
60	2	$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = (2)^3 \times 3 \times 5$
30	2	
15	3	Los factores primos de 120 son; 2, 3, y 5.
5	5	
1		

Encontrar los factores primos de 276:

276		2	
138		2	$276 = 2 \times 2 \times 3 \times 23 = (2)^2 \times 3 \times 23$
69		3	
23		23	Los factores primos de 276 son; 2, 3 y 23.
1			

Encontrar los factores primos de $8a^3b^2$:

$8a^3b^2$		2	
$4a^3b^2$		2	La expresión, $8a^3b^2 = (2)(2)(2)(a)(a)(a)$
$2a^3b^2$		2	(b)(b)
a^3b^2		a	$= (2)^3(a)^3(b)^2$
a^2b^2		a	Los factores primos de $8a^3b^2$ son; 2, a y b
ab^2		a	
b^2		b	
b		b	
1			

AUTOEVALUACIÓN 1.

Encuentra los factores primos de los siguientes números:

- | | | | |
|-----------|-------------|------------------|-----------------------|
| 1.- 360 | 6.- 32 | 11.- $8xy^4$ | 16.- $15ab^2$ |
| 2.- 690 | 7.- 100 | 12.- $17x^2y^2$ | 17.- $97z^5$ |
| 3.- 342 | 8.- 125 | 13.- $100x^6$ | 18.- $121a^2b^2c^2$ |
| 4.- 13310 | 9.- 178 | 14.- $24a^2$ | 19.- $10x$ |
| 5.- 227 | 10.- $4x^2$ | 15.- $96a^3bc^2$ | 20.- $25x^{10}z^{20}$ |

2-3 MÁXIMO COMÚN DIVISOR:

Teniendo varios números propuestos, por ejemplo, 10, 20, 30, 40, se observa que todos ellos pueden ser divididos por un mismo número, en este caso pueden dividirlos el 2, 5, y 10. Por ello, se dice que tienen un divisor común; pero si a la vez se trata del número más grande posible, que sea divisor de todos, entonces tendremos el máximo común divisor, que en el ejemplo es 10.

Porque:

divisores de 10 : 2, 5, 10

divisores de 20 : 2, 4, 5, 10, y 20

divisores de 30 : 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30

divisores de 40 : 2, 4, 5, 8, 10, 20 y 40

De todos los divisores distintos a la unidad, los comunes son: 2, 5, y 10.

De 2, 5 y 10 el máximo es 10.

Por lo tanto m. c. d. de 10, 20, 30 y 40 = 10

EJEMPLO:

En los números 8, 12 y 16, todos ellos pueden ser divididos entre 2 y 4; pero el mayor divisor común es el 4.

Porque:

divisores de 8 : 2, 4 y 8

divisores de 12 : 2, 3, 4, 6, y 12

divisores de 16 : 2, 4, 8 y 16

de todos los divisores diferentes a la unidad, los comunes son: 2 y 4

De 2 y 4 el mayor es 4.

Por lo tanto, m. c. d. de 8, 12 y 16 = 4

Para obtener mentalmente el m. c. d. de varios números sencillos se ensaya si el menor de todos ellos está contenido exactamente en los otros; si esto ocurre, él será el m. c. d. En caso contrario se prueba con la mitad del menor, la tercera parte, la cuarta parte..., hasta obtener una parte de dicho número que éste exactamente contenida en los restantes. El número así obtenido es el m. c. d. de los números dados.

EJEMPLOS:

Obtener mentalmente el m. c. d. de 18, 24 y 8:

8 no está contenido exactamente en 18, pero sí en 24.

4 (la mitad) está exactamente contenido en 24, pero no en 18.

La tercera parte de 8 no es entera, por lo tanto no se tiene en cuenta.

2 (La cuarta parte) está contenido exactamente en 18, 24 y, por supuesto en 8.

El m. c. d. de 18, 24 y 8 es 2.

Obtener mentalmente el m. c. d. de 10 y 12:

10 no está contenido exactamente en 12.

5 (su mitad) tampoco está contenido.

La tercera y cuarta parte de 10 no son enteras, por lo tanto no se tienen en cuenta.

2 (la quinta parte) está contenida exactamente en 12 y por supuesto en 10. En consecuencia:

El m. c. d. de 10 y 12 es 2.

2-4 CÁLCULO DEL m. c. d. POR FACTORES PRIMOS.

Se buscan los factores primos de cada número y se escriben en la forma indicada para poder escoger los factores comunes de menor exponente. El producto de dichos factores es el m. c. d.

EJEMPLOS:

Calcular el m. c. d. de los números 10, 20, 30 y 40:

10		2	20		2	30		2	40		2
5		5	10		2	15		5	20		2
1			5		5	5		5	10		2
1			1			1		5	5		5

$10 = 2 \times 5$

$$20 = (2)^2 \times 5$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$40 = (2)^3 \times 5$$

Por lo tanto:

Los factores comunes de menor exponente son 2 y 5 su m. c. d. = $2 \times 5 = 10$.

Calcular el m. c. d. de los números 8, 12 y 16:

8	2	12	2	16	2
4	2	6	2	8	2
2	2	3	3	4	2
1		1		2	2
				1	

$$8 = (2)^3$$

$$12 = (2)^2 \times 3$$

$$16 = (2)^4$$

El factor común de menor exponente es $(2)^2$

Su máximo común divisor = $(2)^2 = 4$

Calcular el m. c. d. de: $15a^2b^3c$; $24ab^2x$; $36b^4x^2$ descomponiendo en factores primos, tenemos:

$15a^2b^3c$	3	$24ab^2x$	2	$36b^4x^2$	2
$5a^2b^3c$	5	$12ab^2x$	2	$18b^2x^2$	2
a^2b^3c	a	$6ab^2x$	2	$9b^2x^2$	3
ab^3c	a	$3ab^2x$	3	$3b^2x^2$	3
b^3c	b	ab^2x	a	b^2x^2	b
b^2c	b	b^2x	b	bx^2	b
bc	b	bx	b	x^2	x
c	c	x	x	x	x
1		1		1	

$$15a^2b^3c = (3)(5)a^2b^3c$$

$$24ab^2x = (2)^3(3)ab^2x$$

$$36b^4x^2 = (2)^2(3)^2b^2x^2$$

(3) es el factor común en los tres monomios de menor exponente.

b^2 es la literal en los tres monomios de menor exponente.

Por tanto, el m. c. d. de los tres monomios es = $3b^2$.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Calcular mentalmente el m. c. d. de los siguientes grupos de números:

- 30 y 40
- 12, 8 y 20
- 6, 8, 16 y 20
- 18, 27, 36 y 45
- 56, 64, 48, 40

Calcular mediante la descomposición en factores el m. c. d. de los siguientes grupos de números:

- 45, 30 y 60
- 175, 245 y 315
- 81, 54 y 189

Hallar el m. c. d. de:

$$9. 2x^2y, x^2y^3$$

$$10. 8am^3 n, 20x^2 m^2$$

$$11. 18mn^2, 27a^2 m^3 n^4$$

$$12. 15a^2 b^3 c, 24ab^2 x, 36b^4 x^2$$

$$13. 12x^2 yz^3, 18xy^2 z, 24x^3 yz^2$$

$$14. 4a^2 b, 8a^3 b^2, 2a^2 bc, 10ab^3 c^2$$

2-5 LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA COMO HERRAMIENTA PARA LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS.

Aplicar la propiedad distributiva en la factorización de polinomios dados.

Hasta ahora hemos utilizado la propiedad distributiva solo para transformar productos en sumas, es decir:

$$a(b + c) = ab + ac$$

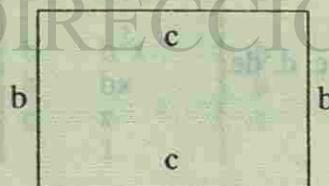
Pero nos falta analizar el otro sentido, que es el de transformar sumas en productos, como indicamos a continuación:

$$ab + ac = a(b + c)$$

en este caso decimos que hemos expresado la suma $ab + ac$ como el producto de los factores a y $(b + c)$

EJEMPLOS:

Si tenemos el rectángulo



decimos que su perímetro es $2b + 2c$, o también $2(b + c)$ ya que por la propiedad distributiva:

$$2b + 2c = 2(b + c)$$

lo cual puede deducirse inmediatamente de la fórmula,

$$ab + ac = a(b + c), \text{ haciendo } a = 2.$$

Si tenemos la expresión, $2x^2y + 3x^2z$, podemos expresarla como $x^2y + x^2z$ y entonces escribir,

$$2x^2y + 3x^2z = x^2(2y + 3z)$$

Si comparamos la expresión, $(x + 2)y + (x + 2)4$ con la expresión $ab + ac$, vemos que:

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$(x + 2)y + (x + 2)4 = (x + 2)(y + 4)$$

Poner en factor común, $3a$ en la expresión, $3a^2 - 6ab$

$$3a^2 - 6ab = 3a \cdot a - 3a \cdot 2b = 3a(a - 2b)$$

Poner en factor común, $5abx^3$ en la expresión:

$$5a^2 bx^4 - 15ab^2 x^3 - 20ab^3 x^4 \\ = 5abx^3(ax - 3b - 4b^2 x)$$

En la práctica se elige como factor común un monomio tal que facilite operaciones subsecuentes, como se verá más tarde en la simplificación de fracciones. Para ello, conviene generalmente elegir el m. c. d. de los términos del polinomio.

El obtener un factor común, implica la aplicación de, la propiedad distributiva y de la propiedad simétrica de la igualdad. Así, por ejemplo, si:

$$a(x + y) = ax + ay$$

Propiedad distributiva.

$$ax + ay = a(x + y) \quad \text{Propiedad simétrica de la igualdad.}$$

Hay veces que en un polinomio cuyos términos no contienen ningún factor común pueden ser separados en grupos de términos con factor común. Algunos polinomios que no están en la forma de diferencia de dos cuadrados pueden ser expresados así mediante un agrupamiento adecuado de los términos.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} 3x + 3y + ax + ay &= (3x + 3y) + (ax + ay) \\ &= 3(x + y) + a(x + y) \\ &= (x + y)(3 + a) \end{aligned}$$

Las propiedades asociativa y conmutativa para la adición junto con la propiedad distributiva, permiten factorizar un polinomio por agrupación. En el último paso, $(x + y)$, se maneja un solo término al aplicar la propiedad distributiva.

Otro polinomio que se puede factorizar rápidamente cuando se agrupan los términos en forma apropiada es el siguiente:

$$\begin{aligned} 2ab - 15cd - 10ad + 3bc &= (2ab - 10ad) + (3bc - 15cd) \\ &= 2a(b - 5d) + 3c(b - 5d) \\ &= (2a + 3c)(b - 5d) \end{aligned}$$

Naturalmente que puede haber más de una forma conveniente de agrupar términos.

$$\begin{aligned} 2ab - 15cd - 10ad + 3bc &= (2ab + 3bc) + (-15cd - 10ad) \\ &= b(2a + 3c) + (-5d)(3c + 2a) \\ &= b(2a + 3c) + (-5d)(2a + 3c) \\ &= (b - 5d)(2a + 3c) \end{aligned}$$

Como la multiplicación es conmutativa, este resultado es el mismo que el precedente.

AUTOEVALUACIÓN 3.

Descomponer las expresiones siguientes en dos factores:

1. $b + b^2$
2. $x^3 - 4x^4$
3. $15c^3d^2 + 60c^2d^3$
4. $24a^2xy^2 - 36x^2y^4$
5. $4x^2 - 8x + 2$
6. $x^3 + x^5 - x^7$
7. $34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$
8. $55m^2n^3x + 110m^2n^3x^2 - 220m^2y^3$
9. $x - x^2 + x^3 - x^4$
10. $a^6 - 3a^4 + 8a^3 - 4a^2$
11. $2x^2 + 4$
12. $x^2 - x^4$
13. $a + ab$
14. $6b^3 + 4b^2 - 2b$
15. $16a^4 - 8$

Factorizar por el método de agrupamiento:

16. $am - bm + an - bn$
17. $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$
18. $x^2 - a^2 + x - a^2x$
19. $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$
20. $6ax + 3a + 1 + 2x$

$$21. 3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$$

$$22. 2x^2y + 2xz^2 + y^2z^2 + xy^3$$

$$23. 1 + a + 3ab + 3b$$

$$24. 20ax - 5bx - 2by + 8ay$$

$$25. a^3 + a^2 + a + 1$$

$$26. 2x + 2y + bx + by$$

$$27. ax + ay + 4x + 4y$$

$$28. ax - ay + 2cx - 2cy$$

$$29. 4x + 12 + xy + 3y$$

$$30. mn + m + n + 1$$

2-6 FACTORIZACIÓN DE UNA DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS.

Algunos monomios, se descomponen en dos factores iguales, por ejemplo:

$$49 = (7)(7)$$

$$4a^2 = (2a)(2a)$$

$$100a^6 = (10a^3)(10a^3)$$

Un número o monomio que se descompone en dos factores iguales, es cuadrado perfecto. Cada uno de los factores de la descomposición de un cuadrado perfecto, es la raíz cuadrada del número o del monomio.

144 se descompone en, 12×12

La raíz cuadrada de 144 es, 12

$25a^4$, se descompone en, $(5a^2)(5a^2)$

La raíz cuadrada de $25a^4$ es, $5a^2$

Cada uno de dos factores iguales en que se descompone un número, es la raíz cuadrada de dicho número. Toda raíz cuadrada, tiene doble signo.

La raíz cuadrada se denota con el símbolo $\sqrt{\quad}$ el radical.

Para extraer la raíz cuadrada de un monomio cuadrado perfecto se extrae la raíz al coeficiente y se divide entre dos el exponente de cada una de las literales

EJEMPLO:

$$\sqrt{25a^4b^2} = 5(a)^{4/2}(b)^{2/2} = \pm 5a^2b$$

$$\sqrt{169a^2b^4c^6} = 13(a)^{2/2}(b)^{4/2}(c)^{6/2} = \pm 13ab^2c^3$$

Dos binomios que tienen idénticos el primer término y el segundo término solo difiere en el signo, se llaman binomios conjugados.

EJEMPLO:

$a + b$ y $a - b$ son binomios conjugados.

$3a + 5$ y $3a - 5$ son binomios conjugados.

Al calcular el producto de dos binomios conjugados, encontramos que era una diferencia de cuadrados como se observa enseguida:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$$

$$(2a - 5)(2a + 5) = 4a^2 - 25$$

esto quiere decir que cada vez que tengamos una diferencia de cuadrados es posible factorizarla, expresándola como un producto de dos binomios conjugados como en los siguientes ejemplos:

$$1) x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$2) 25 - 16 = (5 + 4)(5 - 4)$$

$$3) a^2 - 36 = (a + 6)(a - 6)$$

$$4) 49x^2 - 9y^2 = (7x + 3y)(7x - 3y)$$

Para encontrar los binomios conjugados en los ejemplos anteriores, lo que hicimos fué encontrar la raíz cuadrada tanto del minuendo como del sustraendo en la diferencia de cuadrados que teníamos, pero como la raíz cuadrada puede ser positiva o negativa, entonces es posible factorizar una diferencia de cuadrados en más de una forma, como veremos a continuación:

$$\text{En el ejemplo 2), } \sqrt{25} = 5 \text{ y } \sqrt{25} = -5,$$

también $\sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{16} = -4$, por lo que si sustituimos estos valores en la fórmula, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ tendríamos:

$$\begin{aligned} \text{a) } 25 - 16 &= (5)^2 - (4)^2 = (5 + 4)(5 - 4) = (9)(1) \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 25 - 16 &= (-5)^2 - (-4)^2 = [-5 + (-4)][-5 - (-4)] \\ &= (-9)(-1) = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 25 - 16 &= (5)^2 - (-4)^2 = [5 + (-4)][5 - (-4)] \\ &= (1)(9) = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 25 - 16 &= (-5)^2 - (4)^2 = (-5 + 4)(-5 - 4) \\ &= (-1)(-9) = 9 \end{aligned}$$

En el ejemplo 4), $\sqrt{49x^2} = 7x$; $\sqrt{49x^2} = -7x$, y también

$\sqrt{9y^2} = 3y$ $\sqrt{9y^2} = -3y$ de modo concluimos que, $49x^2 - 9y^2$ puede factorizarse como:

$$\text{a) } 49x^2 - 9y^2 = (7x)^2 - (3y)^2 = (7x + 3y)(7x - 3y)$$

$$\text{b) } 49x^2 - 9y^2 = (-7x)^2 - (-3y)^2 = (-7x - 3y)(-7x + 3y)$$

$$\text{c) } 49x^2 - 9y^2 = (7x)^2 - (-3y)^2 = (7x - 3y)(7x + 3y)$$

$$\text{d) } 49x^2 - 9y^2 = (-7x)^2 - (3y)^2 = (-7x + 3y)(-7x - 3y)$$

En ambos casos, observamos que los resultados a) y c) corresponden a los mismos factores, solo que en otro orden, y también ocurre lo mismo con los resultados b) y d).

Para factorizar una diferencia de cuadrados de la forma $x^2 - y^2$, escribimos el producto de dos binomios conjugados de la forma $(x + y)(x - y)$, donde el término común x es una raíz cuadrada del minuendo y los términos simétricos (y) y $(-y)$ son las raíces cuadradas del sustraendo, es decir:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

AUTOEVALUACIÓN 4.

Encuentra los factores de las siguientes diferencias de cuadrados:

$$1) a^4 - 49$$

$$6) 4x^6y^4 - x^2y^2$$

$$2) 36x^2 - 25y^6$$

$$7) -25x^2 + 36y^4$$

$$3) 64a^2b^4 - 121x^2$$

$$8) (3a + 2b)^2 - (3a - 2b)^2$$

$$4) 144x^2y^6 - 169x^2$$

$$9) 100 - (x + 3)^2$$

$$5) 81 - 9x^{10}$$

$$10) -49x^2y^6 + (7xy^3 + 3)^2$$

2-7 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS CUADRADOS PERFECTOS.

En unidades anteriores establecimos que el resultado de elevar al cuadrado un binomio de la forma $(x + y)$ o de la forma $(x - y)$ era un trinomio cuadrado perfecto, es decir:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Esto significa que si tenemos un trinomio cuadrado perfecto, podemos expresarlo como el cuadrado de un binomio, es decir:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Para ello, debemos estar seguros de que el trinomio que tenemos es realmente un trinomio cuadrado perfecto, por lo que procederemos como en los siguientes ejemplos:

Si queremos factorizar el trinomio $4a^2 + 20ab + 25b^2$ observamos que:

$$4a^2 \text{ es el cuadrado de } 2a.$$

$$25b^2 \text{ es el cuadrado de } 5b.$$

$$20ab \text{ es el doble producto de } 2a \text{ y } 5b.$$

es decir,

$$20ab = 2(2a)(5b)$$

de donde concluimos que $4a^2 + 20ab + 25b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto de la forma,

$$x^2 + 2xy + y^2$$

donde,

$$\begin{aligned} x &= 2a \\ y &= 5b \end{aligned}$$

como, $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$
entonces, $(2a)^2 + 2(2a)(5b) + (5b)^2 = (2a + 5b)^2$

Si queremos factorizar el trinomio, $x^2 + 8x + 16$, observamos que:

$$x^2 \text{ es el cuadrado de } x.$$

$$16 \text{ es el cuadrado de } 4.$$

$$8x \text{ es el doble producto de } x \text{ y de } 4.$$

$$8x = 2(x)(4)$$

ya que,

$$\text{de donde, } x^2 + 8x + 16 = (x)^2 + 2(x)(4) + (4)^2$$

Por lo que podemos escribir:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

Si queremos factorizar el trinomio,

$$z^2 - 10z + 25$$

Observamos:

$$z^2 \text{ es el cuadrado de } z$$

$$25 \text{ es el cuadrado de } 5$$

$$10z \text{ es el doble producto de } z \text{ y de } 5 \text{ ya que,}$$

$$10z = 2(z)(5)$$

donde, $z^2 - 10z + 25 = (z)^2 - 2(z)(5) + (5)^2$, lo cual es de la forma, $x^2 - 2xy + y^2$ con $x = z$ y $y = 5$ y como

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

entonces, $(z)^2 - 2(z)(5) + (5)^2 = (z - 5)^2$

En el trinomio, $36x^2 + 42xy + 16y^2$, observamos:

$$36x^2 \text{ es el cuadrado de } 6x.$$

2-7 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS CUADRADOS PERFECTOS

$16y^2$ es el cuadrado de $4y$.

$42xy$ no es el doble producto de $6x$ y de $4y$.

ya que, $42xy \neq 2(6x) \cdot (4y) = 48xy$.

Por lo que el trinomio, $36x^2 + 42xy + 16y^2$ no es un trinomio cuadrado perfecto.

AUTOEVALUACIÓN 5.

¿Cuáles de los siguientes trinomios son trinomios cuadrados perfectos?

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| 1) $x^2 + 6x + 9$ | 6) $25x^2 + 20x + 4$ |
| 2) $y^2 + 6y + 6$ | 7) $9x^2 - 48x + 64$ |
| 3) $y^2 + 9y + 6$ | 8) $100a^2 + 30a + 9$ |
| 4) $a^2 - 14a + 49$ | 9) $49x^2 + 24x - 1$ |
| 5) $h^2 + 4h - 4$ | 10) $4y^2 - 12y - 9$ |

Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

- 11) $a^2 + 2ac + c^2$
- 12) $4x^2 + 24xy + 36y^2$
- 13) $x^2 + y^4 - 2xy^2$
- 14) $9x^2y^2 + 16 + 24xy$
- 15) $28xy^3 + 49y^6 + 4x^2$
- 16) $100a^4b^2 + 100a^3b^3 + 25a^2b^4$
- 17) $16a^2x^2 + 64a^6x^6 + 64a^4x^4$

18) $49a^4b^6 - 42a^4b^4 + 9a^4b^2$

19) $\frac{4x^2}{9} - 2xy + \frac{9y^2}{4}$

20) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^4}{9} - \frac{2xy^2}{15}$

2-8 FACTORIZACIÓN DE UNA EXPRESIÓN QUE ES EL CUBO DE UN BINOMIO.

En los productos notables se vió que:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Por lo anterior se deduce que para que un polinomio ordenado con respecto a una letra sea el cubo de un binomio deberá cumplir con lo siguiente:

- 1) Tener cuatro términos
- 2) El primero y último términos deberán ser cubos perfectos.
- 3) El segundo término deberá ser + ó - el triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término multiplicado por la raíz cúbica del último término.
- 4) El tercer término deberá ser el triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último.

Si todos los términos del polinomio son positivos la expresión dada es el cubo de la suma de las raíces cúbicas del primero y último término y si los términos son alternadamente positivos y negativos la expresión dada es el cubo de la diferencia de dichas raíces.

EJEMPLOS:

Encontrar si la siguiente expresión es el cubo de un binomio:

$$125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3$$

Primero vemos si cumple con las condiciones anteriores:

1) Sí tiene cuatro términos.

2) La raíz cúbica de $125a^3 = 5a$

$$\text{La raíz cúbica de } 8b^3 = 2b$$

3) $(3)(5a)^2(2b) = 150a^2b$ (segundo término)

4) $(3)(5a)(2b)^2 = 60ab^2$ (tercer término)

Por tanto, si cumple las condiciones y como todos sus términos son positivos la expresión dada es el cubo de $(5a + 2b)$ o de otra manera, $(5a + 2b)$, es la raíz cúbica del polinomio dado.

Encontrar si la siguiente expresión es el cubo de un binomio:

$$54ab^2 - 27b^3 + 8a^3 - 36a^2b$$

ordenando la expresión se tiene:

$$8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$$

1) Tiene cuatro términos.

2) La raíz cúbica de $8a^3 = 2a$

$$\text{La raíz cúbica de } 27b^3 = 3b$$

3) $(3)(2a)^2(3b) = 36a^2b$ (segundo término)

4) $(3)(2a)(3b)^2 = 54ab^2$ (tercer término)

y como los términos son alternadamente + y -, la expresión dada es el cubo de $2a - 3b$.

AUTOEVALUACION 6:

Factorizar las expresiones siguientes ordenándolas previamente:

1. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

2. $27 - 27x + 9x^2 - x^3$

3. $8 + 12a^2 + 6a^4 + a^6$

4. $27m^3 + 108m^2n + 144mn^2 + 64n^3$

5. $125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3$

6. $8 + 36x + 54x^2 + 27x^3$

7. $a^6 + 3a^4b^3 + 3a^2b^6 + b^9$

8. $64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$

9. $m^3 - 3am^2n + 3a^2mn^2 - a^3n^3$

10. $64x^9 - 125y^{12} - 240x^6y^4 + 300x^3y^8$

2-9 FACTORIZACIÓN DE LA SUMA O DIFERENCIA DE DOS CUBOS.

Es fácil comprobar mediante multiplicación directa que,

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \text{ y que } (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= a^3 - b^3$$

Este es un resultado importante porque garantiza que invirtiendo las fórmulas podemos siempre factorizar la suma de dos cubos; así como la diferencia de dos cubos.

EJEMPLOS:

Factorizar completamente, $x^3 - 27$

Primero observamos que 27 es el cubo de 3 de modo que lo que tenemos es la diferencia entre dos cubos. Podemos escribir $x^3 - 27 = x^3 - (3)^3$, aunque esto debe de hacerse mentalmente. Ahora, aplicamos a la inversa la segunda fórmula de arriba:

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ y pensamos en x y 3 en lugar de en a y b :

$$\begin{aligned}x^3 - (3)^3 &= (x - 3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2) \\ &= (x - 3)(x^2 + 3x + 9)\end{aligned}$$

Factorizar completamente, $8y^3 + 1$

Esto se puede factorizar como la suma de dos cubos:

$$\begin{aligned}8y^3 + 1 &= (2y)^3 + (1)^3 \text{ (mentalmente)} \\ &= (2y + 1)[(2y)^2 - (2y)1 + 1^2] \\ &= (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1)\end{aligned}$$

Notamos que podemos establecer el proceso mental para encontrar el segundo factor, elevamos al cuadrado su primer término, multiplicamos sus dos términos y cambiamos el signo, y finalmente elevamos al cuadrado el segundo término.

En los dos ejemplos anteriores, el segundo factor del resultado no es de nuevo factorizable.

AUTOEVALUACIÓN 7.

Desarrollar:

1) $1 + a^3$

2) $8x^3 + y^3$

3) $27a^3 - b^3$

4) $1 - 216m^3$

5) $8x^3 - 27y^3$

6) $512 + 27a^9$

7) $x^6 - 8y^{12}$

8) $27m^3 + 64n^9$

9) $a^3 + 8b^{12}$

10) $8x^9 - 125y^3z^6$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 1.

AUTOEVALUACIÓN 1.

- | | |
|----------------------|--------------------|
| 1.- 2, 3, 5 | 11.- 2,3, x, y |
| 2.- 2, 3, 5, 13 | 12.- 17, x, y |
| 3.- 2, 3, 19 | 13.- 2, 5, x |
| 4.- 2, 5, 11 | 14.- 2, 3, a |
| 5.- Es número primo. | 15.- 2, 3, a, b, c |
| 6.- 2, 3 | 16.- 3, 5, a, b |
| 7.- 2, 5 | 17.- 97, z |
| 8.- 5 | 18.- 11, a, b, c |
| 9.- 2, 89 | 19.- 2, 5, x |
| 10.- 2, x | 20.- 5, x, z |

AUTOEVALUACIÓN 2.

- | | |
|--------|--------|
| 1.- 10 | 4.- 9 |
| 2.- 8 | 5.- 8 |
| 3.- 2 | 6.- 15 |

7.- 35

8.- 27

9.- x^2y

10.- $4m^2$

11.- $9mn^2$

12.- 3b

13.- 6xyz

14.- 2ab

AUTOEVALUACION 3.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1) $b(1 + b)$ | 16) $(m + n)(a - b)$ |
| 2) $x^3(1 - 4x)$ | 17) $(x^2 + y^2)(a^2 - 3b)$ |
| 3) $15c^2d^2(c + 4d)$ | 18) $(x + 1)(x - a^2)$ |
| 4) $12xy^2(2a^2 - 3xy^2)$ | 19) $(x^2 + y^2)(3ab - 2)$ |
| 5) $2(2x^2 - 4x + 1)$ | 20) $(2x + 1)(3a + 1)$ |
| 6) $x^3(1 + x^2 - x^4)$ | 21) $(3x^2 - 1)(x - 3a)$ |
| 7) $17a(2x^2 + 3ay - 4y^2)$ | 22) $(xy + z^2)(2x + y^2)$ |
| 8) $55m^2(n^3x + 2n^3x^2 - 4y^3)$ | 23) $(a + 1)(3b + 1)$ |
| 9) $x(1 - x + x^2 - x^3)$ | 24) $(4a - b)(5x + 2y)$ |
| 10) $a^2(a^4 - 3a^2 + 8a - 4)$ | 25) $(a + 1)(a + 1)$ |
| 11) $2(x^2 + 2)$ | 26) $(x + y)(2 + b)$ |
| 12) $x^2(1 - x^2)$ | 27) $(a + 4)(x + y)$ |
| 13) $a(1 + b)$ | 28) $(x - y)(a + 2c)$ |
| 14) $2b(3b^2 + 2b - 1)$ | 29) $(4 + y)(x + 3)$ |
| 15) $8(2a^4 - 1)$ | 30) $(m + 1)(n + 1)$ |

AUTOEVALUACIÓN 4.

- $(a^2 + 7)(a^2 - 7)$
- $(6x + 5y^3)(6x - 5y^3)$
- $(8ab^2 + 11x)(8ab^2 - 11x)$
- $(12xy^3 + 13x)(12xy^3 - 13x)$
- $(9 + 3x^5)(9 - 3x^5)$
- $(2x^3y^2 + xy)(2x^3y^2 - xy)$
- $(6y^2 + 5x)(6y^2 - 5x)$
- $(6a)(4b)$
- $(13 + x)(7 - x)$
- $(14xy^3 + 3)(3)$

AUTOEVALUACIÓN 5.

- | | | |
|-------|-------|--------|
| 1) Sí | 5) No | 8) No |
| 2) No | 6) Sí | 9) No |
| 3) No | 7) Sí | 10) No |
| 4) Sí | | |

- $(a + c)^2$
- $(2x + 6y)^2$
- $(x - y^2)^2$
- $(3xy + 4)^2$
- $(2x + 7y^3)^2$
- $(10a^2b + 5ab^2)^2$
- $(4ax + 8a^3x^3)^2$
- $(7a^2b^3 - 3a^2b)^2$

$$19) \left(\frac{2x}{3} - \frac{3y^2}{2} \right)$$

$$20) \left| \frac{x}{5} - \frac{y^2}{3} \right|^2$$

AUTOEVALUACIÓN 6.

- $(a + 1)^3$
- $(3 - x)^3$
- $(2 + a^2)^3$
- $(3m + 4n)^3$
- $((5a + 2b)^3$
- $(2 + 3x)^3$
- $(a^2 + b^3)^3$
- $(4x + 5y)^3$
- $(m - an)^3$
- $(4x^3 - 5y^4)^3$

AUTOEVALUACIÓN 7.

- $(1 - a)(1 - a + a^2)$
- $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$
- $(3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2)$
- $(1 - 6m)(1 + 6m + 36m^2)$
- $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$
- $(8 + 3a^3)(64 - 24a^3 + 9a^6)$
- $(x^2 - 2y^4)(x^4 + 2x^2y^4 + 4y^8)$
- $(3m + 4n^3)(9m^2 - 12mn^3 + 36n^6)$
- $(a + 2b^4)(a^2 - 2ab^4 + 4b^8)$
- $(2x^3 - 5yz^2)(4x^6 + 10x^3yz^2 + 25y^2z^4)$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIDAD XII

FACTORIZACIÓN

INTRODUCCIÓN.

Con esta unidad terminaremos la factorización, viendo las distintas formas de factorizar un polinomio de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$. Estos tipos de factorización y los de la unidad anterior, te servirán más adelante de tu curso de álgebra.

Al término del estudio de esta unidad, el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS:

1. Encontrar los factores de un trinomio general de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$, en donde b y c son enteros.
2. Encontrar los factores de un trinomio general de segundo grado de la forma, $ax^2 + bx + c$, en donde a , b y c son enteros y $a \neq 0$.
3. Encontrar los factores de un polinomio por agrupación de términos.
4. Encontrar el mínimo común múltiplo (m.c.m) de dos o más polinomios.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1. Estudia la lección 2 del capítulo II de tu texto. Te sugerimos que primero leas las secciones que en seguida se mencionan para los objetivos de la unidad y analices los ejemplos que se incluyen con el fin de que sea más fácil su comprensión. Luego, trata en base a ellos, de contestar los ejercicios que se te indiquen.

Objetivos	Secciones	Autoevaluaciones
1	10	1
2	10	2
3	11	3
4	12 en adelante	4 y 5

2. Como ritmo de trabajo te sugerimos el siguiente:

1er. día	-	objetivo 1
2do. día	-	objetivo 2
3er. día	-	objetivo 3
4to. día	-	Laboratorio.

3. Como requisito para la unidad, deberás entregar a tu maestro el laboratorio de la unidad, resuelto, el cuarto día en el salón de clases.

AUTOEVALUACIÓN.

Encuentra cuál de las siguientes expresiones es un trinomio de segundo grado (preguntas 1 y 2)

- | | |
|-----------------------|--------------------|
| 1.- 0) $x^2 - 5x + 3$ | 1) $5x + 3$ |
| 2) $(x + 3)$ | 3) $x^2 - 5x$ |
| 4) 3 | |
| 2.- 0) $4y^2 + 3y$ | 1) 4 |
| 2) $3y + 1$ | 3) $4y^2 + 3y + 1$ |
| 4) $4y^2 + 1$ | |

3. Encuentra a, b y c (en ese orden) en el trinomio de segundo grado del problema 1.

- | | |
|-------------|--------------|
| 0) 3, -5, 1 | 1) -1, 5, -3 |
| 2) 1, -5, 3 | 3) -5, 3, 1 |
| 4) -1, 5, 3 | |

4. Encuentra a, b y c (en ese orden) en el trinomio de segundo grado del problema 2.

- | | |
|------------|-------------|
| 0) 1, 4, 3 | 1) 4, 3, 1 |
| 2) 1, 3, 4 | 3) -4, 1, 3 |
| 4) 3, 4, 1 | |

Encuentra los factores de las siguientes expresiones:

5. $x^2 - x - 6 = (x - 3)(\quad)$

- | | |
|------------|--------------|
| 0) $x - 1$ | 1) $(x - 2)$ |
| 2) $x + 1$ | 3) $x + 2$ |
| 4) $x - 3$ | |

6. $3x^2 + 12x + 9 = (3x + 3)(\quad)$

- 0) $x - 3$ 1) $3x + 3$
 2) $x + 1$ 3) $x + 3$
 4) $x + 2$

7. $x^2 + 3x - 4$

- 0) $(x + 4)((x - 1)$ 1) $(x - 4)(x + 1)$
 2) $(x + 4)(x - 2)$ 3) $(x + 4)((x + 1)$
 4) $(x - 4)(x - 1)$

8. $5y^2 + 3y - 2$

- 0) $(5y - 2)((y - 1)$ 1) $(5y - 2)(9y + 1)$
 2) $(5y + 2)(y + 1)$ 3) $(5y - 2)(y + 2)$
 4) $(5y + 2)(y - 1)$

Factorizar el polinomio siguiente por agrupación de términos: $2b^2 + 3bc + 6b + 9c$ (preguntas 9, 10 y 11).

9. Agrupar los términos:

- 0) $(2b^2 + 6b) + (9bc + 3c)$ 1) $(2b^2 + 3bc) - (6b + 9c)$
 2) $(2b^2 + 3b) + (6bc + 9c)$ 3) $(2b^2 + 6b) + (3bc + 9c)$
 4) $(2b^2 + 9c) - (6b + 3bc)$

10. Encuentra el producto del factor común por su binomio correspondiente:

- 0) $b(2b + 3) + 3c(2b + 3c)$ 1) $3b(b + 2) + 2c(b + 3c)$
 2) $2b(b + 3) + 3c(b + 3)$ 3) $b(b + 2) + 9c(b + 1)$
 4) $b(2b + 3c) - 3(2b + 3c)$

11. Encuentra los dos factores:

- 0) $(b + 9c)(b + 1)$ 1) $(2b + 3)(b + 3c)$
 2) $(b + 3)(2b + 3c)$ 3) $(3b + 2c)(b + 2)$
 4) $(b + 3)(3b + 2c)$

Encuentra el m.c.m. de las siguientes expresiones:

12. $3x^2y; 6xy^3$

- 0) $6x^2y^3$ 1) $3x^2y^3$ 2) $6y^3x$
 3) $6xy$ 4) $6x^2y$

13. $2ab^2; 3bc^2; 9a^2c^3$

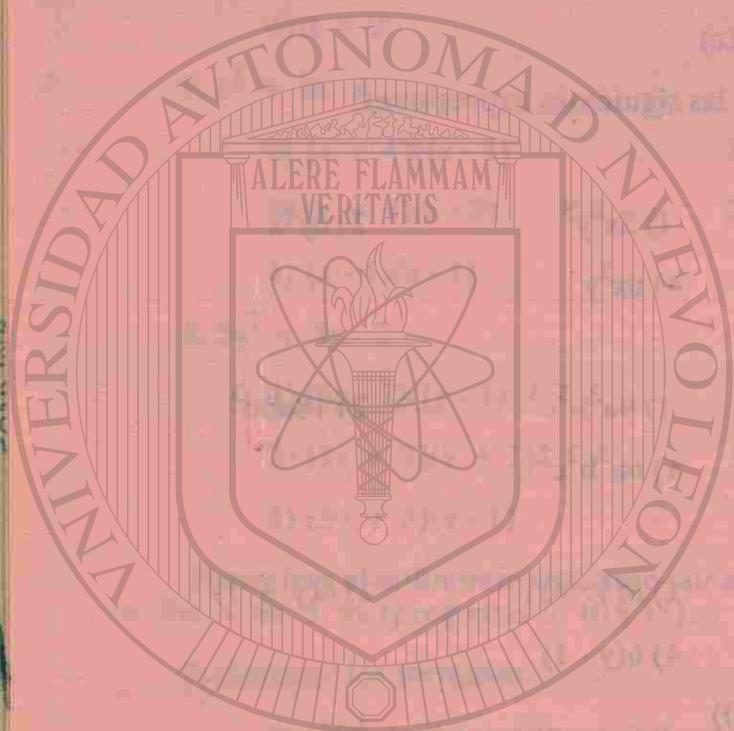
- 0) $18a^2b^2c^3$ 1) $9a^2b^3c^3$ 2) $18abc^3$
 3) $18abc^2$ 4) $6a^2b^2c^2$

14. $6; (3y - 3)$

- 0) $6y$ 1) $6(3y - 1)$ 2) $6(y + 1)$
 3) $3y$ 4) $6(y - 1)$

15. $(5y + 10); (10y^2 - 40)$

- 0) $10(y - 2)$ 1) $10(y + 4)$ 2) $10(y^2 + 4)$
 3) $10(y^2 - 4)$ 4) $10(y^2 - 2)$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

LECCIÓN 2.

2-10 TRINOMIO GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

Trinomio de la forma:

$$x^2 + bx + c$$

en donde:

- 1.- El coeficiente del primer término es 1.
- 2.- El coeficiente del segundo término es b y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.
- 3.- El término c, es el término independiente y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

EJEMPLOS:

$$x^2 + 7x + 10 \quad a^2 + 13a - 30$$

$$x^2 - y - 2 \quad m^2 - 3m + 2$$

Regla práctica.

- 1.- El trinomio se factoriza en dos binomios cuyo primer término es x, o sea, la raíz cuadrada del primer término del trinomio.
- 2.- En el primer binomio después de x, se escribe el signo del segundo término del trinomio y es el segundo binomio después de x, se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del

segundo término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio.

3.- Si los dos binomios tienen un medio signo iguales, entonces se buscan dos números cuya suma sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. Estos números son, los segundos términos de los binomios.

4.- Si los dos binomios tienen en medio signos distintos, se buscan dos números cuya diferencia sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. El mayor de estos números es el segundo término del primer binomio, y el menor, el segundo término del segundo binomio.

EJEMPLOS:

Factorizar:

$$x^2 + 6x + 5$$

El trinomio se descompone en dos factores cuyo primer término es la raíz cuadrada de x^2 , o sea, "x".

$$x^2 + 6x + 5 = (x \quad) (x \quad)$$

En el primer factor después de "x" se pone signo + porque el segundo término del trinomio 6x tiene signo +. En el segundo factor después de "x" se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo de 6x por el signo de 5, o sea, + por + da +; por tanto:

$$x^2 + 6x + 5 = (x + \quad) (x + \quad)$$

Como en estos factores hay signos iguales, se buscan dos números cuya suma sea 6 y cuyo producto sea 5. Estos números son 5 y 1, por tanto:

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 5) (x + 1)$$

Factorizar:

$$y^2 - 11y + 24$$

El trinomio se descompone en dos factores cuyo primer término es la raíz cuadrada de y^2 o sea, "y".

$$y^2 - 11y + 24 = (y \quad) (y \quad)$$

En el primer factor después de "y" se pone signo - porque - 11y tiene signo -. En el segundo factor después de "y" se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo de -11y por el signo de 24, o sea, - por + da -, luego:

$$y^2 - 11y + 24 = (y - \quad) (y - \quad)$$

Ahora, como en estos factores hay signos iguales, se buscan dos números cuya suma sea 11 y cuyo producto sea 24. Estos números son 8 y 3, por tanto:

$$y^2 - 11y + 24 = (y - 8) (y - 3)$$

Factorizar:

$$m^2 + 4m - 12$$

El trinomio se descompone en dos factores cuyo primer término es la raíz cuadrada de m^2 , o sea "m":

$$m^2 + 4m - 12 = (m \quad) (m \quad)$$

En el primer factor después de "m" se pone el signo + porque el segundo término del trinomio 4m tiene signo +. En el segundo factor después de "m" se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo de 4m por el signo de -12 y se tiene, + por - da -, o sea:

$$m^2 + 4m - 12 = (m + \quad) (m - \quad)$$

Ahora, como en estos factores tenemos signos distintos, se buscan dos números cuya diferencia sea 4 y cuyo producto sea 12. Estos números son 6 y 2. El mayor de ellos se escribe siempre en el primer factor y se tiene:

$$m^2 + 4m - 12 = (m + 6)(m - 2)$$

Factorizar:

$$t^2 - 14t - 72$$

El trinomio se descompone en dos factores cuyo primer término es la raíz cuadrada de t^2 o sea "t".

$$t^2 - 14t - 72 = (t - \quad)(t + \quad)$$

En el primer factor después de t se pone signo - porque el segundo término del trinomio -14t tiene signo -. En el segundo factor, después de t se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo de -14t por el signo de -72. Por tanto, se tiene - por - da +, o sea:

$$t^2 - 14t - 72 = (t - \quad)(t + \quad)$$

Ahora, como en este binomio tenemos signos diferentes, se buscan dos números cuya diferencia sea 14 y cuyo producto sea 72. Estos números son 18 y 4. El mayor 18 se escribe en el primer binomio y se tiene:

$$t^2 - 14t - 72 = (t - 18)(t + 4)$$

Factorizar:

$$n^2 - 20n - 3500$$

$$n^2 - 20n - 3500 = (n - \quad)(n + \quad)$$

necesitamos dos números cuya diferencia sea 20 y cuyo producto sea 3500. Estos números no se ven fácilmente. Para encontrarlos, descomponemos en sus factores primos el tercer término.

3500		2	Ahora, formamos con estos factores primos
1750		2	dos productos. Por tanteos variando los
875		5	factores de cada producto obtendremos los
175		5	dos números que buscamos:
35		5	
7		7	
1			

$$2 \times 2 \times 5 = 20 \quad 5 \times 5 \times 7 = 175 \quad 175 - 20 = 155$$

$$5 \times 5 \times 5 = 125 \quad 2 \times 2 \times 7 = 28 \quad 125 - 28 = 97$$

$$2 \times 5 \times 7 = 70 \quad 2 \times 5 \times 5 = 50 \quad 70 - 50 = 20$$

Por tanto, 70 y 50 son los números buscados. Luego,

$$n^2 - 20n - 3500 = (n - 70)(n + 50)$$

Observaciones.

Si multiplicamos $(y + 2)(y - 7)$,

queda:

$$\begin{aligned} (y + 2)(y - 7) &= (y)^2 + (2 - 7)y + 2(-7) \\ &= y^2 - 5y - 14 \end{aligned}$$

Estos dos productos, podríamos encontrarlos fácilmente por medio del siguiente esquema:

$$(y + 2)(y - 7) = (y + 2)(y - 7)$$

$$\begin{array}{ccc} y^2 & & -5y & & -14 \end{array}$$

Producto de los primeros términos,	+	Suma de los productos exterior e interior.	+	Producto de los dos últimos términos
------------------------------------	---	--	---	--------------------------------------

A la suma de los productos exteriores e interiores se le conoce también como la suma de los productos cruzados. Al descomponer en factores trinomios de este tipo, el término central (-5y) es el pivote. Un estudio de la multiplicación nos enseña que el coeficiente del término en "y" que es (-5) es la suma algebraica del producto de los dos términos exteriores (y) (-7) con el producto de los dos términos interiores (2) (y) y que el último término del trinomio es el producto de los dos términos exteriores de los binomios (2) (-7). Esto sugiere la forma de descomponer tales trinomios.

El proceso de la descomposición en factores se aplica generalmente a polinomios de coeficientes enteros. En este caso se requiere

que los factores sean también polinomios de coeficientes enteros.

Un polinomio de coeficientes enteros es primo cuando no se puede descomponer en factores siguiendo los criterios expuestos anteriormente. Por ejemplo, $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$ está expresado como producto de los factores primos $(x - 1)$ y $(x - 6)$.

Un polinomio se puede descomponer totalmente en factores cuando se puede expresar como producto de factores primos.

En la descomposición de factores se pueden efectuar cambios de signo. Por ejemplo, $x^2 - 7x + 6$ se puede descomponer en, $(x - 1)(x - 6)$ o bien en $(1 - x)(6 - x)$. Se demuestra que la descomposición en factores primos prescindiendo de los cambios de signo o del orden de los factores es única.

Este es el teorema fundamental de la descomposición en factores.

Un polinomio es primo cuando no admite más factores o diversos que él mismo con signo $+$ ó $-$ y la unidad ± 1 . Esta definición es análoga a la de los números primos como son 2, 3, 5, 7, 11.

Dos o más polinomios multiplicados entre sí dan como resultado un producto. Cuando se parte de un producto para llegar a dos o más polinomios esto constituye la descomposición en factores.

EJEMPLO:

Factorizar:

$$x^2 + x + 4$$

Las únicas factorizaciones posibles son $(x + 1)(x + 4)$ y $(x + 2)(x + 2)$. Pero al efectuar estos productos se determina que ninguno de los trinomios resultantes tienen a "x" como término lineal. Entonces, $x^2 + x + 4$, no puede factorizarse en el conjunto de polinomios con coeficientes enteros.

Un polinomio que no se puede expresar como un producto de polinomios de grado inferior se dice que es irreducible.

AUTOEVALUACIÓN 1.

Factorizar correctamente los siguientes trinomios:

1.- $a^2 + 7a + 10$ 6.- $x^2 - 8x - 1008$

2.- $y^2 + 10y + 21$ 7.- $m^2 - 9m + 18$

3.- $x^2 + 5x - 24$ 8.- $x^2 - 41x + 400$

4.- $a^2 + a - 132$ 9.- $x^2 - 11x + 30$

5.- $x^2 - 2x - 35$ 10.- $x^2 - 13x + 30$

Un polinomio irreducible cuyo máximo factor común es 1 se llama polinomio primo. Así por ejemplo, $x^2 + x + 4$ es un polinomio primo en el conjunto de polinomios con coeficientes enteros.

La factorización de un polinomio es completa cuando cada factor es una constante, un polinomio primo o una potencia de un polinomio primo.

Trinomios de la forma, $ax^2 + bx + c$.

Son trinomios de esta forma:

$$2y^2 + 7y + 3$$

$$3x^2 + 20x - 7$$

$$10y^2 - 11y - 6$$

$$3x^2 - 5x + 2$$

que se diferencian de los trinomios estudiados anteriormente en que el primer término tiene un coeficiente distinto a 1.

Primer método.

Para factorizar un producto expresado como trinomio cuyo término cuadrático tiene un coeficiente distinto de 1 se puede usar el método de inspección y tanteo como el ejemplo que sigue:

Factorizar:

$$6x^2 - 25x + 14$$

Primera observación:

El término constante es positivo y el lineal es negativo, por tanto ambos factores son diferencias.

Segunda observación:

El producto de los términos lineales de los factores es $6x^2$ y el producto de los términos constantes de los factores es 14.

Por tanto, hay que considerar las siguientes posibilidades:

Factores posibles	términos lineales correspondientes
$(x - 1)(6x - 14)$	$-14x - 6x = -20x$
$(x - 14)(6x - 1)$	$-x - 84x = -85x$
$(x - 2)(x - 7)$	$-7x - 12x = -19x$
$(x - 7)(6x - 2)$	$-2x - 42x = -44x$
$(2x - 1)(3x - 14)$	$-28x - 3x = -31x$
$(2x - 14)(3x - 1)$	$-2x - 42x = -44x$
$(2x - 2)(3x - 7)$	$-14x - 6x = -20x$
$(2x - 7)(3x - 2)$	$-4x - 21x = -25x$

Tercera observación:

El término lineal del trinomio es $-25x$. Solo la última posibilidad satisface las tres observaciones. Por tanto:

$$6x^2 - 25x + 14 = (2x - 7)(3x - 2)$$

Otra observación puede ayudar a reducir el número de factores posibles.

Si un trinomio no tiene factor común, ninguno de sus factores puede tener factor común. Así, las anteriores combinaciones de factores que contienen a $(6x - 14)(6x - 2)$, $(2x - 14)$ ó $(2x - 2)$ se pueden descartar de inmediato, ya que cada una tiene un factor común que no aparece en el trinomio dado.

Factorizar: $6y^2 - y - 2$

Primera observación:

El producto de los términos lineales es $6y^2$, por tanto, la factorización empieza con:

$$(y \quad)(6y \quad)$$

o bien, $(2y \quad)(3y \quad)$

Segunda observación:

El producto de los términos constantes es (-2) . Por tanto un término constante debe ser positivo y el otro negativo y las únicas posibilidades son -1 y 2 ó -2 y 1 . La lista de los posibles factores es la siguiente:

Factores posibles	Término lineal correspondiente
$(y - 1)(6y + 2)$	$2y - 6y = -4y$
$(y - 2)(6y + 1)$	$y - 12y = -11y$
$(y + 2)(6y - 1)$	$-y + 12y = 11y$

$$(y + 1)(6y - 2) \quad -2y + 6y = 4y$$

$$(2y - 1)(3y + 2) \quad 4y - 3y = y$$

$$(2y + 2)(3y - 1) \quad -2y + 6y = 4y$$

$$(2y - 2)(3y + 1) \quad 2y - 6y = -4y$$

$$(2y + 1)(3y - 2) \quad -4y + 3y = -y$$

Tercera observación:

El término lineal del trinomio es $(-y)$. Solamente la última posibilidad satisface todas las observaciones. Por tanto la respuesta es:

$$6y^2 - y - 2 = (2y + 1)(2y + 1)(3y - 2)$$

Se observa que el procedimiento que se sigue es semejante al que se usó al factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$. Ahora, puesto que los coeficientes del primer término del trinomio son diferentes del 1, necesitamos hacer más "tanteos" antes de encontrar la combinación correcta de los números.

Factorizar:

$$10y^2 + 17y + 3$$

Tenemos que encontrar, $(?y + ?)(?y + ?) = 10y^2 + 17y + 3$ sabemos que los segundos términos deben ser positivos ¿puedes explicar por qué? Sabemos que el producto de los coeficientes de los términos en "y" de los dos factores es 10. Sabemos también que la suma algebraica de los productos cruzados debe ser $(17y)$. Usaremos el método de tanteo y error para obtener el resultado correcto.

$$\begin{aligned} (5y + 3)(2y + 1) &= 10y^2 + (3)(2y) + (1)(5y) + 3 \\ &= 10y^2 + 11y + 3 \quad (\text{descartado}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5y + 1)(2y + 3) &= 10y^2 + (1)(2y) + (3)(5y) + 3 \\ &= 10y^2 + 17y + 3 \end{aligned}$$

Por tanto, el resultado correcto es:

$$(5y + 1)(2y + 3)$$

Factorizar:

$$6a^2 - 23a + 15$$

debemos hallar, $(?a - ?)(?a - ?) = 6a^2 - 23a + 15$. Sabemos que los segundos términos de cada factor deben ser negativos, ¿puedes explicar por qué?. Sabemos también que el producto de los coeficientes de los términos en "a" de los factores es 6. Conocemos también que la suma algebraica de los productos cruzados debe ser $(-23a)$. Usaremos el método de tanteo y error para obtener el resultado correcto.

$$\begin{aligned} (3a - 5)(2a - 3) &= 6a^2 - (5)(2a) + 3a(-3) + 15 \\ &= 6a^2 - 19a + 15 \quad (\text{descartado}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3a - 1)(2a - 15) &= 6a^2 - (1)(2a) + (3a)(-15) + 15 \\ &= 6a^2 - 47a + 15 \quad (\text{descartado}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6a - 5)(a - 3) &= 6a^2 - (5)(a) + 6a(-3) + 15 \\ &= 6a^2 - 23a + 15 \end{aligned}$$

Por tanto, el resultado correcto es: $(6a - 5)(a - 3)$.

Factorizar:

$$12x^2 - 8x - 15$$

debemos hallar: $(?x + ?)(?x - ?) = 12x^2 - 8x - 15$. Sabemos que los segundos términos de los factores deben tener signos contrarios. ¿Puedes explicar por qué?. Conocemos el producto de los coeficientes de x es 12. También sabemos que la suma algebraica de los productos cruzados tiene que ser $(-8x)$. Usaremos el método de tanteo y error para llegar al resultado. A veces se necesitan varios intentos.

$$\begin{aligned}(4x + 3)(3x - 5) &= 12x^2 + (3)(3x) + (4x)(-5) - 15 \\ &= 12x^2 - 11x - 15 \quad (\text{descartado})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4x - 3)(3x + 5) &= 12x^2 - (3)(3x) + (5)(4x) - 15 \\ &= 12x^2 + 11x - 15 \quad (\text{descartado})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(12x + 5)(x - 3) &= 12x^2 + 5x + 12x(-3) - 15 \\ &= 12x^2 - 31x - 15 \quad (\text{descartado})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6x + 5)(2x - 3) &= 12x^2 + (5)(2x) + (6x)(-3) - 15 \\ &= 12x^2 - 8x - 15\end{aligned}$$

Por tanto, los factores son: $(6x + 5)(2x - 3)$

No siempre es posible factorizar trinomios en el conjunto de los enteros. Por ejemplo, los siguientes trinomios no se pueden descomponer en el conjunto de los enteros.

$$\begin{aligned}x^2 - x - 1 \\ 2x^2 - 7x - 6\end{aligned}$$

Segundo método.

En lugar del método que hemos explicado se puede usar el siguiente para factorizar trinomios de la forma:

$$ax^2 + bx + c; \quad a \neq 1$$

EJEMPLOS:

Factorizar:

$$12x^2 + 11x + 2$$

Encontramos primero el producto de $(a)(c)$ que es 24. Puesto que $(a)(c)$ es positivo, tenemos que buscar un par de factores de 24 cuya suma sea 11; son 3 y 8. Así pues, escribimos:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 24 \\ 2 & 12 \\ 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{array} \quad \begin{aligned} 12x^2 + 3x + 8x + 2 \\ &= (12x^2 + 3x) + (8x + 2) \\ &= 3x(4x + 1) + 2(4x + 1) \\ &= (3x + 2)(4x + 1) \end{aligned}$$

En el primer paso no importa si se escribe $3x + 8x$ ó $8x + 3x$. ¿Puedes ver por qué?

Factorizar:

$$10x^2 - 11x - 6$$

Encontramos primero el producto de $(a)(c)$ que es (-60) . Puesto que $(a)(c)$ es negativo, tenemos que encontrar un par de factores de 60 cuya diferencia sea 11; son 4 y 15, el mayor de estos tiene el signo de b . Así pues, escribimos:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 60 \\ 2 & 30 \\ 3 & 20 \\ 4 & 15 \\ 5 & 12 \end{array} \quad \begin{aligned} 10x^2 - 15x + 4x - 6 \\ &= (10x^2 - 15x) + (4x - 6) \\ &= 5x(2x - 3) + 2(2x - 3) \\ &= (5x + 2)(2x - 3) \end{aligned}$$

No se necesita escribir todos los factores en orden si se descubre más pronto el factor apropiado. ¿Importaría, si hubieras escrito $10x^2 + 4x - 15x - 6$ en el primer paso?. Compruébalo y verás si es cierto.

Factorizar:

$$8x^2 - 26x + 15$$

Encontramos primero el producto (a) (c) que es $(8)(15) = 120$. Puesto que (a) (c) es positivo, debemos encontrar un par de factores de 120 cuya suma sea 26; son 6 y 20; ambos deben tener el signo del término de un medio. Así pues, escribimos:

1	120	$8x^2 - 6x - 20x + 15$
2	60	$= (8x^2 - 6x) + (-20x + 15)$
3	40	$= (8x^2 - 6x) - (20x - 15)$
4	30	$= 2x(4x - 3) - 5(4x - 3)$
5	24	$= (2x - 5)(4x - 3)$

¿Podrías haber escrito, $8x^2 - 20x - 6x + 15$ en el primer paso? Razona la respuesta.

Factorizar:

$$6x^2 + x - 12$$

Aquí el producto de (a) (c) es, $(6)(-12)$ ó (-72) . Puesto que (a) (c) es negativo, buscaremos un par de factores de 72 cuya diferencia es 1; son 8 y 9, el mayor debe tener el signo del término central. Entonces escribimos:

1	72	$6x^2 + 9x - 8x - 12$
2	36	$(6x^2 + 9x) + (-8x - 12)$
3	24	$(6x^2 + 9x) - (8x + 12)$
4	18	$3x(2x + 3) - 4(2x + 3)$
6	12	$(3x - 4)(2x + 3)$
8	9	

¿Daría, $6x^2 - 8x + 9x - 12$ los mismos factores?. Compruébalo y en esa forma verás si es cierto.

Tercer método.

Factorizar:

$$6x^2 - 7x - 3$$

Se multiplica el trinomio por el coeficiente de x^2 que es 6 y dejando indicado el producto de 6 por $7x$ se tiene.

$$36x^2 - (6)(7x) - 18$$

pero, $36x^2 = (6x)^2$

y $(6)(7x) = (7)(6x)$

por lo tanto, podemos escribir:

$$(6x)^2 - 7(6x) - 18$$

Descomponiendo este trinomio según se vió en el primer método, el primer término de cada factor será la raíz cuadrada de $(6x)^2$ o sea $6x$

$$(6x -) (6x +)$$

dos números cuya diferencia sea 7 y cuyo producto sea 18; 9 y 2. Tendremos:

$$(6x - 9)(6x + 2)$$

Como al principio multiplicamos el trinomio por 6, ahora tenemos que dividir por 6 para no alterar el trinomio y tenemos:

$$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}$$

Pero como ninguno de los factores es divisible por 6, descomponemos 6 en $(2)(3)$ y dividiendo $(6x - 9)$ entre 3 y $(6x + 2)$ entre 2, se

tiene:

$$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{(2)(3)} = (2x - 3)(3x + 1)$$

Factorizar: luego, $6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$

Factorizar:

$$20x^2 + 7x - 6$$

Multiplicando el trinomio por 20, tendremos:

$$(20x)^2 + 7(20x) - 120$$

descomponiendo este trinomio, tenemos:

$$(20x + 15)(20x - 8)$$

Para cancelar la multiplicación por 20 tenemos que dividir por 20, pero como ninguno de los dos factores es divisible por 20 descomponemos el 20 en (5)(4) y dividiendo el factor (20x + 15) entre 5 y (20x - 8) entre 4, tenemos:

$$\frac{(20x + 15)(20x - 8)}{(5)(4)} = (4x + 3)(5x - 2)$$

luego, $20x^2 + 7x - 6 = (4x + 3)(5x - 2)$

Factorizar: $18a^2 - 13a - 5$

multiplicando por 18: $(18a)^2 - 90$. Ahora factorizando este trinomio: $(18a - 18)(18a - 5)$ dividiendo por 18, por lo cual, como el primer binomio $(18a - 18)$ es divisible basta efectuar la división y se tiene:

$$\frac{(18a - 18)(18a - 5)}{18} = (a - 1)(18a - 5)$$

luego, $18a^2 - 13a - 5 = (a - 1)(18a - 5)$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Factorizar correctamente los siguientes trinomios.

1.- $2x^2 + x - 3$

6.- $8h^2 + 5hk - 3k^2$

2.- $3x^2y^2 - 11xy + 8$

7.- $15b^2 - 17bc + 4c^2$

3.- $7a^2 - 44a - 35$

8.- $16u^2 + 32uv + 15v^2$

4.- $2a^2 + 29a + 90$

9.- $30x^2 + 13x - 10$

5.- $5y^2 + 13y - 6$

10.- $21a^2 + 11a - 2$

2-11 DESCOMPOSICIÓN POR AGRUPACIÓN.

Sea el polinomio:

$$ac + ad + bc + bd$$

que se supone que proviene del producto de dos factores binomios.

Agrupando los términos de dos en dos de manera que cada grupo tenga un factor común, se puede escribir:

$$(ac + ad) + (bc + bd)$$

como se ve, el primer grupo es divisible entre "a" y el segundo lo es entre "b"; resulta pues:

$$(ac + ad) + (bc + bd) = a(c + d) + b(c + d)$$

Poniendo el binomio $(c + d)$ en factor común se tiene:

$$ac + ad + bc + bd + (a + b)(c + d)$$

de este resultado, se deduce que para descomponer en factores un polinomio de cuatro términos que se supone proviene de la

multiplicación de dos factores binomios se siguen los siguientes pasos:

- 1.- Se agrupan convenientemente los cuatro términos en dos binomios tales que, cada uno admita un factor común.
- 2.- Se indica en cada grupo el producto del factor común por su binomio correspondiente el cual resultará el mismo en todos ellos si efectivamente el polinomio dado proviene del producto de dos factores binomios.
- 3.- Se indica el producto del binomio común por la suma algebraica de los otros factores diferentes.

NOTA.

Pudo haberse agrupado los términos de este otro modo:

$$(ac + bc) + (ad + bd)$$

EJEMPLOS:

Descomponer en producto de dos factores:

$$20ac + 15bc + 4ad + 3bd$$

$$20ac + 15bc + 4ad + 3bd = (20ac + 4ad) + (15bc + 3bd)$$

$$= 4a(5c + d) + 3b(5c + d)$$

$$= (4a + 3b)(5c + d)$$

NOTA:

Hubiera podido agruparse los términos así:

$$(20ac + 15bc) + (4ad + 3bd)$$

Descomponer en producto de dos factores:

$$18a^3 + 12a^2 - 15a - 10$$

$$18a^3 + 12a^2 - 15a - 10 = (18a^3 + 12a^2) - (15a + 10)$$

$$= 6a^2(3a + 2) - 5(3a + 2)$$

$$= (6a^2 - 5)(3a + 2)$$

Las propiedades asociativa y conmutativa para la adición junto con la propiedad distributiva permiten factorizar un polinomio por agrupación.

$$ax + by + ay + bx = (ax + bx) + (ay + by)$$

$$= (a + b)x + (a + b)y$$

$$= (a + b)(x + y)$$

En el último paso, $(a + b)$ se maneja como un solo término al aplicar la propiedad distributiva.

He aquí otro polinomio que se puede factorizar rápidamente cuando se agrupan los términos en forma apropiada.

$$2vw - 15st - 10vt + 3sw = (2vw - 10vt) + (3sw - 15st)$$

$$= 2v(w - 5t) + 3s(w - 5t)$$

$$= (2v + 3s)(w - 5t)$$

Naturalmente que puede haber más de una forma conveniente de agrupar los términos:

$$2vw - 15st - 10vt + 3sw = (2vw + 3sw) + (-15st - 10vt)$$

$$= w(2v + 3s) + (-5t)(2v + 3s)$$

$$= (w - 5t)(2v + 3s)$$

ya que la multiplicación es conmutativa, este resultado es el mismo que el precedente.

AUTOEVALUACIÓN 3.

Factorizar por agrupación:

1.- $ab + a + b + 1$

2.- $2c^2 + 4cd - 3c - 6d$

3.- $15h^2 - 9hk + 35hj - 21jk$

4.- $a^2 - ab + ac - a + b - c$

5.- $6bc - 9c^2 - 12cd - 8be + 12ce + 16de$

6.- $x^2 + xy + y^2 - x^3 + y^3$

7.- $25a^2 - b^2 + 4bd - 4d^2$

8.- $4r^2 + 12rs + 9s^2 - t^2 - 8tu - 16u^2$

9.- $xy - y^2 + xz - yz$

10.- $4rs - 6s^2 + 17st - 6rt - 12t^2$

2-12 MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.

Los múltiplos de un número son aquellos que resultan de multiplicarlo por cualquiera de los números naturales. Por ejemplo, los múltiplos de 3 son: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, etc.

Cuando se tienen dos o más números, siempre habrá uno o varios múltiplos que sean comunes a ellos, de los cuales el menor es el que recibe el nombre de mínimo común múltiplo (m. c. m.).

Sean los múltiplos de 8 y 12.

múltiplos de 8: 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64,...

múltiplos de 12: 0, 12, 24, 36, 48, 60,...

Observemos que 24 y 48 son múltiplos comunes pero 24 es el menor múltiplo común a la vez de 8 y de 12; por lo tanto, 24 es el m. c. m. de esos números.

Mínimo común múltiplo de varios números es el menor de los múltiplos que es común a los números propuestos.

Si los números propuestos son primos entre sí, el mínimo común múltiplo de ellos es el producto de los mismos.

EJEMPLO:

5, 7, 11.

$$\text{m. c. m. } (5, 7, 11) = 5 \times 7 \times 11 = 385$$

Para hallar mentalmente el m.c.m. de varios números, se considera el mayor de todos ellos y se observa si contiene exactamente a los restantes, en caso afirmativo, dicho número es el m. c. m. En caso contrario se ensaya con el duplo del mayor, con el triple, con el cuádruple, etc. hasta hallar un múltiplo del mayor, que contenga exactamente a los restantes. El número así obtenido es el m.c.m. de los números dados:

$$\text{m. c. m. } (24, 12 \text{ y } 8) = 24$$

que contiene exactamente a los restantes.

$$\text{m. c. m. } (15, 10, 5 \text{ y } 20) = 60$$

pues el triple de 20 contiene exactamente a los restantes. En el caso de que los números sean primos entre sí, el m.c.m. es el producto de los mismos.

$$\text{m. c. m. } (7, 23, 10) = 1610$$

2-13 M. C. M. POR DESCOMPOSICIÓN DE FACTORES PRIMOS.

Para hallar el m.c.m. se descompone en sus factores a cada uno de los números propuestos y en seguida se multiplican entre sí los factores distintos por los que aparecen con el mayor exponente de los factores repetidos.

EJEMPLOS:

Obtener el m.c.m. de 8 y 12

8	2	12	2
4	2	6	2
2	2	3	3
1		1	

$$8 = (2)^3 \quad \text{m.c.m.} = (2)^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$$

$$12 = (2)^2 \times 3$$

Es decir, 24 es el dividendo que da divisiones exactas tomando como divisores a 8 y 12.

$$24 \div 8 = 3$$

$$24 \div 12 = 2$$

Calcular el m. c. m. de 25, 40 y 36:

25	5	40	2	36	2
5	5	20	2	28	2
1	10	2	9	3	3
	5	5	3	3	3
1		1	1	1	1

$$25 = (5)^2$$

$$40 = (2)^3 (5) \quad \text{m.c.m.} = (2)^3 (3)^2 (5)^2 = (8) (9)$$

$$(25) = 1800$$

$$36 = (2)^2 (3)^2$$

Por lo tanto, 1800 es el menor dividendo que da divisiones exactas al tener como divisores 25, 40 y 36.

$$1800 \div 25 = 72$$

$$1800 \div 40 = 45$$

$$1800 \div 36 = 50$$

El procedimiento anterior puede simplificarse si se obtienen los factores primos en un solo cuadro factorizado con 2 hasta agotar todos los números divisibles entre 2, en seguida factorizando con 3, hasta acabar los divisibles entre 3; a continuación entre 5, y así con cada factor primo hasta lograr que se reduzcan todos los números a la unidad.

Cuando el número sea divisible se escribe nuevamente en el renglón inmediato inferior, hasta que se encuentra su divisibilidad.

EJEMPLOS:

Obtener el m. c. m. de 8 y 12

8	12	2	m.c.m. = (2) ³ (3) = (8)(3) = 24
4	6	2	
2	3	2	
1	3	3	
1	1		

Calcular el m. c. m. de 25, 40 y 36.

25	40	36	2	= (8) (9) (25)
25	20	18	2	= 1800
25	10	9	2	
25	5	9	3	
25	5	3	3	
25	5	1	5	
5	1	1	5	
1	1	1		

La aplicación práctica del mínimo común múltiplo se observará en el capítulo dedicado a las fracciones comunes.

AUTOEVALUACIÓN 4.

Calcula mentalmente el mínimo común múltiplo de los siguientes grupos de números.

- 1) 6, 18 y 9
- 2) 3, 7 y 5
- 3) 3, 4, 6 y 12
- 4) 4, 6, 9 y 18
- 5) 10, 15, 20 y 30

Calcule el mínimo común múltiplo por descomposición de factores primos:

- 6) 18, 36 y 40
- 7) 200, 120 y 360
- 8) 60, 100 y 260

2-14 M. C. M. DE MONOMIOS.

Regla.

Se encuentra el m.c.m. de los coeficientes y a continuación de éste se escriben todas las letras distintas sean o no comunes dando a cada letra el mayor exponente que tenga en las expresiones dadas.

EJEMPLO:

Encontrar el m.c.m. de: x^2y ; xy^2

Tomamos "x" con su mayor exponente x^2 , "y" con su mayor exponente y^2 y se tiene:

$$\text{m.c.m.} = x^2y^2$$

Encontrar el m.c.m. de $9x^4y^2$; $12x^3y^3$

$$9x^4y^2 = (3)^2x^4y^2$$

$$12x^3y^3 = (2)^2(3)x^3y^3$$

$$\begin{aligned} \text{m.c.m.} &= (3)^2 \cdot (2)^2x^4y^3 \\ &= 36x^4y^3 \end{aligned}$$

Encontrar el m.c.m. de $48r^3t^4$, $54r^2t^6$; $60r^4t^2$

$$48r^3t^4 = (2)^4 (3) r^3 t^4$$

$$54r^2t^6 = (2) (3)^3 r^2 t^6$$

$$60r^4t^2 = (2)^2 (3) (5) r^4 t^2$$

$$\text{m.c.m.} = (2)^4 (3)^3 (5) r^4 t^6$$

$$= 2160r^4t^6$$

De los ejemplos anteriores se observa que el m.c.m. de los coeficientes se encuentra descomponiendo, en factores primos los coeficientes de cada expresión algebraica. Así, en el ejemplo anterior:

$$48 = (2)(2)(2)(2)(3) = (2)^4(3)$$

$$54 = (2)(3)(3)(3) = (2)(3)^3$$

$$60 = (2)(2)(3)(5) = (2)^2(3)(5)$$

2-15 M. C. M. DE POLINOMIOS.

Regla.

Se descomponen las expresiones dadas en sus factores primos. El m.c.m. es el producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente.

EJEMPLOS:

Encontrar el m.c.m. de: $2x$; $(4a - 8)$

$$2x = (2)(x)$$

$$4a - 8 = 4(a - 2) = (2)^2(a - 2)$$

$$\text{m.c.m.} = (2)^2(x)(a - 2)$$

$$= 4x(a - 2)$$

Encontrar el m.c.m. de: $12x^2y$; $2ax^2y^3 + 5x^2y^3$

$$12x^2y = (2)^2(3)x^2y$$

$$2ax^2y^3 + 5x^2y^3 = x^2y^3(2a + 5)$$

$$\text{m.c.m.} = (2)^2 \cdot 3x^2y^3(2a + 5)$$

$$= 12x^2y^3(2a + 5)$$

Encontrar el m.c.m. de: mn ; m^2 ; $(mn^3 - mn^2)$

$$mn = (m)(n)$$

$$m^2 = (m)^2$$

$$mn^3 - mn^2 = mn^2(n - 1)$$

$$\text{m.c.m.} = m^2n^2(n - 1)$$

Encontrar el m.c.m. de: $4ax^2 - 8axy + 4ay^2$; $6b^2x - 6b^2y$

descomponiendo queda:

$$4ax^2 - 8axy + 4ay^2 = 4a(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= (2)^2 \cdot a(x - y)^2$$

$$6b^2x - 6b^2y = 6b^2(x - y)$$

$$= (2)(3b^2)(x - y)$$

$$\text{m.c.m.} = (2)^2(3ab^2)(x - y)^2$$

$$= 12ab^2(x - y)^2$$

Encontrar el m.c.m. de:

$$a^2 - 2ab - 3b^2$$

$$a^3b - 6a^2b^2 + 9ab^3$$

$$ab^2 + b^3$$

descomponiendo en factores primos cada expresión queda:

$$a^2 - 2ab - 3b^2 = (a + b)(a - 3b)$$

$$a^3b - 6a^2b^2 + 9ab^3 = ab(a^2 - 6ab + 9b^2)$$

$$= ab(a - 3b)^2$$

$$ab^2 + b^3 = b^2(a + b)$$

por tanto, el m.c.m. = $ab^2(a + b)(a - 3b)^2$

AUTOEVALUACIÓN 5.

Encuentre el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de las siguientes expresiones algebraicas.

1.- $\frac{36c}{9c^2 \cdot 12a^2c^3}$

6.- $\frac{6a^2b}{3a^2b^2 + 6ab^3}$

2.- $\frac{9ax^3y^4}{15x^2y^5}$

7.- $\frac{9a^2}{18b^3 + 27a^4b + 81a^3b^2}$

3.- $\frac{12u^2y}{24uy^2 \cdot 27v^2w}$

8.- $\frac{4u^2 + 9v^2}{4u^2 + 8uv + 3v^2} \cdot \frac{4u^2 - 4uv - 3v^2}{4u^2 - 4uv - 3v^2}$

4.- $\frac{6a^2}{9x} \cdot \frac{12ay^2}{18x^3y}$

9.- $\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} \cdot \frac{1}{(a - b)^2}$

5.- $\frac{24a^2x^3}{36a^2y^4} \cdot \frac{40x^2y^5}{60a^3y^6}$

10.- $\frac{28a}{a^2 + 2a + 1} \cdot \frac{1}{a^2 + 1} \cdot \frac{7a^2 + 7}{14a + 14}$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 2.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- $(a + 5)(a + 2)$

6.- $(x + 28)(x - 36)$

2.- $(y + 7)(y + 3)$

7.- $(m - 6)(m - 3)$

3.- $(x + 8)(x - 3)$

8.- $(x - 25)(x - 16)$

4.- $(a + 12)(a - 11)$

9.- $(x - 5)(x - 6)$

5.- $(x + 5)(x - 7)$

10.- $(x - 10)(x - 3)$

AUTOEVALUACIÓN 2.

- 1.- $(x - 1)(2x + 3)$
- 2.- $(3xy - 8)(xy - 1)$
- 3.- $(a - 7)(7a + 5)$
- 4.- $(2a + 9)(a + 10)$
- 5.- $(y + 3)(5y - 2)$
- 6.- $(h + k)(8h - 3k)$
- 7.- $(5b - 4c)(3b - c)$
- 8.- $(4u + 5v)(4u + 3v)$
- 9.- $(6x + 5)(5x - 2)$
- 10.- $(7a - 1)(3a + 2)$

AUTOEVALUACIÓN 3.

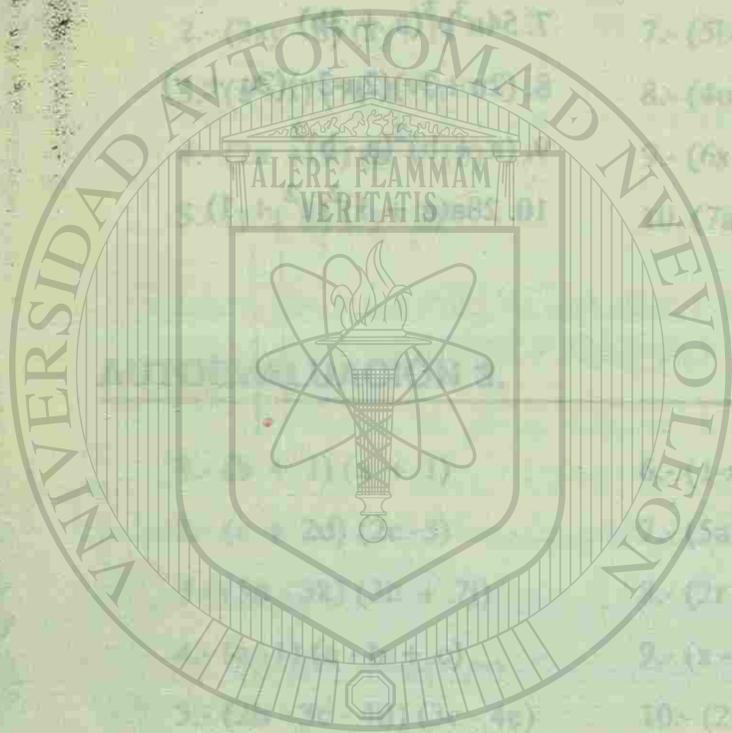
- 1.- $(b + 1)(a + 1)$
- 2.- $(c + 2d)(2c - 3)$
- 3.- $(5h - 3k)(3h + 7j)$
- 4.- $(a - 1)(a - b + c)$
- 5.- $(2b - 3c - 4d)(3c - 4e)$
- 6.- $(1 - x + y)(x^2 + xy + y^2)$
- 7.- $(5a + b - 2d)(5a - b + 2d)$
- 8.- $(2r + 3s + t + 4u)(2r + 3s - t - 4u)$
- 9.- $(x - y)(y + z)$
- 10.- $(2s - 3t)(2r - 3s + 4t)$

AUTOEVALUACIÓN 4.

1. 18
2. 105
3. 12
4. 36
5. 60
6. 360
7. 1800
8. 3900

AUTOEVALUACIÓN 5.

1. $36a^2c^3$
2. $45ax^3y^5$
3. $216u^2v^2w^2$
4. $36a^2x^3y^2$
5. $360a^3x^3y^6$
6. $6a^2b^2(a + 2b)$
7. $54a^3b^3(a + 3b)$
8. $(2u + 3v)(2u - 3v)(2u + v)$
9. $(a + b)^2(a - b)^2$
10. $28a(a + 1)^2(a^2 + 1)$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL

UNIDAD XIII

OPERACIONES CON LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

INTRODUCCIÓN.

El cálculo con fracciones, especialmente fracciones comunes, ha sido siempre fastidioso no solamente en las civilizaciones primitivas, sino también en los tiempos modernos, cuando no se sabe operar correctamente con ello.

En esta unidad tendrás la oportunidad de aprender la herramienta necesaria para operar con las fracciones algebraicas. Además te proporciona el conocimiento necesario para poder continuar con temas posteriores.

Aprende a excelencia esta unidad, ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1. Aplicar correctamente, el principio fundamental de las fracciones algebraicas, en la reducción a términos mínimos, de fracciones cuyos miembros sean monomios o polinomios.

- Efectuar correctamente la multiplicación de fracciones, utilizando los diferentes tipos de factorización, expresando su resultado en la forma más simple.
- Aplicar el principio fundamental y las propiedades de los recíprocos, en la división de fracciones algebraicas, expresando su resultado en la forma más simple.

PROCEDIMIENTO.

- Estudia la lección 1 del capítulo VI. Antes de que procedas a resolver los objetivos, repasa la lección para que así te des cuenta de lo que vas a hacer.
- Para el objetivo 1 estudia la sección 1. Estudia los ejemplos primero y luego en base a ellos resuelve la autoevaluación 1. Para los objetivos 2 y 3 estudia el resto de la lección. es necesario que a esta altura hayas dominado ya el objetivo anterior, puesto que, es la base de estos objetivos. Analiza y estudia los ejemplos y luego resuelve la autoevaluación 2.
- Para poder presentar esta unidad deberás entregarle a tu maestro las autoevaluaciones contestadas.

AUTOEVALUACIÓN.

Encuentra las siguientes razones como una fracción en términos mínimos.

1. 6 pies a 9 pulgadas.

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| 0) $\frac{2}{3}$ | 1) $\frac{6}{7}$ | 2) $\frac{7}{6}$ |
| 3) $\frac{8}{1}$ | 4) $\frac{1}{8}$ | |

2. 18 pulg a 4 pies.

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| 0) $\frac{1}{30}$ | 1) $\frac{1}{32}$ | 2) $\frac{5}{92}$ |
| 3) $\frac{2}{15}$ | 4) $\frac{1}{3}$ | |

3. Encuentra el porcentaje indicado: 1.25% de 12.

- | | | |
|---------|---------|--------|
| 0) 0.15 | 1) 15 | 2) 1.5 |
| 3) 1.8 | 4) 0.01 | |

4. Encuentra el número: 24 es el 12% del número.

- | | | |
|--------|--------|--------|
| 0) 150 | 1) 206 | 2) 200 |
| 3) 175 | 4) 100 | |

5. ¿Qué tanto por ciento es 90 de 15?

- | | | |
|----------|----------|-------|
| 0) 15 | 1) 18 | 2) 22 |
| 3) 16.66 | 4) 14.44 | |

6. El señor Pérez pagó \$ 85,000.00 por un auto. En un año su valor bajó a \$ 75,000.00, ¿en qué tanto por ciento se devaluó el automóvil?

- | | | |
|----------|----------|----------|
| 0) 11.76 | 1) 16.82 | 2) 13.43 |
| 3) 16 | 4) 18.6 | |

Reduce las siguientes fracciones a términos mínimos:

7. $\frac{7x^3y^4z}{21yz^4}$

- 0) x^3y^3 1) $x^2y^3/3z^3$ 2) $x^3y^3/3z^3$
 3) $xy/3z$ 4) x^3y/z

8. $\frac{12a^7b^4c^6}{6a^6c^9}$

- 0) $2ab^4/c^3$ 1) ab/c 2) $2b^4/c^3$
 3) $2a/c^3$ 4) ab^4/c^3

9. $\frac{(x^2 - 2x - 8)}{(x^2 + x - 20)}$

- 0) $x/5$ 1) $(x + 2)/5$ 2) $(x + 5)/(x + 2)$
 3) $(x + 2)/(x + 5)$ 4) $(x + 5)/x$

10. $\frac{(x^3 + 6x)}{7x}$

- 0) $(x + 6)/3$ 1) $(x^2 + 6)/7$ 2) $x^2 - 6$
 3) $x^2/7$ 4) $(x + 6)/x$

Efectúa las operaciones indicadas y expresa el resultado en términos mínimos:

11. $\frac{(30 - 7a - a^2)(a^2 - a - 12)}{(24 - 2a - a^2)(a^2 + 7a - 30)}$

- 0) $(a + 3)^2/(a + 6)$ 1) $(a - 3)/a^2$ 2) $(a + 3)/(a + 6)$
 3) $(a - 3)/(a - 6)$ 4) $(a - 3)/(a^2 - 6)$

12. $6/5 + 4/5$

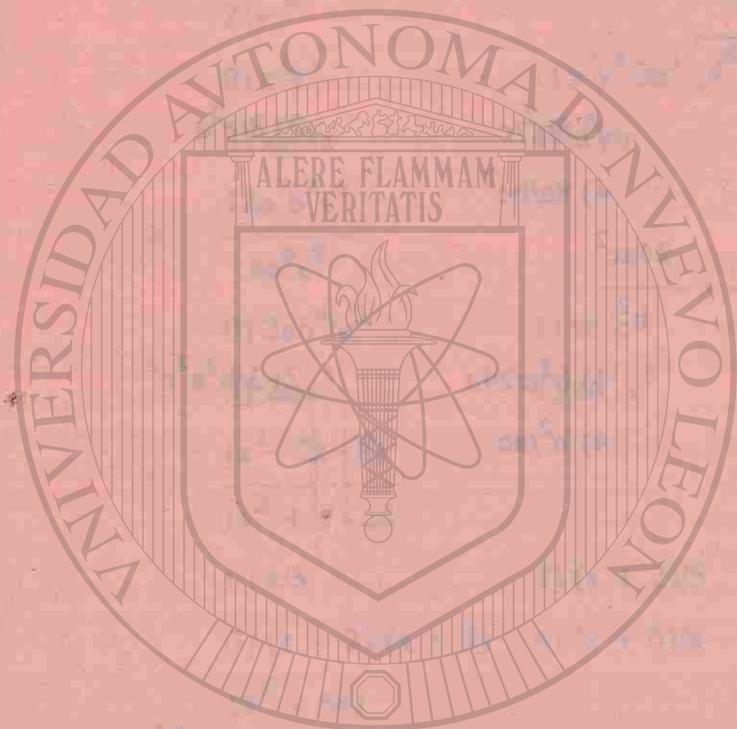
- 0) $24/25$ 1) $2/3$ 2) $25/24$
 3) $6/5$ 4) $3/2$

13. $\frac{8a^2b}{c^4} + \frac{3a^3}{c^2}$

- 0) $8b/c^2a$ 1) $8b^2/c$ 2) $8/c^2a$
 3) $8b^2/3ac^2$ 4) $8a/bc^2$

14. $\frac{8a^2}{b^5c^4} \cdot \frac{9bc^4}{a^5} + \frac{24ac^2}{b^2}$

- 0) $3a/b^2c^2$ 1) $b^2c/24a$ 2) $3/b^2a^4c^2$
 3) $b^2a^4c/3$ 4) b^2/ac



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL

UNIDAD XIII

OPERACIONES CON LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 1.

1.- PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Enunciaremos varias propiedades de las fracciones que nos serán útiles más adelante.

1) Puede cambiarse simultáneamente a la vez los signos del numerador y denominador de una fracción y no se altera.

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

2) Si el numerador y el denominador de una fracción algebraica, se multiplican o se dividen por una misma cantidad, la fracción no se altera.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a + c}{b + c}$$

3) Además una fracción a/b siendo a y b números cualesquiera y $b \neq 0$, se puede expresar como:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} (a) = a \left(\frac{1}{b} \right);$$

4) De igual modo una fracción $1/ab$ siendo a y b dos números diferentes del cero se pueden expresar como:

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

1-2 REDUCCIÓN A TÉRMINOS MÍNIMOS.

Reducir una fracción, es cambiar su forma sin cambiar su valor. Simplificar una fracción algebraica, es convertirla en una fracción equivalente, cuyos términos sean primos entre sí. Por ejemplo, las fracciones siguientes son equivalentes.

$$a) \quad \frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$b) \quad \frac{12a^2}{8a} = \frac{6a}{4} = \frac{3a}{2}$$

donde cada una de ellas está expresada en su forma más simple, ya que, al reducir nos queda que 3 y 2 son primos entre sí, al igual que 3a y 2 de la segunda fracción.

Cuando los términos de una fracción son primos entre sí la fracción

es irreducible y entonces, la fracción está reducida a su más simple expresión o a su mínima expresión.

La mínima expresión de una fracción, es aquella en la cual, el numerador y el denominador no tiene factores comunes. Así en los ejemplos anteriores, lo que hicimos para reducir fue.

$$a) \quad \frac{12}{8} = \frac{(6)(2)}{(4)(2)} = \frac{6}{4} = \frac{(3)(2)}{(2)(2)} = \frac{3}{2}$$

o bien

$$\frac{12}{8} = \frac{(4)(3)}{(4)(2)} = \frac{3}{2}$$

$$b) \quad \frac{12a^2}{8} = \frac{(4)(3)a \cdot a}{(4)(2)a} = \frac{3a}{2}$$

Por lo tanto, para reducir una fracción a su mínima expresión, se factorizan primero el numerador y el denominador de la fracción y luego se divide, cada uno de ellos entre cada factor que les sea común.

Así, podemos determinar si una fracción está en sus términos mínimos expresando el numerador y denominador como productos de sus factores primos. Cualquier factor común que aparezca tanto en el numerador como en el denominador puede entonces ser suprimido o cancelado.

EJEMPLO:

Simplificar la fracción $\frac{9a^2b^3}{2a^3b^4c^2}$ ®

Solución:

Se tiene que:

$$\frac{9a^2 b^3}{24a^3 b^4 c^2} = \frac{(3)(1)(1)}{(8)(a)(b)(c^2)} = \frac{3}{8abc^2}$$

Hemos dividido 9 y 24 entre 3 y obtuvimos 3 y 8; a^2 y a^3 entre a^2 y obtuvimos 1 y a ; b^3 y b^4 entre b^3 y obtuvimos 1 y b ; c^2 no tiene factor común por tanto, queda en el denominador. También vemos que, 3 y $8abc^2$, son números primos entre sí, es decir, no hay factor común por lo que resulta una fracción irreducible, que es precisamente lo que queríamos.

De las fracciones, las más fáciles de resolver son las de un monomio entre otro monomio, como en el caso del ejemplo anterior, puesto que está expresado como factor y no aparece ningún sumando. Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO:

Simplificar la fracción $\frac{12a^3 b^2 c}{18ab^3 c^2}$

Solución:

Según el principio fundamental de las fracciones, se pueden dividir sus dos términos entre $6ab^2$, y se tienen:

$$\frac{12a^3 b^2 c + 6ab^2 c}{18ab^3 c^2 + 6ab^2 c} = \frac{2a^2}{3bc}$$

Para llegar a este resultado se han dividido el numerador y el denominador entre $6ab^2 c$, que es el factor máximo de ambos miembros de la fracción cuyo producto es el máximo común divisor (m.c.d.) de los términos de dicha fracción.

Por tanto, para reducir una fracción a su más simple expresión,

mediante una sola división, se dividen sus dos términos entre su máximo común divisor (m.c.d)

EJEMPLO:

Reducir a su más simple expresión la fracción

$$\frac{144a^5 b^4 c^3 d}{36a^4 b^5 c^2}$$

Solución:

El m.c.d. de los términos de la fracción es $36a^4 b^4 c^2$, por lo que queda como:

$$\frac{144a^5 b^4 c^3 d + 36a^4 b^4 c^2}{36a^4 b^5 c^2 + 36a^4 b^4 c^2} = \frac{4acd}{b}$$

Ahora vemos el caso en el que la fracción involucre división de monomios entre polinomios o polinomios entre polinomios.

Para poder simplificar una fracción algebraica de este tipo es necesario primero descomponer cada polinomio en sus factores primos, o bien, factorizar completamente el polinomio de cada término de la fracción para luego suprimir los factores que sean comunes del numerador y el denominador. Veámoslo mejor con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO:

Reduczamos la fracción $\frac{2x^2}{4x^2 - 4xy}$ a términos mínimos. ®

Solución:

Como en la fracción aparece solamente en el denominador un polinomio, procedemos a factorizarlo:

$$\frac{2x^2}{4x^2 - 4xy} = \frac{2x^2}{4x(x-y)}$$

luego sacamos el m. c. d. que es $2x$

$$\frac{2x^2 + 2x}{4x(x-y) + 2x} = \frac{x}{2(x-y)}$$

EJEMPLO:

Reducir a su más simple expresión la fracción

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6}$$

Solución:

Se procede a factorizar el numerador y denominador de la fracción:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$$

En la reducción de fracciones, es común suprimir el factor por el cual se dividen el numerador y el denominador. El proceso de eliminar un factor común del numerador y denominador de una fracción es llamado cancelación multiplicativa.

EJEMPLO:

Reducir a su más simple expresión la fracción

$$\frac{x^2 - 9x + 20}{25 - x^2}$$

Solución:

Haciendo lo mismo que en los otros ejemplos tenemos

$$\frac{x^2 - 9x + 20}{25 - x^2} = \frac{(x-5)(x-4)}{(5-x)(5+x)}$$

Ahora bien, como en el numerador tenemos $(x-5)$ y en el denominador $(5-x)$, podemos, según una de las propiedades de las fracciones, multiplicar arriba y abajo por una misma cantidad, y no se nos altera la fracción.

$$\frac{(x-5)(x-4)}{(5-x)(5+x)} = \frac{-1(x-5)(x-4)}{-1(5-x)(5+x)} = \frac{(5-x)(x-4)}{-(5-x)(5+x)}$$

Ahora procedamos a simplificar

$$\frac{(5-x)(x-4)}{(5-x)(5+x)} = \frac{x-4}{5+x} = \frac{4-x}{5+x}$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Reducir a su más simple expresión las siguientes fracciones indicando el m.c.d.

1.- $\frac{4x^2}{12x^7} = \frac{\quad}{\quad}$; m.c.d. = $\frac{\quad}{\quad}$

2.- $\frac{8a^2b^3}{24a^3b^2} = \frac{\quad}{\quad}$; m.c.d. = $\frac{\quad}{\quad}$

3.- $\frac{32x^2y^4z^3}{16x^4y^3z^4} = \frac{\quad}{\quad}$; m.c.d. = $\frac{\quad}{\quad}$

4.- $\frac{75a^7m^5}{100a^3m^{12}n^3} = \frac{\quad}{\quad}$; m.c.d. = $\frac{\quad}{\quad}$

5.- $\frac{24ab^2c}{18a^2bc^2} = \frac{\quad}{\quad}$; m.c.d. = $\frac{\quad}{\quad}$

6.- $\frac{12a^2b^3}{60a^3b^5c^6} = \frac{\quad}{\quad}$; m.c.d. = $\frac{\quad}{\quad}$

7.- $\frac{27a^2b^2c^3d^4}{63a^3b^3c^4d^5} = \frac{\quad}{\quad}$; m.c.d. = $\frac{\quad}{\quad}$

8.- $\frac{(25a^2b^5)(15a^3b^6)}{150a^6b^6} = \frac{\quad}{\quad}$; m.c.d. = $\frac{\quad}{\quad}$

Factorizar y reducir a su mínima expresión, las fracciones siguientes, llenando los espacios indicados.

9.- $\frac{3x^2y + 15xy}{x^2 - 25} = \frac{3xy(\quad)}{(x + 5)(\quad)} = \frac{\quad}{\quad}$

10.- $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x + 3)(\quad)}{(\quad)(x + 2)} = \frac{\quad}{\quad}$

11.- $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{(a - b)(\quad)}{(a - b)(\quad)} = \frac{\quad}{\quad}$

12.- $\frac{a^3 - 2a^2 - a + 2}{a^3 + 2a^2 - a - 2} = \frac{a^2(\quad) - (a - 2)}{a^2(a + 2) - (\quad)} = \frac{(a - 2)(\quad)}{(a + 2)(\quad)}$

13.- $\frac{9 - 6x + x^2}{9 - 9x + 2x^2} = \frac{(3 - x)(\quad)}{(3 - 2x)(\quad)} = \frac{\quad}{\quad}$

Reduzca cada fracción a términos mínimos.

14.- $\frac{b^2 - a^2}{(a - b)^2} = \frac{\quad}{\quad}$

15.- $\frac{a^2 - b^2}{2a^2 + ab - b^2} = \frac{\quad}{\quad}$

16.- $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 + b^3} = \frac{\quad}{\quad}$

17.- $\frac{3x^2 - 11x + 6}{3x^2 + x - 2} = \frac{\quad}{\quad}$

18.- $\frac{c^3 + 3c^2 + 2c + 6}{c^3 - c^2 + 2c - 2} = \frac{\quad}{\quad}$

1-3 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES.

Las siguientes propiedades nos proporcionan procedimientos para multiplicar y dividir fracciones:

- a) El producto de dos o más fracciones es igual al producto de los numeradores dividido entre el producto de los denominadores, es decir:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \text{ donde } b, d \neq 0$$

- b) El cociente de dos fracciones es igual al dividendo multiplicado por el divisor invertido, es decir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}; \text{ donde } b, c, d \neq 0$$

Es con frecuencia deseable reducir el producto, o el cociente, de fracciones a términos mínimos. Siendo éste el caso, el mejor procedimiento es escribir cada fracción en la forma factorizada, donde, factores comunes del numerador y del denominador pueden entonces suprimirse.

EJEMPLO:

Realizar las operaciones indicadas.

$$\frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - x - 2}$$

Solución:

Como el producto de dos o más fracciones, es el producto de los numeradores, divididos, entre el producto de los denominadores, tenemos que:

$$\frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - x - 2} = \frac{(2x^2 - x - 3)(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 - 1)(3x^2 - x - 2)}$$

luego, factorizando el numerador y denominador nos queda

$$\frac{(2x^2 - x - 3)(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 - 1)(3x^2 - x - 2)} = \frac{(2x - 3)(x + 1)(x - 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)(x - 1)(3x + 2)} =$$

para luego suprimir los factores comunes quedando

$$= \frac{(2x - 3)(x + 1)(x - 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)(x - 1)(3x + 2)} = \frac{2x - 3}{3x + 2}$$

EJEMPLO:

Dividamos $\frac{y^3 - 1}{y^2 - 9}$ por $\frac{y^2 + y + 1}{y^2 - 2y - 3}$

Solución:

Para encontrar el cociente, invertimos el divisor, es decir:

$$\frac{y^3 - 1}{y^2 - 9} \div \frac{y^2 + y + 1}{y^2 - 2y - 3} = \frac{y^3 - 1}{y^2 - 9} \cdot \frac{y^2 - 2y - 3}{y^2 + y + 1}$$

Factorizando los numeradores y denominadores de las fracciones tenemos que:

$$\frac{y^3 - 1}{y^2 - 9} \cdot \frac{y^2 - 2y - 3}{y^2 + y + 1} = \frac{(y - 1)(y^2 + y + 1)}{(y + 3)(y - 3)} \cdot \frac{(y - 3)(y + 1)}{(y^2 + y + 1)}$$

suprimiendo los factores comunes, nos queda por último

$$\frac{(y-1)(y^2+y+1)(y-3)(y+1)}{(y+3)(y-3)(y^2+y+1)} = \frac{(y-1)(y+1)}{y+3}$$

EJEMPLO:

Efectuaremos las multiplicaciones de fracciones siguientes:

$$\frac{x^2-3x+2}{2x^2+3x-2} \cdot \frac{2x^2+5x-3}{x^2-1} \cdot \frac{3x^2+6x}{2x-4}$$

Solución:

Factorizando los numeradores y denominadores de las fracciones tenemos

$$= \frac{(x-2)(x-1)}{(2x-1)(3x-2)} \cdot \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{3x(x+2)}{2(x-2)}$$

luego, por último, suprimiendo los factores comunes en el numerador y denominador, resulta.

$$= \frac{3x(x+3)}{2(x+1)}$$

EJEMPLO:

Realicemos las operaciones indicadas.

$$\frac{a^2-7a+12}{a^2-6a+8} \cdot \frac{a^2+3a-10}{a^2-10a+21} + \frac{a+5}{a-7}$$

Solución:

Cuando haya que efectuar operaciones, en las que se combinen

multiplicaciones y divisiones se procede primero a convertir los divisores en factores, invirtiéndolos y procediendo según la regla de multiplicación; es decir, invirtiendo el divisor y factorizando, obtenemos:

$$= \frac{(a-3)(a-4)}{(a-4)(a-2)} \cdot \frac{(a+5)(a-2)}{(a-7)(a-3)} \cdot \frac{(a-7)}{(a+5)} = 1$$

Frecuentemente se observan con mayor claridad los términos que pueden cancelarse, si previamente, se ordenan y se hacen los cambios permitidos de signos en los términos de los miembros de las fracciones. Por ejemplo, en la siguiente multiplicación de fracciones

$$\frac{(a+2b)}{(a^2-b^2)} \cdot \frac{(2b-a)}{(b-a)} \cdot \frac{(a+b)}{(4b^2-a^2)}$$

En este problema, algunos de los términos en que aparece "a" son positivos. Sin embargo, si se cambian ambos signos en los miembros de la segunda fracción, y se cambia el signo que antecede a la tercera fracción cambiando los dos signos de su denominador y se ordenan los términos, se tiene:

$$\frac{(a+2b)}{(a^2-b^2)} \cdot \frac{(a-2b)}{(a-b)} \cdot \frac{(a+b)}{-(a^2-4b^2)}$$

$$= \frac{(a+2b)}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{(a-2b)}{(a-b)} \cdot \frac{-(a-2b)(a+2b)}{(a-b)^2}$$

Debe observarse que, supresión reemplaza cada numerador por la unidad, así que, el numerador del producto es uno y no cero.

También, al igual que en el caso de reducir fracciones a su mínima expresión, la supresión descuidada puede conducir a errores graves. En la siguiente expresión, sería un error suprimir $(2a+b)$.

$$(2a + b) + 5$$

$$(2a + b)(2a - b)$$

Por ejemplo, tiene $2a + b$ como un factor del denominador, pero $2a + b$ es un término del numerador, no un factor.

Resumiendo, las operaciones de multiplicación y división de fracciones, diremos que:

- 1) Se descomponen en factores todo lo posible, los términos de las fracciones que se van a multiplicar o dividir.
- 2) En el caso de la división se invierten los términos de la fracción divisor y se multiplican, el dividendo por el divisor invertido.
- 3) Se simplifica, suprimiendo los factores comunes, en los numeradores y denominadores.
- 4) Se multiplican sí las expresiones que quedan en los numeradores; después de simplificar, y este producto se parte por el producto de las expresiones que quedan en los denominadores.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

$$1. \frac{3a}{2b} \cdot \frac{4ab}{9c} \cdot \frac{3c^2}{4a^2}$$

$$2. \frac{2a^2}{3b} \cdot \frac{6b^2}{4a}$$

$$3. \frac{7y}{12x^2} \cdot \frac{10xy^2}{3z} \cdot \frac{6xz^2}{5y}$$

$$4. \frac{5}{a} \cdot \frac{2a}{b^2} \cdot \frac{3b}{10}$$

$$5. \frac{14u^2}{5v} \cdot \frac{10v^2}{21vw} \cdot \frac{9w^2}{8u^2v}$$

$$6. \frac{x^2}{3y^2} \div \frac{2x}{y^3}$$

$$7. \frac{6a^2x^3}{5} \div \frac{a^2x}{5}$$

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar, llenando los espacios indicados.

$$8. \frac{5a - 5b}{3a + 6b} \cdot \frac{a + 2b}{a - b} = \frac{5(\quad)}{(\quad)(a + 2b)} \cdot \frac{a + 2b}{a - b} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$9. \frac{4x - 2y}{5x + 10y} \cdot \frac{x^2 + 2xy}{2xy - y^2} = \frac{2(\quad)}{(\quad)(x + 2y)} \cdot \frac{x(\quad)}{y(\quad)} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$10. \frac{2a(a + b)^2}{3b^3} \cdot \frac{b^2(a - b)}{8a^3(a + b)} \cdot \frac{12a^2b^2}{a^2 - b^2} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$11. \frac{x - y}{x + y} \cdot \frac{x^2 + xy}{x^2y^2 - xy^3} \cdot \frac{y}{x^2} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$12. \frac{1}{a^2 - a - 30} + \frac{2}{a^2 + a - 42} = \frac{1}{(a - 6)(\quad)} + \frac{(a + 7)(\quad)}{2} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$13. \frac{a^2 - 6a}{a^3 + 3a^2} + \frac{a^2 + 3a - 54}{a^2 + 9a} = \frac{a(\quad)}{(\quad)(a+3)} - \frac{a(\quad)}{(a+9)(\quad)} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

$$14. \frac{x^3 + 125}{x^2 - 64} \div \frac{x^3 - 5x^2 + 25x}{x^2 + x - 56} = \frac{(x+5)(\quad)}{(x+8)(\quad)} \cdot \frac{x(\quad)}{(\quad)}$$

$$15. \frac{25a^2b^2}{12c^2} \cdot \frac{36bc^3}{5a^3} \cdot \frac{15b^3}{7ac} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

$$16. \frac{h^2 - 9}{k^2 - 9k} \cdot \frac{hk - 9h}{hk + 3k} \div \frac{h^3 - 3h^2}{k^3} = \frac{(h+3)(\quad)}{k(\quad)} \cdot \frac{h(\quad)}{k(\quad)} \cdot \frac{k^3}{(\quad)(h-3)}$$

Realiza las operaciones indicadas y simplifica.

$$17. \frac{3a^2 + a - 10}{8a^2 - 2a - 3} \cdot \frac{10a^2 + a - 2}{3a^2 + 20a + 25} \div \frac{5a^2 + 8a - 4}{12a^2 + 11a - 15}$$

$$18. \frac{x^2 + 4xy - 12y^2}{x^2 + 7xy + 6y^2} \cdot \frac{x^2 - 6xy - 7y^2}{x^2 - xy - 12y^2} \div \frac{x^2 - 9xy + 14y^2}{x^2 - xy - 12y^2}$$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 1.

AUTOEVALUACIÓN 1.

- 1.- $1/3x^2; 4x^5$
- 2.- $b/3a; 8a^2b^2$
- 3.- $2y/x^2z; 16x^2y^3z^3$
- 4.- $3a^4/4m^7n^3; 25a^3m^5$
- 5.- $4b/3ac; 6abc$
- 6.- $1/5ab^2x^6; 12a^3b^3$
- 7.- $3/7abcd; 9a^2b^2c^3d^4$
- 8.- $5b^5/2a; 75a^5b^6$
- 9.- $3xy(x+5)/(x+5)(x-5) = 3xy/x-5$
- 10.- $(x+3)(x-2)/(x+3)(x+2) = x-2/x+2$
- 11.- $(a-b)(a^2+ab+b^2)/(a+b)(a-b) = a^2+ab+ab^2/a+b$
- 12.- $(a-2)(a^2-1)/(a+2)(a^2-1) = a-2/a+2$
- 13.- $(3-x)(3-x)/(3-2x)(3-x) = (3-x)/(3-2x)$
- 14.- $b + a/b - a$
- 15.- $a - b/2a - b$
- 16.- $1/a + b$
- 17.- $x - 3/x + 1$
- 18.- $c + 3/c - 1$

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- $c/2$

2.- ab

3.- $7y^2z/3$

4.- $3/b$

5.- $3w/2v$

6.- $xy/6$

7.- $30x^2$

8.- $\frac{5(a-b)}{3(a+2b)} ; 5/3$

9.- $\frac{2(2x-y)}{5(x+2y)} \cdot \frac{x(x+2y)}{y(2x-y)} = \frac{2x}{5y}$

10.- $b/2$

11.- $1/x^2y$

12.- $\frac{1}{(a-6)(a+5)} \cdot \frac{(a+7)(a-6)}{2} = \frac{a+7}{2a+10}$

13.- $\frac{a(a-6)}{a^2(a+3)} \cdot \frac{a(a+9)}{(a+9)(a-6)} = \frac{1}{a+3}$

14.- $\frac{(x+5)(x^2+5x+25)}{(x+8)(x-8)} \cdot \frac{(x+8)(x-7)}{x(x^2-5x+25)} = \frac{(x+5)(x-7)}{x(x-8)}$

15.- $7c^2$

16.- $\frac{(h+3)(h-3)}{k(k-9)} \cdot \frac{h(k-9)}{k(h+3)} \cdot \frac{k^3}{h^2(h-3)} = \frac{k}{h}$

17.- $\frac{3a-5}{a+5}$

18.- 1

OPERACIONES CON LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

En esta unidad terminamos las operaciones con fracciones algebraicas. Aprenderás a sumar y restar fracciones algebraicas y a usar la factorización para encontrar el común denominador.

Al término de esta unidad, el estudiante estará en condición de:

- 1. Seleccionar correctamente el concepto de mínimo común denominador (m.c.d.).
- 2. Reducir, dos o más fracciones algebraicas, al mismo común denominador.

Aplicar correctamente las propiedades conmutativa y asociativa, para sumar dos o más fracciones algebraicas que tengan el mismo denominador.

- 3. Con el mismo denominador.
- 4. Con denominadores diferentes.
- 5. Con denominadores polinomios.

UNIDAD XIV

OPERACIÓN CON LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

En esta unidad terminamos las operaciones con fracciones algebraicas. Aprenderás a sumar y restar fracciones algebraicas y a usar factorización para encontrar el común denominador.

Al término de esta unidad, el estudiante estará en condición de;

OBJETIVOS:

1. Definir correctamente, el concepto de mínimo común denominador (m.c.d.).
2. Reducir, dos o más fracciones algebraicas, al mínimo común denominador.
3. Aplicar correctamente, las propiedades conmutativa y asociativa, para sumar dos o más fracciones algebraicas que involucren los siguientes casos:
 - a) Con el mismo denominador.
 - b) Con denominadores diferentes.
 - c) Con denominadores monomios.
 - d) Con denominadores polinomios.

4. Aplicar el objetivo anterior para la resta, así como para la suma y resta combinadas, de fracciones algebraicas.
5. Simplificar las fracciones complejas hasta transformarlas en irreducibles.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1. Estudia la lección 2 del capítulo VI. Los primeros dos objetivos son de suma importancia que los domines, ya que, en los objetivos siguientes los vas a aplicar. Para que los resuelvas satisfactoriamente, estudia la sección 6-4 y resuelve la autoevaluación 1.

Objetivo 3. Estudia la sección 5. Debes tener presente que, así como en aritmética, para sumar fracciones deben tener como condición necesaria un común denominador, en el álgebra, para poder efectuar la suma de fracciones algebraicas, también deben tener un común denominador. En este objetivo se analizan los diferentes tipos de fracciones, que son con monomios y polinomios. En el caso de los polinomios recuerda que debes descomponerlo primero en factores y luego sacar el mínimo común múltiplo de los denominadores. Para la práctica de este objetivo resuelve las autoevaluaciones 2 y 3.

Objetivo 4. Estudia las secciones 6 y 7. Para este objetivo, se aplica el mismo concepto, que es, el común denominador y el de descomponer en factores un monomio ó polinomio. Resuelve, como práctica de este objetivo, las autoevaluaciones 4, 5 y 6.

Objetivo 5. Estudia la sección 8. Una fracción compleja es aquella fracción que consta de una o más fracciones en el numerador o/y en el denominador. Te sugerimos, analices primero los ejemplos que se incluyen, para que observes el proceso que se utiliza, para expresarla en su mínima expresión. Una vez que hayas aprendido a reducir una fracción compleja, resuelve la autoevaluación 7.

2. Como ritmo de trabajo, te sugerimos el siguiente:

- 1er. día - Objetivos 1 y 2.
- 2do. día - Objetivo 3.
- 3er. día - Objetivo 4.
- 4to. día - Objetivos 4 y 5.

AUTOEVALUACIÓN

Encontrar el mínimo común denominador de las siguientes fracciones:

1. $1/5, 1/15$

- 0) 10
- 1) 5
- 2) 15
- 3) 75
- 4) 30

2. $2/3, 4/9, 1/18$

- 0) 36
- 1) 54
- 2) 9
- 3) 18
- 4) 27

3. $1/x, 2/xy, 3/2y$

- 0) $2xy$
- 1) $3xy$
- 2) xy
- 3) $x + y$
- 4) $x - y$

4. $3/(x - 3), 4x/(x + 3), 5x^2/(x^2 - 9)$

- 0) $(x - 3)^2$
- 1) $x^2 - 9$
- 2) $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 3)$
- 3) $(x + 3)^2$
- 4) $x^2 + 9$

Sumar correctamente las fracciones algebraicas.

5. $2/4 + 1/4 + 3/4$

- 0) $5/4$ 1) $7/4$ 2) $3/4$
 3) 1 4) $3/2$

6. $5/3a + 6b/3a + 7b^2/3a$

- 0) $(5 + 6b + 7b^2)/9a$ 1) $(18b + b^2)/3a$
 2) $(5 + 6b + 7b^2)/3a$ 3) $7b^2/3a$
 4) $(5 + 6b + 7b^2)/27a^3$

7. $a/7 + 3a/7 + 5a/21$

- 0) $17a/21$ 1) $(4a + 5)/21$ 2) $(4a + 5)/7$
 3) $19a/21$ 4) $14a/7$

8. $1/a + 1/b + 1/c$

- 0) $(ac + bc)/abc$ 1) $(ac + ab + bc)/abc$
 2) $1/abc$ 3) $abc/3$
 4) $(ab + ac)/abc$

9. $8/9 - 4/9 - 3/9$

- 0) $7/9$ 1) $1/9$ 2) $6/9$
 3) $8/9$ 4) $2/9$

10. $1/2 - 1/5 - 2/10$

- 0) $1/10$ 1) $2/5$ 2) $1/5$
 3) $2/3$ 4) $3/10$

11. $2/y - 1/y - 1/3$

- 0) $(6 - y)/6$ 1) $(3 - y)/3y$ 2) $(6 - y)/6y$
 3) $(3 - y)/3$

12. $5/3 - 1/4 + 2/8$

- 0) $5/3$ 1) $10/3$ 2) $5/6$
 3) $4/3$ 4) $10/7$

13. $3y/c - 2c^2/3y^2 + 2y^2/6c^2$

- 0) $(y^3c^2 + 3c^3 - 3y^4)/y^2c^2$ 1) $(2y^2c - c^3 + 3y^3)/3yc$
 2) $(18y^3c - 4c^4 + 2y^4)/6y^2c^2$ 3) $(9yc^3 + 3c^5 - 2y)/6yc$
 4) $(3yc - 2c + 3y)/6y^2c^2$

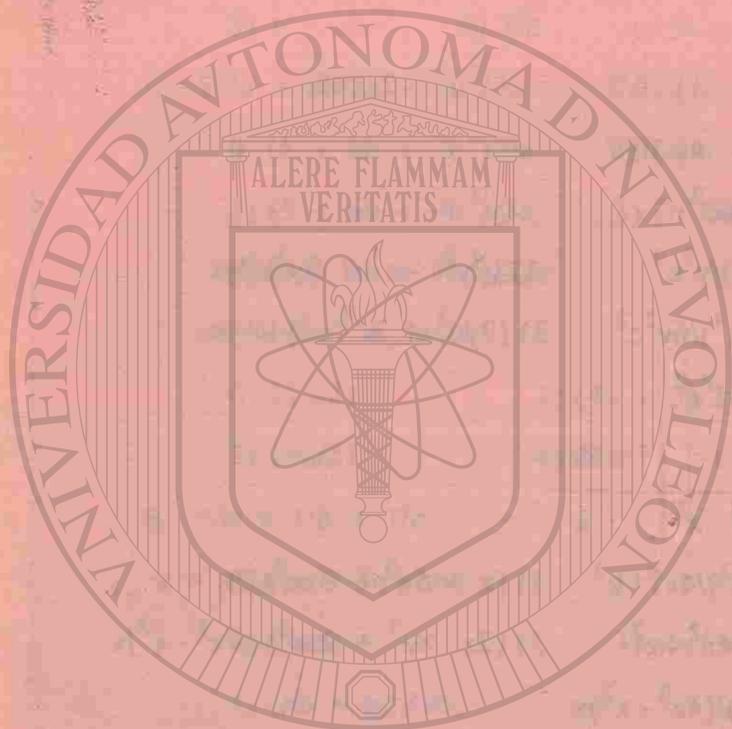
14. $\frac{1}{x(2z + y)} + \frac{1}{4z^2 - x^2} - \frac{2z}{x}$

- 0) $(3z + 5z^2 + 2zx^2)/4x^2 - z^2$ 1) $(z + 5z^3 + 3zx^3)/2z + z$
 2) $(3z - 2z^3 + zx^2)/4x^2 - z^2$ 3) $(2z - 8z^3 + 2zx^2)/(4z^2 - x^2)x$
 4) $(3z + 8z^2 - 2zx^3)/(4z^2 - x^2)x$

Reduce a fracción simple la siguiente fracción compleja.

15. $\frac{2z + \frac{z}{5}}{c + \frac{2c}{3} - \frac{c}{5}}$

- 0) $5z/c$ 1) z/c 2) $8c/2z$
 3) $3z/2c$ 4) $z/5c$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 2.

1-4 REDUCCIÓN DE UNA FRACCIÓN A UN MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR.

Definición.

Reducir, dos o más fracciones, a un común denominador, es hallar otras, respectivamente equivalentes a las primeras, cuyos denominadores sean iguales.

Reducción a un común denominador.

Consideremos las fracciones,

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n}$$

si se multiplican los dos términos de la primera fracción por dn , los de la segunda por bn , y los de la tercera por bd , ninguna de las fracciones cambia de valor, y se convierten respectivamente en:

$$\frac{adn}{bdn}, \frac{cbn}{bdn}, \frac{mbd}{bdn}$$

como se ve tienen el mismo denominador.

Por lo expuesto, resulta que para reducir dos o más fracciones, a un común denominador, se multiplican ambos miembros de cada una de ellas, por el producto de los denominadores de todas las demás.

Fracciones reducidas a su mínimo común denominador.

Con el objeto de evitar, denominadores muy grandes, es preferible, siempre que sea posible, reducir las fracciones a su menor denominador, es decir, transformarlas en otras, respectivamente equivalentes a las propuestas, cuyo denominador común sea mínimo.

Por ejemplo, consideremos las fracciones,

$$\frac{2a}{5(a^2 - 4)} \quad \text{y} \quad \frac{6a}{35(a^2 - 6a + 8)}$$

Para reducir las a su menor común denominador, se debe hallar una expresión, que sea múltiplo de $5(a^2 - 4)$ y al mismo tiempo de $35(a^2 - 6a + 8)$, y tal que su coeficiente sea el mínimo común múltiplo, de los coeficientes de los denominadores y que el grado de la parte literal sea mínimo.

El primer denominador, $5(a^2 - 4)$, se descomponga en: $5(a + 2)(a - 2)$, y el segundo, $35(a^2 - 6a + 8)$ es igual a $5 \cdot 7(x - 2)(x - 4)$; entonces, en vez de tomar como denominador común el producto de $5(a^2 - 4)$ por $35(a^2 - 6a + 8)$, basta tomar $5 \cdot 7(x + 2)(x - 2)(x - 4)$, que es el m.c.m. de los denominadores de las fracciones dadas.

Si a la primera fracción, se le da por denominador,

$$35(a + 2)((a - 2)(a - 4)) = 35(a^2 - 4)(a - 4)$$

dicho denominador queda multiplicado por, $7(a - 4)$ para que no se altere el valor de la fracción hay que multiplicar el numerador, por el mismo factor, y así se obtiene:

$$\frac{2a \cdot 7(a - 4)}{35(a + 2)(a - 2)(a - 4)} = \frac{14a(a - 4)}{35(a^2 - 4)(a - 4)}$$

dando a la segunda fracción el mismo denominador, el suyo queda multiplicado por $(a + 2)$; para no alterar el valor de la fracción, hay que multiplicar también el numerador por, $(a + 2)$, y así resulta:

$$\frac{6a(a + 2)}{35(a + 2)(a - 2)(a - 4)} = \frac{6a(a + 2)}{35(a^2 - 4)(a + 2)}$$

El mínimo común múltiplo.

El mínimo común múltiplo, (m.c.m.) de un conjunto de polinomios, es el polinomio de menor grado, y con los mínimos coeficientes enteros, que sea divisible exactamente, entre cada polinomio del del conjunto.

El grado de un polinomio, es el grado de su término de mayor grado. El grado de un término, es la suma de los exponentes que aparecen en él.

Por ejemplo, el grado de, $2x^3 - 3x^2 + 4x$ es 3, y el grado de $3x^2y^2 - 2xy + 3y^2$ es 4

EJEMPLOS:

- 1) El m.c.m. de, $3x$; $4x^2y$; $8x^5y^2$ y de $36x^4$ es, $72x^5y^2$.
- 2) El m.c.m. de, $2(x - y)$; $3(x + y)$; y de $(x - y)^2$, es $6(x - y)(x + y)$.

Si los polinomios están factorizados, se observa que, por definición, el m.c.m. factorizado, debe satisfacer los requisitos siguientes:

- 1.- Cada factor, de cada polinomio, debe aparecer como factor del m.c.m. Además, cada factor del m.c.m., debe estar elevado a una potencia igual, a la mayor que dicho factor tenga, en cualquiera

de los polinomios factorizados.

- 2.- El m.c.m. no puede tener un factor, que no aparezca en alguno de los polinomios factorizados.

De ese modo, se tiene el siguiente método, para obtener el m.c.m. de un conjunto de polinomios;

- 1.- Se factoriza, cada uno de los polinomios.
- 2.- Se escribe el m.c.m., cada uno de los diferentes factores primos, de los polinomios, y luego se eleva cada factor, a la mayor potencia con que aparezca en alguno de los polinomios factorizados. (Número primo, es un número que no tiene más factores, que él mismo y la unidad).

EJEMPLO:

Encontrar el m.c.m. de los siguientes polinomios:

$$x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2$$

$$x^2 - 3xy + 2y^2$$

$$2x^2 + 3xy + y^2$$

SOLUCIÓN:

Se escriben factorizados cada uno de estos polinomios, como se muestra en seguida:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = (x - 2y)(x - y)$$

$$2x^2 + 3xy + y^2 = (2x + y)(x + y)$$

Los factores primos que aparecen arriba son $(x - y)$; $(x + y)$; $(x - 2y)$ y $(2x + y)$. Sin embargo, $(x - y)$ y $(x + y)$ tienen exponente 2, en el primero y en el segundo de los polinomios, respectivamente. Por tanto, el m.c.m. es, $(x - y)^2(x + y)^2(x - 2y)(2x + y)$.

Reducción de fracciones al mínimo común denominador empleando el mínimo común múltiplo (m.c.m.).

Para reducir, dos o más fracciones a su mínimo común denominador, por el método del m.c.m., se pueden seguir los siguientes pasos:

- 1.- Se toma como denominador común, el m.c.m. de los denominadores.
- 2.- Se divide ese común denominador, entre el denominador de cada fracción.
- 3.- Se multiplica el numerador de cada fracción, por el cociente respectivo obtenido.

EJEMPLOS:

Reducir, a su mínimo común denominador:

$$1) \frac{5ax^2}{8by^2}, \frac{7by}{10x^2z}, \frac{8cx^3}{15yz^3}$$

$$\text{m.c.m. } (8, 10, 15) = 120$$

$$\text{m.c.m. } (8by^2, 10x^2z, 15yz^3) = 120bx^2y^2z^3$$

Efectuando las operaciones indicadas resulta:

$$\frac{75ax^4z^3}{120bx^2y^2z^3}, \frac{84b^2y^3z^2}{120bx^2y^2z^3}, \frac{64bcx^5y}{120bx^2y^2z^3}$$

(2) Reducir, a su mínimo común denominador:

$$\frac{2}{3m^3 - 12m^2}, \frac{m}{m^2 - 6m + 8}, \frac{m^2}{m^3 - 8}$$

Factorizando los denominadores se tiene:

$$3m^3 - 12m^2 = 3m^2(m - 4)$$

$$m^2 - 6m + 8 = (m - 2)(m - 4)$$

$$m^3 - 8 = (m - 2)(m^2 + 2m + 4)$$

Por tanto, el mínimo común denominador es:

$$3m^2(m - 4)(m - 2)(m^2 + 2m + 4)$$

y las fracciones, se transforman respectivamente en:

$$\frac{2(m - 2)(m^2 + 2m + 4)}{3m^2(m - 2)(m - 4)(m^2 + 2m + 4)}$$

$$\frac{m \cdot 3m^2(m^2 + 2m + 4)}{m^2 \cdot 3m^2(m - 4)(m^2 + 2m + 4)}$$

$$\frac{3m^2(m - 2)(m - 4)(m^2 + 2m + 4)}{m^2 \cdot 3m^2(m - 4)}$$

$$\frac{m^2 \cdot 3m^2(m - 4)}{3m^2(m - 2)(m - 4)(m^2 + 2m + 4)}$$

$$\frac{m^2 \cdot 3m^2(m - 4)}{3m^2(m - 2)(m - 4)(m^2 + 2m + 4)}$$

$$\frac{m^2 \cdot 3m^2(m - 4)}{3m^2(m - 2)(m - 4)(m^2 + 2m + 4)}$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Transforma la siguiente fracción en una equivalencia, cuyo denominador sea, la expresión que aparece a la derecha.

1.- $\frac{5a}{3bc}, 15ab^2c^2$

2.- $\frac{4r}{9s \cdot t}, 27r^2s^2t^5$

3.- $\frac{2a}{3a - 1}, (3a - 1)(2a + 3)$

4.- $\frac{3x + 2y}{2x - 3y}, 4x^2 - 9y^2$

5.- $\frac{3a + 4b}{5a - 2b}, 15a^2 - 26ab + 8b^2$

Reducir al mínimo común denominador.

6.- $\frac{2a}{36c}, \frac{4b^2}{9c^2}, \frac{5c^3}{12a^2c^3}, \text{m.c.d.} = \underline{\hspace{2cm}}$

7.- $\frac{4x}{9y^2z}, \frac{5y}{12xz^2}, \frac{8z}{15x^2y}, \text{m.c.d.} = \underline{\hspace{2cm}}$

8.- $\frac{5w^2}{12u^2v}, \frac{7v^2}{24uw^2}, \frac{8u^2}{27v^2w}, \text{m.c.d.} = \underline{\hspace{2cm}}$

$$9.- \frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{a - b}{(a + b)^2}, \frac{a + b}{(a - b)^2}, \text{m.c.d.} =$$

$$10.- \frac{2u + v}{4u^2 - 9v^2}, \frac{2u - 3v}{4u^2 + 8uv + 3v^2}, \frac{2u + 3v}{4u^2 - 4uv - 3v^2}, \text{m.c.d.} =$$

Nota:

Generalmente es preferible, indicar la multiplicación en el denominador, sin efectuarla; así se ve más rápidamente, por qué factores, a sido multiplicado el denominador de cada fracción y por tanto, qué factores deben multiplicar también su numerador.

1-5 SUMA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Definición.

La adición o suma, es una operación que tiene por objeto, reunir varios números de la misma especie, en uno solo.

Los números que se suman, se llaman sumandos, y el resultado se denomina, suma o total.

El signo de la operación de sumar, es una cruz (+), que se lee más, y se coloca entre los sumandos.

En la suma de fracciones algebraicas se distinguen dos casos:

Primer caso: Las fracciones algebraicas tienen igual denominador.

Para sumar fracciones algebraicas de igual denominador, se suman algebraicamente los numeradores y el resultado se le da, el denominador común.

EJEMPLOS.

$$\frac{x}{5} + \frac{2y}{5} = \frac{x + 2y}{5}$$

$$\frac{8a}{7b} + \frac{-5a}{7b} = \frac{8a - 5a}{7b} = \frac{3a}{7b}$$

$$\frac{3a + 2b}{ab} + \frac{5a - 3b}{ab} + \frac{2a + 5b}{ab} = \frac{3a + 2b + 5a - 3b + 2a + 5b}{ab}$$

$$= \frac{10a + 4b}{ab}$$

Segundo caso: Las fracciones algebraicas, que no tienen igual denominador, se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores, se reducen las fracciones a otras equivalentes, que tengan como denominador, el mínimo común múltiplo o común denominador y se efectúa la suma.

EJEMPLOS:

Sumar;

$$\frac{a}{6} + \frac{2a}{5} + \frac{3a}{4}$$

El común denominador de 6, 5 y 4 es, 60.

$$\frac{a}{6} = \frac{10a}{60}; \frac{2a}{5} = \frac{24a}{60}; \frac{3a}{4} = \frac{45a}{60}$$

$$\frac{a}{6} + \frac{2a}{5} + \frac{3a}{4} = \frac{10a}{60} + \frac{24a}{60} + \frac{45a}{60}$$

$$\frac{10a + 24a + 45a}{60} = \frac{79a}{60}$$

EJEMPLO:

Sumar;

$$\frac{a+b}{a} + \frac{2a-3b}{b} + \frac{5a^2-2b^2}{ab}$$

El común denominador de a, b y ab es, ab.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{(a+b)b}{ab} = \frac{ab+b^2}{ab}$$

$$\frac{2a-3b}{b} = \frac{(2a-3b)a}{ab} = \frac{2a^2-3ab}{ab}$$

Por tanto:

$$\frac{a+b}{a} + \frac{2a-3b}{b} + \frac{5a^2-2b^2}{ab} = \frac{ab+b^2}{ab} + \frac{2a^2-3ab}{ab} + \frac{5a^2-2b^2}{ab}$$

$$\frac{ab + b^2 + 2a^2 - 3ab + 5a^2 - 2b^2}{ab} = \frac{7a^2 - 2ab - b^2}{ab}$$

EJEMPLO:

Suma.

$$\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2} + \frac{x-y}{x^2-2xy+y^2} + \frac{2x+2y}{x^2-y^2}$$

Antes de comenzar cualquier operación, deben simplificarse las

fracciones, siempre que se pueda,

$$\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2} = \frac{1}{x+y}$$

$$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2} = \frac{1}{x-y}$$

$$\frac{2x+2y}{x^2-y^2} = \frac{2}{x-y}$$

Por tanto,

$$\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2} + \frac{x-y}{x^2-2xy+y^2} + \frac{2x+2y}{x^2-y^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{2}{x-y}$$

Ahora el común denominador de, $x+y$ y $x-y$, es x^2-y^2 luego,

$$\frac{1}{x+y} = \frac{x-y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{1}{x-y} = \frac{x+y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{2}{x-y} = \frac{2x+2y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{x-y}{x^2-y^2} + \frac{x+y}{x^2-y^2} + \frac{2x+2y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{2}{x-y} = \frac{x-y+x+y+2x+2y}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{4x+2y}{x^2-y^2}$$

En la práctica, para sumar fracciones algebraicas, se simplifican cuando se puede, se busca el común denominador, se divide el común denominador, entre el denominador de cada una de las fracciones y el resultado, se multiplica por el numerador de la fracción, luego, se reducen los términos semejantes.

EJEMPLOS:

Sumar,

$$\frac{2a}{5b} + \frac{3b}{7a} + \frac{2b}{5a} = \frac{(2a)(7a) + (3b)(5b) + (2b)(7b)}{35ab}$$

$$= \frac{14a^2 + 15b^2 + 14b^2}{35ab} = \frac{14a^2 + 29b^2}{35ab}$$

Sumar,

$$\frac{x+2}{x^2-4} + \frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+3}{x^2+6x+9} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3}$$

$$= \frac{x+3+x-2+x-2}{x^2+x-6} = \frac{3x-1}{x^2+x-6}$$

Sumar,

$$\frac{5x-5y}{x^2-y^2} + \frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3} + \frac{3}{x+y} = \frac{5}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{3}{x+y} + \frac{8}{x+y} + \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{8(x-y) + 1(x+y)}{x^2-y^2} = \frac{9x-7y}{x^2-y^2}$$

Propiedades de la suma con fracciones algebraicas.

La suma de fracciones algebraicas, es una operación conmutativa y asociativa, es decir:

Conmutativa; porque indistintamente, se puede obtener la misma suma, a pesar de cambiar el orden de los sumandos.

EJEMPLO:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{12+4+3}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$$

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4+12+3}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{3+4+12}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$$

Asociativa; porque se puede agrupar dos o más sumandos, y obtener una suma parcial que, agregada a los sumandos restantes, da el mismo resultado, que efectuada la suma en forma corriente.

EJEMPLO:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{5}{4} = \frac{36+40+45+20+12+75}{60}$$

$$= \frac{228}{60} = 3\frac{48}{60} = 3\frac{4}{5}$$

Asociando fracciones, con el mismo denominador, se tiene:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{4}{5} + 1 + 2 = 3\frac{4}{5}$$

por tanto,

Ley de cerradura para la adición de fracciones.

Dados, los números racionales a/b y c/d, en ese orden, existe un único número racional, llamado la suma de estos dos números racionales.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ número racional}$$

Suma de fracciones con denominadores monomios.

EJEMPLO:

Sumar, $\frac{2}{5x^2}$ y $\frac{1}{3xy}$

Hay que reducir las fracciones, al mínimo común denominador.

El m.c.m. de los denominadores es $15x^2y$, dividiendo $15x^2y$, entre los denominadores, tenemos;

$15x^2y - 5x^2 = 3y$ y, $15x^2y - 3xy = 5x$, estos cocientes, los multiplicamos por los numeradores respectivos y tenemos,

$$\frac{2}{5x^2} + \frac{1}{3xy} = \frac{2(3y) + 5x(1)}{15x^2y}$$

sumando los numeradores $= \frac{6y + 5x}{15x^2y}$

EJEMPLO;

Sumar, $\frac{a-4x}{2xa} + \frac{a-2}{5a^2} + \frac{1}{10a}$

El m.c.m. de los denominadores es, $10xa^2$. Dividiendo $10xa^2$, entre cada denominador y multiplicando los cocientes por el numerador respectivo, se tiene:

$$\frac{a-4x}{2xa} + \frac{a-2}{5a^2} + \frac{1}{10a} = \frac{5a(a-4x) + 2x(a-2) + xa}{10xa^2}$$

$$\text{multiplicando} = \frac{5a^2 - 20xa + 2xa - 4x + xa}{10xa^2}$$

reduciendo términos semejantes $= \frac{5a^2 - 17xa - 4x}{10xa^2}$

EJEMPLO:

Se encuentran los m.c.m. de los denominadores...

AUTOEVALUACIÓN 2.

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

$$1) \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$2) \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{\quad}{18}$$

$$3) \frac{u}{9} + \frac{v}{2} + \frac{4u-9v}{18} = \frac{\quad}{3}$$

$$4) \frac{1}{6y} + \frac{1}{3x} + \frac{2x+3y}{12xy} = \frac{\quad}{12xy}$$

$$5) \frac{2}{3b} + \frac{3}{2a} + \frac{2a-3b}{2ab} = \frac{\quad}{ab}$$

$$6) \frac{5a}{12bc} + \frac{4b}{9ac} + \frac{3c}{16ab} = \frac{\quad}{144abc}$$

$$7) \frac{3yz}{4x^2} + \frac{5}{8xyz} + \frac{7x}{36yz^2} = \frac{\quad}{72x^2yz^2}$$

$$8) \frac{h}{10k} + \frac{2h^2-5k^2}{20hk} + \frac{k}{12h} = \frac{\quad}{30hk}$$

$$9) \frac{2u}{9v^2} + \frac{5v}{18u^2} + \frac{u^2}{12v^3} = \frac{\quad}{36u^2v^3}$$

$$10) \frac{4c}{5a^2b} + \frac{3b}{10ac^2} + \frac{5a}{6b^2c} = \frac{\quad}{30a^2b^2c^2}$$

Suma de fracciones con denominadores polinomios.

EJEMPLO:

Sumar,
$$\frac{1}{3a+3} + \frac{1}{2a-2} + \frac{1}{a^2-1}$$

Se factorizan los binomios, para encontrar el m.c.m. de los denominadores:

$$3a+3 = 3(a+1)$$

$$2a-2 = 2(a-1) \quad \text{m.c.m.} = 6(a+1)(a-1)$$

$$a^2-1 = (a+1)(a-1)$$

dividiendo el m.c.m., entre cada denominador y multiplicando cada cociente, por el numerador respectivo, tenemos:

$$\frac{1}{3a+3} + \frac{1}{2a-2} + \frac{1}{a^2-1} = \frac{2(a-1) + 3(a+1) + 6}{6(a+1)(a-1)}$$

multiplicando
$$= \frac{2a-2 + 3a+3 + 6}{6(a+1)(a-1)}$$

reduciendo términos semejantes
$$= \frac{5a+7}{6(a+1)(a-1)}$$

EJEMPLO:

Sumar,
$$\frac{x-1}{x^2-4} + \frac{x-2}{x^2-x-6} + \frac{x+6}{x^2-5x+6}$$

Se encuentra el m.c.m. de los denominadores:

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) \text{ m.c.m.} = (x + 2)(x - 2)(x - 3)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

dividiendo el denominador común, entre cada denominador y multiplicando los cocientes, por los numeradores respectivos, se tiene:

$$\frac{x-1}{x^2-4} + \frac{x-2}{x^2-x-6} + \frac{x+6}{x^2-5x+6} = \frac{(x-1)(x-3) + (x-2)^2 + (x+2)(x+6)}{(x+2)(x-2)(x-3)}$$

multiplicando $= \frac{x^2 - 4x + 3 + x^2 - 4x + 4 + x^2 + 8x + 12}{(x+2)(x-2)(x-3)}$

reduciendo términos semejantes $= \frac{3x^2 + 19}{(x^2 - 4)(x - 3)}$

AUTOEVALUACIÓN 3.

Efectuar las operaciones siguientes y simplificar:

$$1) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2-1}$$

$$2) \frac{1}{3a-2b} + \frac{1}{9a^2-4b^2} = \frac{1}{9a^2-4b^2}$$

$$3) \frac{2}{x^2-xy} + \frac{2}{xy+y^2} = \frac{2}{xy(x^2-y^2)}$$

$$4) \frac{xy}{9x^2-y^2} + \frac{x}{3x+y} = \frac{x}{9x^2-y^2}$$

$$5) \frac{y+1}{10} + \frac{y-3}{5y-10} + \frac{y-2}{2} = \frac{1}{10(y-2)}$$

$$6) \frac{a}{x^2-xa} + \frac{x+a}{xa} + \frac{x}{xa-a^2} = \frac{1}{a(x-a)}$$

$$7) \frac{1}{b+b^2} + \frac{1}{b-b^2} + \frac{b+3}{1-b^2} = \frac{1}{b(1-b)}$$

$$8) \frac{z-a}{z+a} + \frac{z+a}{z-a} + \frac{4za}{z^2-a^2} = \frac{1}{z-a}$$

$$9) \frac{c-2}{2c^2-5c-3} + \frac{c-3}{2c^2-3c-2} + \frac{2c-1}{c^2-5c+6} = \frac{1}{(2c+1)(c-2)(c-3)}$$

$$10) \frac{k-2}{k-1} + \frac{k+3}{k+2} + \frac{k+1}{k-3} = \frac{1}{(k-1)(k+2)(k-3)}$$

1-6 RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Definición.

La sustracción o resta, es una operación que tiene por objeto, hallar lo que falta a un número, para igualar a otro mayor de la misma especie; o también, hallar uno de dos sumandos, cuando se conocen la suma y el otro sumando.

La suma dada, se llama minuendo, el sumando conocido, se llama sustraendo, y el sumando que se busca, se denomina resta o diferencia.

El signo de la sustracción, es una rayita horizontal (-) que se lee menos, y que se coloca entre el minuendo y el sustraendo.

Para restar fracciones algebraicas, se reducen las fracciones a un común denominador y se restan los numeradores.

EJEMPLOS:

$$1) \frac{3}{2a} - \frac{1}{6a} = \frac{9-1}{6a} = \frac{8}{6a} = \frac{4}{3a}$$

$$2) \frac{8}{a-b} - \frac{5}{a+b} = \frac{8(a+b) - 5(a-b)}{a^2 - b^2} = \frac{8a + 8b - 5a + 5b}{a^2 - b^2} = \frac{3a + 13b}{a^2 - b^2}$$

$$3) \frac{a+3b}{a^2-9b^2} - \frac{a-5b}{a^2-25b^2} = \frac{1}{a-3b} - \frac{1}{a+5b} = \frac{a+5b - (a-3b)}{a^2 + 2ab - 15b^2} = \frac{a+5b - a + 3b}{a^2 + 2ab - 15b^2} = \frac{8b}{a^2 + 2ab - 15b^2}$$

Resta de fracciones con denominadores monomios.

EJEMPLO:

De, $\frac{x+2y}{3x}$ restar $\frac{4xy^2-3}{6x^2y}$

El m.c.m. de los denominadores es, $6x^2y$.

Dividiendo $6x^2y$ entre cada denominador y multiplicando cada cociente, por el numerador respectivo, se tiene:

$$\frac{x+2y}{3x} - \frac{4xy^2-3}{6x^2y} = \frac{2xy(x+2y)}{6x^2y} - \frac{4xy^2-3}{6x^2y}$$

multiplicando = $\frac{2x^2y + 4xy^2}{6x^2y} - \frac{4xy^2 - 3}{6x^2y}$

restando numeradores = $\frac{2x^2y + 4xy^2 - (4xy^2 - 3)}{6x^2y}$

restando numeradores = $\frac{2x^2y + 4xy^2 - 4xy^2 + 3}{6x^2y} = \frac{2x^2y + 3}{6x^2y}$

obsérvese que para restar $4xy^2 - 3$ del primer numerador hay que cambiar el signo a cada uno de sus términos, y esta operación la indicamos, incluyendo $4xy^2 - 3$ en un paréntesis, precedido del signo (-).

Resta de fracciones con denominadores polinomios.

EJEMPLO:

restar, $\frac{x}{xy-y^2} - \frac{1}{y}$

se encuentra el m.c.m. de los denominadores:

$$xy - y^2 = y(x - y) \quad \text{m.c.m.: } y(x - y)$$

$$y = y$$

dividiendo, $y(x - y)$ entre cada denominador y multiplicando cada cociente, por el numerador respectivo, se tiene:

$$\frac{x}{xy - y^2} - \frac{1}{y} = \frac{x - (x - y)}{y(x - y)} = \frac{x - x + y}{y(x - y)} = \frac{y}{y(x - y)} = \frac{1}{x - y}$$

EJEMPLO:

Simplificar:
$$\frac{4a^2 - 1}{2a^2 - 8} - \frac{(a + 1)^2}{a^2 + 4a + 4} + \frac{a + 3}{a - 2}$$

Se encuentra el denominador común:

$$2a^2 - 8 = 2(a^2 - 4) = 2(a + 2)(a - 2)$$

$$a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2 \text{ m.c.m.} = 2(a + 2)^2(a - 2)$$

$$(a - 2) = (a - 2)$$

dividiendo, $2(a + 2)^2(a - 2)$ entre cada denominador, queda:

$$\frac{4a^2 - 1}{2a^2 - 8} - \frac{(a + 1)^2}{a^2 + 4a + 4} + \frac{a + 3}{a - 2} = \frac{(a + 2)(4a^2 - 1) - 2(a - 2)(a + 1)^2 - 2(a + 2)^2(a + 3)}{2(a + 2)^2(a - 2)}$$

$$= \frac{(a + 2)(4a^2 - 1) - 2(a - 2)(a^2 + 2a + 1) - 2(a^2 + 4a + 4)(a + 3)}{2(a + 2)^2(a - 2)}$$

$$= \frac{(a + 2)(4a^2 - 1) - 2(a - 2)(a^2 + 2a + 1) - 2(a^2 + 4a + 4)(a + 3)}{2(a + 2)^2(a - 2)}$$

$$= \frac{4a^3 + 8a^2 - a - 2 - 2(a^3 - 3a - 2) - 2(a^3 + 7a^2 + 16a + 12)}{2(a + 2)^2(a - 2)}$$

$$= \frac{4a^3 + 8a^2 - a - 2 - 2a^3 + 6a + 4 - 2a^3 - 14a^2 - 32a - 24}{2(a + 2)^2(a - 2)}$$

resumiendo términos semejantes y simplificando, queda:

$$= \frac{-6a^2 - 27a - 22}{2(a + 2)^2(a - 2)} = \frac{6a^2 + 27a + 22}{2(a + 2)^2(2 - a)}$$

AUTOEVALUACIÓN 4.

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

Restar:

1) $\frac{1}{2}$ de $\frac{4b}{a}$ = $\frac{\quad}{2a}$

2) $\frac{2a + 5}{2a}$, de $\frac{1}{10a}$ = $\frac{\quad}{10a}$

3) $\frac{y - 3}{xy}$, de $\frac{x + 5}{x}$ = $\frac{\quad}{xy}$

4) De, $\frac{7x - 4}{4}$, restar $\frac{3x + 2}{3}$ = $\frac{\quad}{12}$

5) De, $\frac{4}{rs}$, restar $\frac{2 - t}{rt}$ = $\frac{\quad}{rst}$

6) De, $\frac{b - 2a}{20a}$, restar $\frac{a - 3b}{24b}$ = $\frac{\quad}{120ab}$

$$7) \frac{3}{a^3} - \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a} = \frac{\quad}{a^3}$$

$$8) \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} = \frac{\quad}{x^3}$$

$$9) \frac{a}{yz} - \frac{a+z}{xz} - \frac{a+y}{xy} = \frac{xyz}{\quad}$$

$$10) \frac{3}{5c} - \frac{c-1}{3c^2} - \frac{c^2+2c+3}{15c^3} = \frac{\quad}{5c^3}$$

AUTOEVALUACIÓN 5.

Resta,

$$1) \frac{x}{2x-4}, \text{ de } \frac{2x-5}{2-x} = \frac{\quad}{2}$$

$$2) \frac{a}{a^2-b^2}, \text{ de } \frac{1}{a+b} = \frac{\quad}{b^2-a^2}$$

$$3) \frac{a-1}{a+3}, \text{ de } \frac{3a}{2a+6} = \frac{\quad}{2(a+3)}$$

$$4) \text{ De, } \frac{4x-7}{x^2-3x+2}, \text{ restar } \frac{3}{x-1} = \frac{\quad}{x-2}$$

$$5) \text{ De, } \frac{6m-13}{m^2-5m+6}, \text{ restar } \frac{5}{m-3} = \frac{\quad}{m-2}$$

$$6) \text{ De, } \frac{x}{x^2-25}, \text{ restar } \frac{1}{2x+10} = \frac{\quad}{2(x-5)}$$

$$7) \frac{2}{x-1} - \frac{3}{1+x} - \frac{x-5}{1-x^2} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$8) \frac{a-2}{(a+2)^2} - \frac{a}{5(a+2)} - \frac{1}{25} = \frac{\quad}{25(a+2)^2}$$

$$9) \frac{a-6b}{2a^2+5ab+2b^2} - \frac{3}{2a+b} - \frac{7}{a+2b} = \frac{\quad}{(2a+b)(a+2b)}$$

$$10) \frac{a}{a^2+a-2} - \frac{3}{a^2+2a-3} - \frac{a}{a^2+5a+6} = \frac{\quad}{(a-1)(a+2)(a+3)}$$

1-7 SUMA Y RESTA COMBINADAS DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

EJEMPLO:

Efectuar las operaciones siguientes y simplificar:

$$\frac{a-2}{a^2-a} - \frac{a+3}{a^2+3a-4} + \frac{a^2+12a+16}{a^4+3a^3-4a^2}$$

se encuentra el común denominador:

$$a^2 - a = a(a-1)$$

$$a^2 + 3a - 4 = (a + 4)(a - 1)$$

$$a^4 + 3a^3 - 4a^2 = a^2(a^2 + 3a - 4) = a^2(a + 4)(a - 1)$$

$$\text{m.c.m.} = a^2(a - 1)(a + 4)$$

se tiene

$$\frac{a - 2}{a^2 - a} + \frac{a + 3}{a^2 + 3a - 4} + \frac{a^2 + 12a + 16}{a^4 + 3a^3 - 4a^2} =$$

$$= \frac{a(a + 4)(a - 2) - a^2(a + 3) + a^2 + 12a + 16}{a^2(a - 1)(a + 4)}$$

$$\text{multiplicando} = \frac{a^3 + 2a^2 - 8a - a^3 - 3a^2 + a^2 + 12a + 16}{a^2(a - 1)(a + 4)}$$

$$\text{simplificando} = \frac{4a + 16}{a^2(a - 1)(a + 4)} = \frac{4(a + 4)}{a^2(a - 1)(a + 4)} = \frac{4}{a^2(a - 1)}$$

AUTOEVALUACIÓN 6.

Efectúa las operaciones indicadas y simplificar:

$$1) \frac{5}{4} - \frac{11}{12} + \frac{5}{18} =$$

$$2) \frac{1}{6y} + \frac{1}{3x} - \frac{2x + 3y}{12xy} =$$

$$3) \frac{5a}{12bc} + \frac{4b}{9ac} - \frac{3c}{16ab} = \frac{\quad}{144abc}$$

$$4) \frac{u}{9} - \frac{v}{2} - \frac{4u - 9v}{18} =$$

$$5) \frac{3x}{2x + y} + \frac{5y}{3x} - \frac{3}{2} = \frac{\quad}{6x(2x + y)}$$

$$6) \frac{x}{x - 2y} + \frac{y}{2x + y} - 1 = \frac{\quad}{(x - 2y)(2x + y)}$$

$$7) \frac{3u + v}{u^2 - v^2} - \frac{2v}{u(u - v)} - \frac{1}{u + v} =$$

$$8) \frac{x^2 + 4xy}{x^3 + y^3} + \frac{1}{x + y} - \frac{x}{x^2 - xy + y^2} = \frac{\quad}{x^2 - xy + y^2}$$

$$9) \frac{a + 2}{a^2 - a - 6} + \frac{a - 4}{a^2 - 7a + 12} - \frac{a + 2}{a^2 - 2a - 8} = \frac{\quad}{(a - 3)(a - 4)}$$

$$10) \frac{x}{x^2 - 5x - 14} - \frac{2}{x - 7} + \frac{x}{x^2 - 9x + 14} = \frac{\quad}{(x^2 - 4)(x - 7)}$$

1-8 FRACCIONES COMPLEJAS.

Si el numerador o el denominador de una fracción, o ambos, contienen a su vez fracciones, la fracción se llama, **fracción compleja**.

EJEMPLOS:

$$\frac{\frac{3}{2} \left(1 + \frac{x}{y} \right) + \frac{4x}{x+y} + \frac{2y}{x-y}}{5 \left(\frac{x+y}{x^2+y^2} \right) - \frac{3}{x^2-y^2}}$$

Existen dos métodos, para reducir una fracción compleja a una simple. El primero consiste, en multiplicar el numerador y el denominador de la fracción compleja, por el m.c.m. de cada denominador que aparezca en ella.

EJEMPLO:

Reducir, la siguiente fracción compleja, a una simple.

$$1 + \frac{\frac{x}{y}}{x+y}$$

se observa, que los denominadores de 1 y de $(x+y)$, son 1. Por tanto, el m.c.m. de los denominadores de la fracción compleja es "y". Por consiguiente, se multiplican por "y" el numerador y el denominador, y se obtiene

$$1 + \frac{x}{y} = \frac{y(1 + \frac{x}{y})}{y} = \frac{y+x}{y} = \frac{y+x}{xy+y^2} = \frac{y+x}{y(x+y)} = \frac{1}{y}$$

EJEMPLO:

EJEMPLO:

En la fracción compleja,

$$\frac{\frac{2}{x+y} - \frac{1}{x-y}}{\frac{4(x-y)}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}}$$

el m.c.m. de los denominadores es, $(x+y)(x-y)$ ó $x^2 - y^2$. A continuación, se indican los pasos de la simplificación.

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{2}{x+y} - \frac{1}{x-y}}{\frac{4(x-y)}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}} = \frac{\frac{2}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2} - \frac{1}{x-y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}}{\frac{4(x-y)}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2} - \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}} \\ & = \frac{\frac{2(x^2-y^2)}{x+y} - \frac{x^2-y^2}{x-y}}{\frac{4(x-y)(x^2-y^2)}{x+y} - \frac{(x+y)(x^2-y^2)}{x-y}} \\ & = \frac{2(x-y) - (x+y)}{4(x-y)(x-y) - (x+y)(x+y)} \end{aligned}$$

$$\frac{2x - 2y - x - y}{4(x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)}$$

$$= \frac{x - 3y}{4x^2 - 8xy + 4y^2 - x^2 - 2xy - y^2}$$

$$= \frac{x - 3y}{3x^2 - 10xy + 3y^2} = \frac{x - 3y}{(3x - y)(x - 3y)} = \frac{1}{3x - y}$$

Si en las expresiones, en la fracción compleja son complicadas, resulta a veces más fácil, reducir el numerador y el denominador a fracciones simples y proceder luego, como en la división.

EJEMPLO:

Reducir, la siguiente fracción compleja.

$$\frac{\frac{x - y}{x + y} - \frac{x + y}{x - y}}{1 - \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2}} = \frac{\frac{(x - y)^2 - (x + y)^2}{(x + y)(x - y)}}{\frac{x^2 - y^2 - (x^2 - xy - y^2)}{x^2 - y^2}}$$

$$= \frac{\frac{x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2}{x^2 - y^2} = \frac{-4xy}{x^2 - y^2}}{\frac{x^2 - y^2 - x^2 + xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{xy}{x^2 - y^2}}$$

$$= \frac{-4xy}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{xy} = -4$$

Si el numerador o el denominador de una fracción compleja, o ambos, son a su vez fracciones complejas, cada una debe reducirse, a una fracción simple, como primer paso de la simplificación.

EJEMPLO:

Reducir, la siguiente fracción compleja.

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x - 1}} = \frac{1 + \frac{x - 1}{x - 1 + 1}}{1 + \frac{x - 1}{x}} = \frac{1}{\frac{x + 1}{x + 1 - 1}} = \frac{1}{x}$$

En el paso anterior, los dos miembros de la fracción compleja, se han multiplicado en el numerador por (x - 1) y en el denominador por (x + 1).

$$= \frac{x + x - 1}{x + 1} = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

Se ha multiplicado el numerador y el denominador por x.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

AUTOEVALUACIÓN 7.

Reducir a fracciones simples, las siguientes fracciones complejas:

1) $1 + \frac{1}{2}$

2) $2 - \frac{1}{2}$

3) $4 + \frac{2}{5}$

4) $1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}$

5) $\frac{4}{3z} + \frac{8}{9y}$

6) $1 + \frac{2z}{3y}$

7) $1 + \frac{3b}{a-2b}$

8) $1 + \frac{b}{a-b}$

9) $1 + \frac{b}{a-2b}$

10) $5 + \frac{4}{x-1}$

11) $\frac{x}{x+1}$

12) $\frac{x-1}{x-1}$

13) $\frac{3}{2} - \frac{2}{3}$

14) $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$

15) $1 - \frac{5}{6}$

16) $1 - \frac{1}{x}$

17) $1 - \frac{1}{x^2 + x + 1}$

18) $1 - \frac{1}{x^3}$

19) $1 - \frac{3d^2}{4c}$

20) $\frac{4c}{c-d}$

21) $\frac{d^2}{c-2d}$

22) $2c - 5d + \frac{d^2}{c-d}$

23) $\frac{1}{d}$

24) $\frac{1}{d}$

25) $\frac{1}{d}$

26) $\frac{1}{d}$

27) $\frac{1}{d}$

28) $\frac{1}{d}$

AUTOEVALUACIÓN 1.

$$10) \frac{1}{1 - \frac{1}{d-1}} =$$

Reducir a fracciones simples, las siguientes fracciones...

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 2.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1) $25a^3bc$

2) $12r^3st^4$

3) $4a^2 + 6a$

4) $6x^2 + 13xy + 6y^2$

5) $9a^2 - 16b^2$

6) $\frac{2a^3c^2}{36a^2c^3}, \frac{16a^2b^2c}{36a^2c^3}, \frac{15c^3}{36a^2c^3}$

7) $\frac{80x^3z}{180x^2y^2z^2}, \frac{75xy^3}{180x^2y^2z^2}, \frac{96yz^3}{180x^2y^2z^2}$

8) $\frac{90vw^4}{216u^2v^2w^2}, \frac{63uv^4}{216u^2v^2w^2}, \frac{64wu^4}{216u^2v^2w^2}$

9) $\frac{a(a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)^2}, \frac{(a - b)^3}{(a^2 - b^2)}, \frac{(a + b)^3}{(a^2 - b^2)^2}$

10) $\frac{(2u + v)^2}{(4u^2 - 9v^2)(2u + v)}, \frac{(2u - 3v)^2}{(4u^2 - 9v^2)(2u + v)}, \frac{(2u + 3v)^2}{(4u^2 - 9v)(2u + v)}$

AUTOEVALUACIÓN 2.

1) 9

2) 29

3) U

4) $4x + 7y$

5) $a + b$

6) $60a^2 + 64b^2 + 27c^2$

7) $54y^2z^3 + 45xz + 14x^3$

8) $6h^2 - 5k^2$

9) $8u^3v + 10v^4 + 3u^4$

10) $24bc^3 + 9ab^3 + 25a^3c$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1) 2x

2) $4a + b$

3) $2x^2 + 2y^2$

4) $3x^2$

5) $6y^2 - 19y + 12$

6) 2x

7) $b + 2$

8) $2(z + a)$

9) $6c^2 - 10c + 12$

10) $3k^3 - 2k^2 - 14k + 19$

AUTOEVALUACIÓN 4.

1) $\frac{8b - a}{2a}$

2) $\frac{-10a - 24}{10a}$

3) $\frac{-64 + xy + 3}{xy}$

4) $\frac{9x - 20}{12}$

5) $\frac{4t + st - 2s}{rst}$

6) $\frac{6b^2 + 3ab - 5a^2}{120ab}$

7) $\frac{(3 + a)(1 - a)}{a^3}$

8) $\frac{x^2 - 2x - 1}{x^3}$

9) $\frac{ax + ay - az - 2yz}{xyz}$

10) $\frac{c^2 + c - 1}{5c^3}$

AUTOEVALUACIÓN 5

1) $-\frac{5}{2}$

2) $\frac{6}{b^2 - a^2}$

3) $\frac{a + 2}{2(a + 3)}$

6) $\frac{1}{2(x - 5)}$

7) 0

8) $\frac{-6a^2 + 11a - 54}{25(a + 2)^2}$

4) $\frac{1}{x - 2}$

5) $\frac{1}{m - 2}$

9) $\frac{-16a - 19b}{(2a + b)(a + 2b)}$

10) $\frac{a - 6}{(a + 2)(a - 1)(a + 3)}$

AUTOEVALUACIÓN 6

1) $\frac{17}{36}$

2) $\frac{1}{12x}$

3) $\frac{60a^2 + 64b^2 - 27c^2}{144abc}$

4) $-\frac{v}{9}$

5) $\frac{10y^2 + 11xy}{6x(2x + 4)}$

6) $\frac{5xy}{(x - 2y)(2x + y)}$

7) $\frac{2}{u}$

8) $\frac{(x + y)}{(x^2 - xy + y^2)}$

9) $\frac{a + 3}{(a - 3)(a - 4)}$

10) $\frac{8}{(x - 7)(x^2 - 4)}$

AUTOEVALUACIÓN 7

1) $\frac{1}{3}$

2) $\frac{3}{4}$

3) $\frac{a+b}{a-b}$

4) $\frac{1-5x}{1-5x}$

5) $\frac{1-5x}{1-5x}$

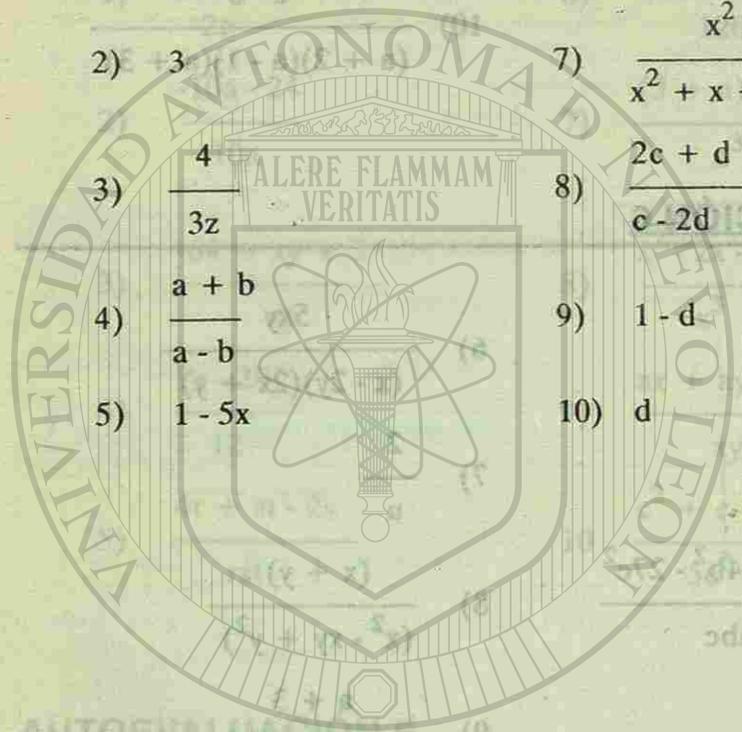
6) $\frac{5}{x^2+x+1}$

7) $\frac{2c+d}{c-2d}$

8) $\frac{1-d}{1-d}$

9) $\frac{1-d}{1-d}$

10) $\frac{d}{d}$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIDAD XV

REAPASO GENERAL DEL CURSO.

INTRODUCCIÓN

Ha llegado el momento de evaluar todos los conocimientos adquiridos durante el semestre. A veces, al voltear atrás, vemos cosas que hemos hecho y cosas que nos quedamos por hacer; se siente una sensación de voltear hacia atrás y ver qué tanto hemos avanzado. Esta unidad de repaso final te proporciona el que mires hacia atrás y veas qué tanto avanzaste en tus conocimientos.

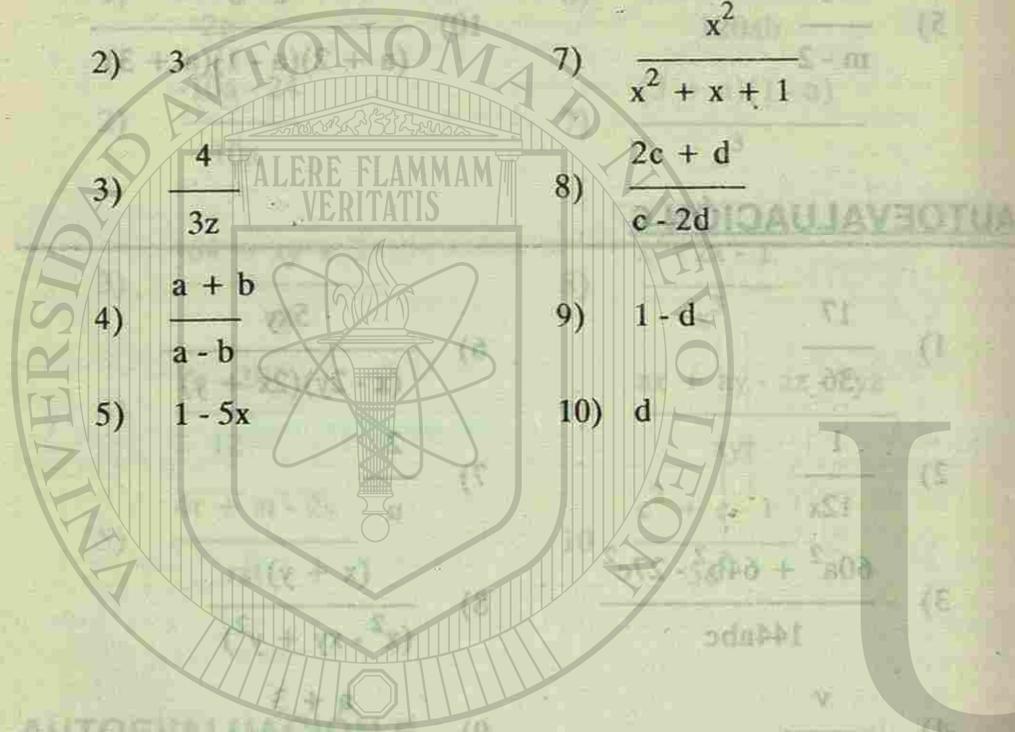
Con esta unidad de repaso general del curso de Álgebra I, tendremos la oportunidad de revisar lo aprendido durante todo el semestre; a la luz de una perspectiva total, podremos reestudiar los tópicos que hayamos encontrado difíciles y recordar aquellos conocimientos que se hayan tornado nebulosos con el tiempo. La presente unidad nos brinda la oportunidad de afirmar lo entendido de agudizar conocimientos, de profundizar la visión y de repasar la estructura fundamental para posteriores conocimientos de matemáticas.

Al término de esta unidad, el estudiante será capaz de:



AUTOEVALUACIÓN 7

- 1) $\frac{1}{3}$ 6) $\frac{5}{x^2}$
- 2) $\frac{3}{4}$ 7) $\frac{x^2}{x^2 + x + 1}$
- 3) $\frac{4}{3z}$ 8) $\frac{2c + d}{c - 2d}$
- 4) $\frac{a + b}{a - b}$ 9) $1 - d$
- 5) $1 - 5x$ 10) d



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIDAD XV

REAPASO GENERAL DEL CURSO.

INTRODUCCIÓN

Ha llegado el momento de evaluar todos los conocimientos adquiridos durante el semestre. A veces, al voltear atrás, vemos cosas que hemos hecho y cosas que nos quedamos por hacer; se siente una sensación de voltear hacia atrás y ver qué tanto hemos avanzado. Esta unidad de repaso final te proporciona el que mires hacia atrás y veas qué tanto avanzaste en tus conocimientos.

Con esta unidad de repaso general del curso de Álgebra I, tendremos la oportunidad de revisar lo aprendido durante todo el semestre; a la luz de una perspectiva total, podremos reestudiar los tópicos que hayamos encontrado difíciles y recordar aquellos conocimientos que se hayan tornado nebulosos con el tiempo. La presente unidad nos brinda la oportunidad de afirmar lo entendido de agudizar conocimientos, de profundizar la visión y de repasar la estructura fundamental para posteriores conocimientos de matemáticas.

Al término de esta unidad, el estudiante será capaz de:



OBJETIVOS:

1. Clasificar y definir las diferentes formas de conjuntos.
2. Enlistar y definir las relaciones de conjuntos.
3. Resolver operaciones que impliquen unión, intersección, diferencia, complemento y producto cartesiano de conjuntos.
4. Representar las operaciones entre conjuntos gráficamente (diagramas de Venn).
5. Clasificar y definir correctamente el conjunto de los números reales y sus subconjuntos.
6. Aplicar los axiomas de campo de los números reales, en la solución o demostración de problemas.
7. Definir y distinguir cada una de las partes de que se compone una expresión algebraica.
8. Eliminar correctamente los símbolos de agrupación de una expresión algebraica y simplificar.
9. Efectuar correctamente las cuatro operaciones básicas con expresiones algebraicas, siendo los números algebraicos los números reales.

Encontrar correctamente los factores de cualquier polinomio.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1. Estudia todas las unidades del curso. En esta unidad se incluyen los objetivos principales del curso, en los cuales se dan por vistos los demás, ya que están íntimamente ligados a éstos.

A continuación se expone una guía de estudio para que te sea más fácil localizar los objetivos a estudiar en el libro de texto.

OBJETIVOS CAPÍTULOS. OBJETIVOS. CAPÍTULOS.

1 y 2	I	7 y 8	III
3 y 4	I	9	III
5	II	10	III
6	II		

2. Como práctica de estos objetivos te sugerimos repases de nueva cuenta las autoevaluaciones, sobre todo aquellos problemas que te hayan parecido confusos o dudosos en la forma como los resolviste. Pregántale a tu maestro la duda que tengas para que te sea más fácil de estudiar esta unidad.



U A N L

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECA