1-4 DIVISIÓN ALGEBRAICA.

"Definición".

La división es la operación que tiene por objeto, repartir un número, en tantas partes iguales, como unidades tiene el otro, o hallar las veces que un número contiene a otro. Cualquiera de estos dos aspectos de la división viene a ser una operación inversa a la multiplicación, así como la resta lo es de la suma; de modo que la división , puede siempre definirse como una operación que tiene por objeto hallar uno de los dos factores, cuando se conoce su producto y el otro factor. Así, $24 \div 6 = 4$, porque $4 \times 6 = 24$.

El producto dado, se llama **dividendo**, el factor conocido se llama **divisor** y el factor que se busca se denomina **cociente**.

El signo de la división se representa de las siguientes formas:

$$a \div b, \; a{:}b, \; a/b$$

Si el cero es considerado como la ausencia total de cantidad, entonces es evidente que

$$n + 0 = n; \quad m \times 0 = 0: \quad 0/n = 0$$

Sin embargo, cualquier intento, para establecer un proceso en el que se emplee el cero como divisor, conduce a una situación absurda.

Por ejemplo, si se interpreta el cociente, $a \div b$, como el número de veces, que debe sumarse b para obtener a, entonces, a/0 es el número de veces que debe sumarse cero para obtener a. Evidentemente, ello carece de sentido. Por lo tanto, si el divisor es cero, la operación de división no queda definida y por ello, se escluye la división entre cero.

"Leyes de los signos para la división".

Las leyes de los signos en la división, son las mismas que en la multiplicación.

"El cociente, de dos números del mismo signo, es positivo".

"El cociente, de dos números de signos diferentes, es negativo".

Las leyes de los signos, se pueden representar también en la siguiente forma:

\+ entre + dá, +
\- entre - dá, +
\+ entre - dá, -
\- entre + dá, -

"Leyes de los exponentes para la división algebraica".

"Si m y n son enteros positivos y a = 0, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ si } m > n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = 1 \text{ si } m = n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ si } n > m$$

Demostración.- Si m > n, tenemos por la ley de los exponentes para la multiplicación

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n \cdot a^{m-n}}{a^n} = \frac{a^n}{a^n}(a^{m-n}) = a^{m-n}$$

Si m = n, tenemos por la definición de la división

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

Dejemos la demostración de la última parte de la ley al estudiante.

"División de dos monomios".

Regla.- Para dividir dos monomios, se divide el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor y a continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra un exponente igual, a la diferencia entre el exponente que tiene el dividendo y el exponente que tiene el divisor. El signo, lo da la ley de los signos para la división.

EJEMPLO:

Dividir:

a) $36a^3 \div (-18a) = \dfrac{36a^3}{-18a} = -2a^2$

b) $(-12a^5) \div (-36a^5) = \dfrac{-12a^5}{-36a^5} = \dfrac{1}{3}$

c) $7a^3b^2c^3 \div 21ab^3c^3 = \dfrac{7a^3b^2c^3}{21ab^3c^3} = \dfrac{a^2}{3b}$

De este ejemplo se deduce que:

1.- El coeficiente del cociente de dos monomios, es cociente de los valores absolutos, de los coeficientes del dividendo y del divisor.

2.- Cada literal, de las que forman el dividendo, interviene en el cociente, con un exponente calculado, de acuerdo con la ley anterior mencionada, a menos que una misma literal tenga igual exponente, en el dividendo y en el divisor; en este caso, no se escribe, por ser su cociente, igual a 1.

"División de un polinomio entre un monomio".

Regla.- para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio, separando los cocientes parciales con sus propios signos.

EJEMPLO:

Dividir $3x^2y - 6xy^2 + 12x \div 3x$

Solución: $\dfrac{3x^2y - 6xy^2 + 12x}{3x} = \dfrac{3x^2y}{3x} - \dfrac{6xy^2}{3x} + \dfrac{12x}{3x}$

$= xy - 2y^2 + 4$

"División de dos polinomios".

Para dividir un polinomio entre otro polinomio, se efectúan los siguientes pasos:

1.- Tanto el dividendo como el divisor, se disponen en orden ascendente o descendente, de las potencias de alguna letra que aparezca en ambos.

2.- Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y se obtiene así, el primer término del cociente.

3.- Se multiplica el divisor por el primer término del cociente y el producto obtenido, se sustrae del dividendo.

4.- El residuo obtenido, en el paso anterior, se trata como a un nuevo dividendo y se repiten con él, los pasos 2 y 3.

5.- Se continúa este proceso, hasta obtener un residuo en el cual, el mayor exponente de la letra que se escogió, en el paso 1, sea menor, que el mayor exponente de dicha letra en el divisor.

Si el residuo es cero, la división es exacta y el resultado puede expresarse como

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente}$$

Si el residuo no es cero, expresamos el resultado como

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

EJEMPLO:

Dividir; $4x^4 - 16x^3 + 36x^2 - 40x + 25 \div 2x^2 - 4x + 5$

$$\begin{array}{lrl}
 & 2x^2 - 4x + 5 \text{ (cociente)} & \\
2x^2 - 4x + 5 & \overline{\big)\, 4x^4 - 16x^3 + 36x^2 - 40x + 25} & \text{(Dividendo)} \\
\text{(divisor)} & -4x^4 + 8x^3 - 10x^2 & \\
\hline
 & -8x^3 + 26x^2 - 40x + 25 & \text{(1er. Residuo)} \\
 & +8x^3 - 16x^2 + 20x & \\
\hline
 & 10x^2 - 20x + 25 & \text{(2do. Residuo)} \\
 & -10x^2 + 20x - 25 & \\
\hline
 & 0 & \text{(Residuo)}
\end{array}$$

Solución:

Primer término del cociente.- Para obtener el primer término del cociente se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

$$\mathbf{4x^4 \div 2x^2 = 2x^2}$$

Primer producto parcial.- Para obtener el primer producto parcial, se multiplica el divisor por el primer término del cociente

$$\mathbf{(2x^2 - 4x + 5) = 4x^4 - 8x^3 + 10x^2}$$

y se resta del dividendo, para obtener el primer residuo.

Segundo término del cociente.- Se obtiene, dividiendo el primer término del primer residuo, entre el primer término del divisor

$$\mathbf{-8x^3 \div 2x^2 = -4x}$$

Segundo producto parcial.- Se obtiene multiplicando el divisor por el segundo término del cociente.

$$\mathbf{(2x^2 - 4x + 5) = -8x^3 + 16x^2 - 20x}$$

y se resta del primer residuo, para obtener el segundo residuo.

Tercer término del cociente.- Se obtiene dividiendo el primer término del segundo residuo entre el primer término del divisor.

$$\mathbf{10x^2 \div 2x^2 = 5}$$

Tercer producto parcial.- Se obtiene multiplicando el divisor por el tercer término del cociente

$$\mathbf{(2x^2 - 4x + 5)(5) = 10x^2 - 20x + 25}$$

y se resta del segundo residuo, para obtener un residuo final de cero.

Prueba de la división.- Puede verificarse cuando la división es exacta, multiplicando el divisor por el cociente, debiendo dar el dividendo, si la operación está correcta.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Realice las divisiones indicadas.

1. $2a^4 \div a^2$
2. $(-36a^2b^3) \div (-6a^2b)$
3. $(8xy) \div (-4xy)$
4. $2a^2b^3c^4 \div a^3b^2c^3$
5. $(-9x^3y^4) \div (-3x^2y^5)$
6. $(16a^3b^2) \div (-4a^3b)$
7. $(14a^2 - 21a^3) \div (7a^2)$
8. $(15x^2y^3 - 9xy) \div (3xy)$
9. $(9x^2 - 6x + 3) \div (-3)$
10. $(c^2d - cd^2 - cd) \div (cd)$
11. $(c^2d + 2c^2d^4 - c^2d^2) \div (c^2d^2)$
12. $(9a^2b^3 - 10a^4b^4) \div (5a^2b^3)$
13. $(a^2 - 7a + 6) \div (a - 1)$
14. $(x^2 + 4x - 12) \div (x + 6)$
15. $(x^2 - 5x - 14) \div (x + 2)$
16. $(a^2 - 6ab + 8b^2) \div (a - 4b)$
17. $(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \div (x^2 - 4x + 4)$
18. $(a^4 - b^4) \div (a^2 - b^2)$
19. $(9x^2 - 16y^2) \div (3x - 4y)$
20. $(2x^2 + 5xy - 3y^2) \div (2x - y)$

21. $(3x^2 - 8xy + 4y^2) \div (x - 2y)$
22. $(4a^2 + 5ab - 6b^2) \div (a + 2b)$
23. $(8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3) \div (4x^2 + 4xy + y^2)$
24. $(x^3 + 10x^2 + 12x + 27) \div (x^2 + x + 3)$
25. $(2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 11x - 6) \div (x^2 - 3x + 2)$
26. $(a^3 - 27) \div (a^2 + 3a + 9)$
27. $(8a^3 - 1) \div (2a - 1)$
28. $(x^4 + x^2y^2 + y^4) \div (x^2 - xy + y^2)$
29. $(2a^4 - 3a^3 + 3a^2 + a - 1) \div (2a - 1)$
30. $(2x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 11x + 4) \div (2x^2 - 3x + 1)$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 3.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1. -8
2. 20
3. 8
4. -6
5. $10^{a2}b^2$
6. $-18x^3y^3$
7. $6x^3$
8. $-6a^2b^2$
9. $10a^2b^2$
10. $6a^5b^4$
11. $a^4b - ab^4$
12. $-28x^3 + 21x^2$
13. $6a^3b^3 + 2a^3b$
14. $16x^3y - 24x^2y^2 - 8x^2y$
15. $18a^2 - 12ab - 6ac$
16. $-6x^3 + 6x^2y - 4x^2$
17. $x^2 + 2x - 15$
18. $-6a^2 - 5a + 4$
19. $a^2 - 4b^2$
20. $2c^2 - cd - 3d^2$
21. $x^2 + 3xy - 4y^2$
22. $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
23. $3a^3 - 23a^2c + 38ac^2 - 16c^3$
24. $8a^3 - b^3$
25. $x^3 + y^3$
26. $a^2 + 2ab + b^2 - 1$
27. $4x^2 + 16x - y^2 + 16$
28. $a^3 + 6a^2 + 11a + 6$
29. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
30. $b^3 - 2b^2 - 5b + 6$

AUTOEVALUACIÓN 2.

1. $2a^2$
2. $6b^2$
3. -2
4. $2bc/a$
5. $3x/y$
6. $-4b$
7. $2 - 3a$
8. $5xy^2 - 3$
9. $-3x^2 + 2x - 1$
10. $c - d - 1$
11. $1/d + 2d^2 - 1$
12. $9/5 - 2a^2b$
13. $a - 6$
14. $x - 2$
15. $x - 7$
16. $a - 2b$
17. $x - 2$
18. $a^2 + b^2$
19. $3x + 4y$
20. $x + 3y$
21. $3x - 2y$
22. $4a - 3b$
23. $2x + y$
24. $x + 9$
25. $2x^2 + x - 3$
26. $a - 3$
27. $4a^2 + 2a + 1$
28. $x^2 + xy + y^2$
29. $a^3 - a^2 + a + 1$
30. $x^3 - x^2 + x + 4$