

- 37.- $(4a - 3b)^2$
 38.- $(6f + 5g)^2$
 39.- $(2r - 7s)^2$
 40.- $(5x + 2y)^2$
 41.- $(7h + 8k)^2$
 42.- $(9u - 7v)^2$
 43.- $(6w - 11z)^2$
 44.- $(8p + 9q)^2$
 45.- $(x - 3)(x + 3)$
 46.- $(m - 5)(m + 5)$
 47.- $(p - 7)(p + 7)$
 48.- $(c + 6)(c - 6)$
 49.- $(4a - 5)(4a + 5)$
 50.- $(3z - 7)(3z + 7)$
 51.- $(5t + 8)(5t - 8)$
 52.- $(2f + 9)(2f - 9)$
 53.- $(6p - 7q)(6p + 7q)$
 54.- $(9c + 2g)(9c - 2g)$
 55.- $(8x + 9y)(8x - 9y)$
 56.- $(10h - 7k)(10h + 7k)$
 57.- $(a + b + c)^2$
 58.- $(x - y + z)^2$
- 60.- $(c + d + 2e)^2$
 61.- $(u + 2v - 2w)^2$
 62.- $(3p - 2q + 3r)^2$
 63.- $(3f - 4g - 3h)^2$
 64.- $(5r + 2s - 3t)^2$
 65.- $[x + (y + z)][2x + (y + z)]$
 66.- $[2(a + b) - c][3(a + b) - c]$
 67.- $[2u + 3(u - v)][3u + 2(u - v)]$
 68.- $[2(e + f) - 3g][3(e + f) + 4g]$
 69.- $[4r - 3(x - t)][5r + 2(s - t)]$
 70.- $[3(b + c) + 4d][2(b + c) - 2d]$
 71.- $[3(x - 2y) + 2z][4(x - 2y) - 5z]$
 72.- $[(a + 2c) - 3][(a + 2c) + 3]$
 73.- $(x - 2)^3$
 74.- $(5 - x)^3$
 75.- $(x - 1)^3$
 76.- $(2a + 3b)^3$
 77.- $(a - 4)^3$
 78.- $(a + 3)^3$
 79.- $(3x + y)^3$
 80.- $(x + 27)^3$
 59.- $(e - f - g)^2$

PRODUCTOS ESPECIALES.

LECCIÓN 4.

1-5 PRODUCTOS ESPECIALES.

Se llaman productos especiales a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación. De este modo se puede, para muchos tipos de productos, abreviar el proceso de multiplicación.

1-6 EL PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON TÉRMINOS CORRESPONDIENTES SEMEJANTES.

Los términos correspondientes de los binomios " $ax + by$ " y " $cx + dy$ " son semejantes.

términos semejantes

$(ax + by)$ $(cx + dy)$

términos semejantes

Obtendremos el producto de estos dos binomios por el

procedimiento indicado a continuación donde se hace uso del axioma distributivo.

$$(ax + by)(cx + dy) = ax(cx + dy) + by(cx + dy)$$

$$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + adxy + bcxy + bdy^2$$

$$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$$

tenemos, pues,

$$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$$

Analizando el producto de la derecha, vemos que el producto de dos binomios con términos correspondientes semejantes se realiza siguiendo estos pasos:

- 1) Multiplicar los primeros términos de los binomios para obtener el primer término del producto.

$$\begin{array}{c} \boxed{acx^2} \\ \text{---} \\ (ax + by) \quad (cx + dy) \end{array}$$

- 2) Sumar los productos obtenidos al multiplicar el primer término de cada binomio por el segundo del otro. Esto nos lleva al segundo término del producto.

$$\begin{array}{c} (ax + by) \quad (cx + dy) \\ \begin{array}{c} \boxed{bcxy} \\ \boxed{adxy} \end{array} \end{array}$$

$$(ad + bc)xy$$

- 3) multiplica los segundos términos de los binomios para obtener

el tercer término del producto.

$$\begin{array}{c} \boxed{bdy^2} \\ \text{---} \\ (ax + by) \quad (cx + dy) \end{array}$$

De ordinario, estos tres pasos se hacen mentalmente y el resultado se escribe sin paso intermedio.

EJEMPLO 1.

Obtener el siguiente producto: $(2a + 3b)(3a - 5b)$.

Solución:

Escribimos el producto como se indica abajo, tras el problema, y se refieren los resultados a las posiciones indicadas por las flechas.

$$(2a + 3b)(3a - 5b) = 6a^2 - ab - 15b^2$$

$$1) (2a)(3a) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2) [(2a)(-5b)] + [(3b)(3a)] =$$

$$-10ab + 9ab = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3) (3b)(-5b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

EJEMPLO 2.

Obtener el siguiente producto: $(2x - 3)(x + 4)$

Solución:

$$(2x - 3)(x + 4) = 2x^2 + 5x - 12$$

$$1) (2x)(x) =$$

$$2) [(2x)(4)] + [(-3)(x)] = 8x - 3x =$$

$$3) (-3)(4) =$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Hallar los productos de los siguientes problemas utilizando la fórmula 1.

$$1.- (x + 2y)(x + 3y)$$

$$2.- (a + 4b)(a - 7b)$$

$$3.- (2r + 5)(3r - 4)$$

$$7.- (2x + y)(2x - 5y)$$

$$8.- (2u - 5v)(u + 3v)$$

$$4.- (x - 8)(x + 3)$$

$$5.- (x + 7)(x - 1)$$

$$6.- (3a - 4)(2a - 1)$$

$$9.- (5a + 1)(2a + 1)$$

$$10. (2x - 3y)(4x - 5y)$$

"El cuadrado de la suma o diferencia de un binomio"

El cuadrado de la suma del binomio $x + y$ se expresa:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y),$$

usamos la fórmula 1 y obtenemos:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$$

$$= x^2 + (xy + xy) + y^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2$$

En consecuencia

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (2)$$

Análogamente,

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad (3)$$

Así diremos que "el cuadrado de la suma o diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primero, más o menos dos veces el producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo."

EJEMPLO 3.

Obtener el cuadrado de $2a + 5b$.

Solución:

Utilizando la fórmula 2, tenemos que:

$$(2a + 5b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(5b) + (5b)^2$$

$$(2a + 5b)^2 = 4a^2 + 20ab + 25b^2$$

EJEMPLO 4.

Obtener el cuadrado de $3x - 4y$.

Solución:

Utilizando la fórmula 3, tenemos que:

$$(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(4y) + (4y)^2$$

$$(3x - 4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Hallar los productos de los siguientes problemas utilizando las fórmulas 2 y 3.

1.- $(a + 2b)^2$ 6.- $(2a - 3b)^2$

2.- $(x - 3y)^2$ 7.- $(3x + 2y)^2$

3.- $(a + 4b)^2$ 8.- $(4x - 5)^2$

4.- $(x - 5y)^2$ 9.- $(3a + 4b)^2$

5.- $(x + 6)^2$ 10.- $(5x - 3y)^2$

"El producto de la suma y diferencia de dos números".

El producto de la suma y diferencia de dos números "x" e "y" se expresa como $(x + y)(x - y)$. Si aplicamos la fórmula 1 a este producto, obtenemos:

$$\begin{aligned}(x + y)(x - y) &= x^2 + (-xy + xy) - y^2 \\ &= x^2 - y^2\end{aligned}$$

es decir,

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \quad (4)$$

Podemos, pues, enunciar el "producto de la suma y diferencia de dos números es igual a la diferencia de sus cuadrados."

EJEMPLO 5.

Obtener el siguiente producto: $(a + 5)(a - 5)$

Solución:

Utilizando la fórmula 4, nos queda:

$$\begin{aligned}(a + 5)(a - 5) &= (a)^2 - (5)^2 \\ &= a^2 - 25\end{aligned}$$

EJEMPLO 6.

Obtener el siguiente producto: $(3x + 5y)(3x - 5y)$

Solución:

Utilizando la fórmula 4, tenemos:

$$\begin{aligned}(3x + 5y)(3x - 5y) &= (3x)^2 - (5y)^2 \\ &= 9x^2 - 25y^2\end{aligned}$$

AUTOEVALUACIÓN 3.

Hallar los productos de los siguientes problemas utilizando la fórmula 4.

1.- $(x + 2)(x - 2)$

6.- $(3x + y)(3x - y)$

2.- $(2x + 1)(2x - 1)$

7.- $(4a + 3b)(4a - 3b)$

3.- $(3x + 2)(3x - 2)$

8.- $(2x + 7y)(2x - 7y)$

4.- $(a + 3b)(a - 3b)$

9.- $(3a + 7b)(3a - 7b)$

5.- $(2x + 5y)(2x - 5y)$

10.- $(-2x + 3y)(-2x - 3y)$

"Productos de trinomios"

El cuadrado de un trinomio se puede obtener agrupando convenientemente los términos y aplicando luego la fórmula 2 o la fórmula 3. Con dos ejemplos aclararemos el procedimiento.

EJEMPLO 7.

Obtener el cuadrado de $a + b + c$.

Solución:

Consideremos $b + c$ como un número, para ello metámoslo entre paréntesis: $a + (b + c)$. Luego $[a + (b + c)]^2$ es el cuadrado de la suma de dos números y lo podemos obtener aplicando la fórmula 2, como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= [a + (b + c)]^2 \\ &= (a)^2 + 2(a)(b + c) + (b + c)^2 \\ &= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + (b)^2 + 2(b)(c) + (c)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

EJEMPLO 8.

Obtener el cuadrado de $2x - 3y - 5z$.

Solución:

En este problema meteremos los dos primeros términos entre paréntesis, aplicando la fórmula 3, obtendremos:

$$\begin{aligned}(2x - 3y - 5z)^2 &= [(2x - 3y) - 5z]^2 \\ &= (2x - 3y)^2 - 2(2x - 3y)(5z) + (5z)^2 \\ &= (2x - 3y)^2 - 10z(2x - 3y) + (5z)^2 \\ &= (2x - 3y)^2 - 20xz + 30yz + 25z^2 \\ &= 2(2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 - 20xy + 30zy + 25z^2 \\ &= 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 20xz + 30yz + 25z^2\end{aligned}$$

Algunas veces se pueden agrupar los términos de dos trinomios de modo que uno de ellos sea la suma de dos números y el otro la diferencia de los mismos. Luego utilizaremos las fórmulas de 2 y 4 o la fórmula 3 para obtener el producto. Los siguientes ejemplos aclararán tales casos.

EJEMPLO 9.

Obtener el producto de $(3a + 2b + 5c)(3a + 2b - 5c)$

Solución:

Si encerramos entre paréntesis los dos primeros términos de cada trinomio, obtenemos $[(3a + 2b) + 5c][(3a + 2b) - 5c]$, es decir, la suma y diferencia de dos números. Por tanto podemos obtener el producto utilizando primero la fórmula 4 y luego completar el problema utilizando la fórmula 2. Así obtendremos:

$$\begin{aligned}[(3a + 2b) + 5c][(3a + 2b) - 5c] &= (3a + 2b)^2 - (5c)^2 \\ &= 9a^2 + 12ab + ab^2 - 25c^2\end{aligned}$$

EJEMPLO 10.

Hallar el producto de $(3x + 4y + z)(3x - 4y - z)$.

Solución:

Advirtamos primero que si agrupamos los dos primeros términos de cada trinomio, no se obtiene el producto de la suma y diferencia de dos números. Pero si agrupamos los términos del siguiente modo $[3x + (4y + z)][3x - (4y + z)]$, vemos que las expresiones en ambos corchetes son respectivamente la suma y diferencia de dos números. Nótese que los paréntesis en el segundo trinomio van precedidos por un signo menos, y que hemos de cambiar el signo de los términos encerrados. Procederemos como sigue:

$$\begin{aligned}(3x + 4y + z)(3x - 4y - z) &= [3x + (4y + z)][3x - (4y + z)] \\ &= (3x)^2 - (4y + z)^2 \\ &= 9x^2 - (16y^2 + 8yz + z^2) \\ &= 9x^2 - 16y^2 - 8yz - z^2\end{aligned}$$