No se necesita escribir todos los factores en orden si se descubre más pronto el factor apropiado. ¿Importaría, si hubieras escrito $10x^2 + 4x - 15x - 6$ en el primer paso?. Compruébalo y verás si es cierto.

Factorizar:

$$8x^2 - 26x + 15$$

Encontramos primero el producto (a) (c) que es (8) (15) = 120. Puesto que (a) (c) es positivo, debemos encontrar un par de factores de 120 cuya suma sea 26; son 6 y 20; ambos deben tener el signo del término de un medio. Así pues, escribimos:

1	120	$8x^2 - 6x - 20x + 15$
2	60	$= (8x^2 - 6x) + (-20x + 15)$
3	40	$= (8x^2 - 6x) - (20x - 15)$
4	30	$= 2x(4x - 3) - 5(4x - 3)$
5	24	$= (2x - 5)(4x - 3)$

¿ Podrías haber escrito, $8x^2 - 20x - 6x + 15$ en el primer paso? Razona la respuesta.

Factorizar:

$$6x^2 + x - 12$$

Aquí el producto de (a) (c) es, (6) (-12) ó (-72). Puesto que (a) (c) es negativo, buscaremos un par de factores de 72 cuya diferencia es 1; son 8 y 9, el mayor debe tener el signo del término central. Entonces escribimos:

1	72	$6x^2 + 9x - 8x - 12$
2	36	$(6x^2 + 9x) + (-8x - 12)$
3	24	$(6x^2 + 9x) - (8x + 12)$
4	18	$3x(2x + 3) - 4(2x + 3)$
6	12	$(3x - 4)(2x + 3)$
8	9	

¿Daría, $6x^2 - 8x + 9x - 12$ los mismos factores?. Compruébalo y en esa forma verás si es cierto.

Tercer método.

Factorizar:

$$6x^2 - 7x - 3$$

Se multiplica el trinomio por el coeficiente de x^2 que es 6 y dejando indicado el producto de 6 por 7x se tiene.

$$36x^2 - (6)(7x) - 18$$

pero, $36x^2 = (6x)^2$

y $(6)(7x) = (7)(6x)$

por lo tanto, podemos escribir:

$$(6x)^2 - 7(6x) - 18$$

Descomponiendo este trinomio según se vió en el primer método, el primer término de cada factor será la raíz cuadrada de $(6x)^2$ o sea 6x

$$(6x - \ \ )(6x + \ \ )$$

dos números cuya diferencia sea 7 y cuyo producto sea 18; 9 y 2. Tendremos:

$$(6x - 9)(6x + 2)$$

Como al principio multiplicamos el trinomio por 6, ahora tenemos que dividir por 6 para no alterar el trinomio y tenemos:

$$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}$$

Pero como ninguno de los factores es divisible por 6, descomponemos 6 en (2) (3) y dividiendo (6x - 9) entre 3 y (6x + 2) entre 2, se tiene:

$$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{(2)(3)} = (2x - 3)(3x + 1)$$

luego, $6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$

Factorizar:

$20x^2 + 7x - 6$

Multiplicando el trinomio por 20, tendremos:

$(20x)^2 + 7(20x) - 120$

descomponiendo este trinomio, tenemos:

$(20x + 15)(20x - 8)$

Para cancelar la multiplicación por 20 tenemos que dividir por 20, pero como ninguno de los dos factores es divisible por 20 descomponemos el 20 en (5) (4) y dividiendo el factor $(20x + 15)$ entre 5 y $(20x - 8)$ entre 4, tenemos:

$$\frac{(20x + 15)(20x - 8)}{(5)(4)} = (4x + 3)(5x - 2)$$

luego, $20x^2 + 7x - 6 = (4x + 3)(5x - 2)$

Factorizar: $18a^2 - 13a - 5$

multiplicando por 18: $(18a)^2 - 90$. Ahora factorizando este trinomio: $(18a - 18)(18a - 5)$ dividiendo por 18, pe lo cual, como el primer binomio $(18a - 18)$ es divisible basta efectuar la división y se tiene:

$$\frac{(18a - 18)(18a + 5)}{18} = (a - 1)(18a + 5)$$

luego, $18a^2 - 13a - 5 = (a - 1)(18a + 5)$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Factorizar correctamente los siguientes trinomios.

1.- $2x^2 + x - 3$	**6.- $8h^2 + 5hk - 3k^2$**
2.- $3x^2y^2 - 11xy + 8$	**7.- $15b^2 - 17bc + 4c^2$**
3.- $7a^2 - 44a - 35$	**8.- $16u^2 + 32uv + 15v^2$**
4.- $2a^2 + 29a + 90$	**9.- $30x^2 + 13x - 10$**
5.- $5y^2 + 13y - 6$	**10.- $21a^2 + 11a - 2$**

2-11 DESCOMPOSICIÓN POR AGRUPACIÓN.

Sea el polinomio:

$$\mathbf{ac + ad + bc + bd}$$

que se supone que proviene del producto de dos factores binomios.

Agrupando los términos de dos en dos de manera que cada grupo tenga un factor común, se puede escribir:

$$(ac + ad) + (bc + bd)$$

como se ve, el primer grupo es divisible entre "a" y el segundo lo es entre "b"; resulta pues:

$$(ac + ad) + (bc + bd) = a(c + d) + b(c + d)$$

Poniendo el binomio $(c + d)$ en factor común se tiene:

$$ac + ad + bc + bd + (a + b)(c + d)$$

de este resultado, se deduce que para descomponer en factores un polinomio de cuatro términos que se supone proviene de la multiplicación de dos factores binomios se siguen los siguientes pasos:

1.- Se agrupan convenientemente los cuatro términos en dos binomios tales que, cada uno admita un factor común.

2.- Se indica en cada grupo el producto del factor común por su binomio correspondiente el cual resultará el mismo en todos ellos si efectivamente el polinomio dado proviene del producto de dos factores binomios.

3.- Se indica el producto del binomio común por la suma algebráica de los otros factores diferentes.

NOTA.

Pudo haberse agrupado los términos de este otro modo:

$$(ac + bc) + (ad + bd)$$

EJEMPLOS:

Descomponer en producto de dos factores:

$$20ac + 15bc + 4ad + 3bd$$

$$20ac + 15bc + 4ad + 3bd = (20ac + 4ad) + (15bc + 3bd)$$

$$= 4a(5c + d) + 3b(5c + d)$$

$$= (4a + 3b)(5c + d)$$

NOTA:

Hubiera podido agruparse los términos así:

$$(20ac + 15bc) + (4ad + 3bd)$$

Descomponer en producto de dos factores:

$$18a^3 + 12a^2 - 15a - 10$$

$$18a^3 + 12a^2 - 15a - 10 = (18a^3 + 12a^2) - (15a + 10)$$

$$= 6a^2(3a + 2) - 5(3a + 2)$$

$$= (6a^2 - 5)(3a + 2)$$

Las propiedades asociativa y conmutativa para la adición junto con la propiedad distributiva permiten factorizar un polinomio por agrupación.

$$ax + by + ay + bx = (ax + bx) + (ay + by)$$

$$= (a + b)x + (a + b)y$$

$$= (a + b)(x + y)$$

En el último paso, (a + b) se maneja como un solo término al aplicar la propiedad distributiva.

He aquí otro polinomio que se puede factorizar rápidamente cuando se agrupan los términos en forma apropiada.

EJEMPLO:

$$2vw - 15st - 10vt + 3sw = (2vw - 10vt) + (3sw - 15st)$$

$$= 2v(w - 5t) + 3s(w - 5t)$$

$$= (2v + 3s)(w - 5t)$$

Naturalmente que puede haber más de una forma conveniente de agrupar los términos:

$$2vw - 15st - 10vt + 3sw = (2vw + 3sw) + (-15st - 10vt)$$

$$= w(2v + 3s) + (-5t)(2v + 3s)$$

$$= (w - 5t)(2v + 3s)$$

ya que la multiplicación es conmutativa, este resultado es el mismo que el precedente.

AUTOEVALUACIÓN 3.

Factorizar por agrupación:

1.- $ab + a + b + 1$

2.- $2c^2 + 4cd - 3c - 6d$

3.- $15h^2 - 9hk + 35hj - 21jk$

4.- $a^2 - ab + ac - a + b - c$

5.- $6bc - 9c^2 - 12cd - 8be + 12ce + 16de$

6.- $x^2 + xy + y^2 - x^3 + y^3$

7.- $25a^2 - b^2 + 4bd - 4d^2$

8.- $4r^2 + 12rs + 9s^2 - t^2 - 8tu - 16u^2$

9.- $xy - y^2 + xz - yz$

10.- $4rs - 6s^2 + 17st - 6rt - 12t^2$

2-12 MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.

Los múltiplos de un número son aquellos que resultan de multiplicarlo por cualquiera de los números naturales. Por ejemplo, los múltiplos de 3 son: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, etc.

Cuando se tienen dos o más números, siempre habrá uno o varios múltiplos que sean comunes a ellos, de los cuales el menor es el que recibe el nombre de mínimo común múltiplo (m. c. m.).

Sean los múltiplos de 8 y 12.

múltiplos de 8: 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64,...

múltiplos de 12: 0, 12, 24, 36, 48, 60,...

Observemos que 24 y 48 son múltiplos comunes pero 24 es el menor múltiplo común a la vez de 8 y de 12; por lo tanto, 24 es el m. c. m. de esos números.

Mínimo común múltiplo de varios números es el menor de los múltiplos que es común a los números propuestos.

Si los números propuestos son primos entre sí, el mínimo común múltiplo de ellos es el producto de los mismos.

EJEMPLO:

5, 7, 11.

m.c.m. (5, 7, 11) = 5 x 7 x 11 = 385

Para hallar mentalmente el m.c.m. de varios números, se considera el mayor de todos ellos y se observa si contiene exactamente a los restantes, en caso afirmativo, dicho número es el m. c. m. En caso contrario se ensaya con el duplo del mayor, con el triple, con el cuádruple, etc. hasta hallar un múltiplo del mayor, que contenga exactamente a los restantes. El número así obtenido es el m.c.m. de los números dados:

m. c. m. (24, 12 y 8) = 24

que contiene exactamente a los restantes.

m.c.m. (15, 10, 5 y 20) = 60

pues el triple de 20 contiene exactamente a los restantes. En el caso de que los números sean primos entre sí, el m.c.m. es el producto de los mismos.

m. c. m. (7, 23, 10) = 1610

2-13 M. C. M. POR DESCOMPOSICIÓN DE FACTORES PRIMOS.

Para hallar el m.c.m. se descompone en sus factores a cada uno de los números propuestos y en seguida se multiplican entre sí los factores distintos por los que aparecen con el mayor exponente de los factores repetidos.

EJEMPLOS:

Obtener el m.c.m. de 8 y 12

8	2		12	2
4	2		6	2
2	2		3	3
1			1	

$8 = (2)^3 \qquad \text{m.c.m.} = (2)^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$

$12 = (2)^2 \times 3$

Es decir, 24 es el dividendo que da divisiones exactas tomando como divisores a 8 y 12.

$24 \div 8 = 3$

$24 \div 12 = 2$

Calcular el m. c. m. de 25, 40 y 36:

25	5		40	2		36	2
5	5		20	2		28	2
1			10	2		9	3
			5	5		3	3
			1			1	

$25 = (5)^2$

$40 = (2)^3 (5) \qquad \text{m.c.m.} = (2)^3 (3)^2 (5)^2 = (8)(9)$

$(25) = 1800$

$36 = (2)^2 (3)^2$

Por lo tanto, 1800 es el menor dividendo que da divisiones exactas al tener como divisores 25, 40 y 36.

$1800 \div 25 = 72$

$1800 \div 40 = 45$

$1800 \div 36 = 50$

El procedimiento anterior puede simplificarse si se obtienen los factores primos en un solo cuadro factorizado con 2 hasta agotar todos los números divisibles entre 2, en seguida factorizando con 3, hasta acabar los divisibles entre 3; a continuación entre 5, y así con cada factor primo hasta lograr que se reduzcan todos los números a la unidad.

Cuando el número sea divisible se escribe nuevamente en el renglón inmediato inferior, hasta que se encuentra su divisibilidad.

EJEMPLOS:

Obtener el m. c. m. de 8 y 12

8	12	2
4	6	2
2	3	2
1	3	3
1	1	

$\text{m.c.m.} = (2)^3 (3) = (8)(3) = 24$