# UNIDAD XIII

## OPERACIONES CON LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

## LECCIÓN 1.

### 1.- PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Enunciaremos varias propiedades de las fracciones que nos serán útiles más adelante.

1) Puede cambiarse simultáneamente a la vez los signos del numerador y denominador de una fracción y no se altera.

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b}$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

2) Si el numerador y el denominador de una fracción algebraica, se multiplican o se dividen por una misma cantidad, la fracción no se altera.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a \div c}{b \div c}$$

3) Además una fracción a/b siendo a y b números cualesquiera y b $\neq 0$, se puede expresar como:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b}(a) = a(\frac{1}{b});$$

4) De igual modo una fracción 1/ab siendo a y b dos números diferentes del cero se pueden expresar como:

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

## 1-2 REDUCCIÓN A TÉRMINOS MÍNIMOS.

Reducir una fracción, es cambiar su forma sin cambiar su valor. Simplificar una fracción algebráica, es convertirla en una fracción equivalente, cuyos términos sean primos entre sí. Por ejemplo, las fracciones siguientes son equivalentes.

a) $$\frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

b) $$\frac{12a^2}{8a} = \frac{6a}{4} = \frac{3a}{2},$$

donde cada una de ellas está expresada en su forma más simple, ya que, al reducir nos queda que 3 y 2 son primos entre sí, al igual que 3a y 2 de la segunda fracción.

Cuando los términos de una fracción son primos entre sí la fracción



es irreductible y entonces, la fracción está reducida a su más simple expresión o a su mínima expresión.

La mínima expresión de una fracción, es aquella en la cual, el numerador y el denominador no tiene factores comunes. Así en los ejemplos anteriores, lo que hicimos para reducir fue.

a) $$\frac{12}{8} = \frac{(6)\,(2)}{(4)\,(2)} = \frac{6}{4} = \frac{(3)\,(2)}{(2)\,(2)} = \frac{3}{2}$$

o bien

$$\frac{12}{8} = \frac{(4)\,(3)}{(4)\,(2)} = \frac{3}{2};$$

b) $$\frac{12a^2}{8} = \frac{(4)\,(3)a \cdot a}{(4)\,(2)\,a} = \frac{3a}{2}$$

Por lo tanto, para reducir una fracción a su mínima expresión, se factorizan primero el numerador y el denominador de la fracción y luego se divide, cada uno de ellos entre cada factor que les sea común.

Así, podemos determinar si una fracción está en sus términos mínimos expresando el numerador y denominador como productos de sus factores primos. Cualquier factor común que aparezca tanto en el numerador como en el denominador puede entonces ser suprimido o cancelado.

---

EJEMPLO:

Simplificar la fracción $\dfrac{9a^2b^3}{2a^3b^4c^2}$

Solución:

Se tiene que:

$$\frac{9a^2b^3}{24a^3b^4c^2} = \frac{(3)(1)(1)}{(8)(a)(b)(c^2)} = \frac{3}{8abc^2}$$

Hemos dividido 9 y 24 entre 3 y obtuvimos 3 y 8; $a^2$ y $a^3$ entre $a^2$ y obtuvimos 1 y a; $b^3$ y $b^4$ entre $b^3$ y obtuvimos 1 y b; $c^2$ no tiene factor común por tanto, queda en el denominador. También vemos que, 3 y $8abc^2$, son números primos entre sí, es decir, no hay factor común por lo que resulta una fracción irreductible, que es precisamente lo que queriamos.

De las fracciones, las más fáciles de resolver son las de un monomio entre otro monomio, como en el caso del ejemplo anterior, puesto que está expresado como factor y no aparece ningún sumando. Veamos otro ejemplo.

---

EJEMPLO:

Simplificar la fracción $\dfrac{12a^3b^2c}{18ab^3c^2}$

Solución:

Según el principio fundamental de las fracciones, se pueden dividir sus dos términos entre $6ab^2$, y se tienen:

$$\frac{12a^3b^2c \div 6ab^2c}{18ab^3c^2 \div 6ab^2c} = \frac{2a^2}{3bc}$$

Para llegar a este resultado se han dividido el numerador y el denominador entre $6ab^2c$, que es el factor máximo de ambos miembros de la fracción cuyo producto es el máximo común divisor (m.c.d.) de los términos de dicha fracción.

Por tanto, para reducir una fracción a su más simple expresión,



mediante una sola división, se dividen sus dos términos entre su máximo común divisor (m.c.d)

---

EJEMPLO:

Reducir a su más simple expresión la fracción

$$\frac{144a^5b^4c^3d}{36a^4b^5c^2}$$

Solución:

El m.c.d. de los términos de la fracción es $36a^4b^4c^2$, por lo que queda como:

$$\frac{144a^5b^4c^3d \div 36a^4b^4c^2}{36a^4b^5c^2 \div 36a^4b^4c^2} = \frac{4acd}{b}$$

Ahora vemos el caso en el que la fracción involucre división de monomios entre polinomios o polinomios entre polinomios.

Para poder simplificar una fracción allgebráica de este tipo es necesario primero descomponer cada polinomio en sus factores primos, o bien, factorizar completamente el polinomio de cada término de la fracción para luego suprimir los factores que sean comunes del numerador y el denominador. Veamoslo mejor con el siguiente ejemplo.

---

EJEMPLO:

Reduzcamos la fracción $\dfrac{2x^2}{4x^2 - 4xy}$ a términos mínimos.

Solución:

Como en la fracción aparece solamente en el denominador un polinomio, procedemos a factorizarlo:

$$\frac{2x^2}{4x^2 - 4xy} = \frac{2x^2}{4x\,(x-y)}$$

luego sacamos el m. c. d. que es 2x

$$\frac{2x^2 \div 2x}{4x\,(x - y) \div 2x} = \frac{x}{2\,(x - y)}$$

---

EJEMPLO:

Reducir a su más simple expresión la fracción

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6}$$

Solución:

Se procede a factorizar el numerador y denominador de la fración:

$$\frac{(x - 2)\,(x - 3)}{(x - 2)\,(x + 3)} = \frac{x - 3}{x + 3}$$

En la reducción de fracciones, es común suprimir el factor por el cual se dividen el numerador y el denominador. El proceso de eliminar un factor común del numerador y denominador de una fracción es llamado cancelación multiplicativa.

---

EJEMPLO:

Reducir a su más simple expresión la fracción

$$\frac{x^2 - 9x + 20}{25 - x^2}$$



Solución:

Haciendo lo mismo que en los otros ejemplos tenemos

$$\frac{x^2 - 9x + 20}{25 - x^2} = \frac{(x - 5)\,(x - 4)}{(5 - x)\,(5 + x)}$$

Ahora bien, como en el numerador tenemos (x - 5) y en el denominador (5 - x), podemos, según una de las propiedades de las fracciones, multiplicar arriba y abajo por una misma cantidad, y no se nos altera la fracción.

$$\frac{(x - 5)\,(x - 4)}{(5 - x)(5 + x)} = \frac{-1(x - 5)(x - 4)}{-1(5 - x)(5 + x)} = \frac{(5 - x)(x - 4)}{-(5 - x)(5 + x)}$$

Ahora procedamos a simplificar

$$-\frac{(5 - x)\,(x - 4)}{(5 - x)\,(5 + x)} = -\frac{x - 4}{5 + x} = \frac{4 - x}{5 + x}$$

## AUTOEVALUACIÓN 1.

Reducir a su más simple expresión las siguientes fracciones indicando el m.c.d.

1.- $\dfrac{4x^2}{12x^7} = \underline{\qquad\qquad}$; m.c.d. $= \underline{\qquad\qquad}$

2.- $\dfrac{8a^2b^3}{24a^3b^2} = \underline{\qquad\qquad}$, m.c.d. $= \underline{\qquad\qquad}$

3.- $\dfrac{32x^2y^4z^3}{16x^4y^3z^4} = \underline{\qquad\qquad}$; m.c.d $= \underline{\qquad\qquad}$

4.- $\dfrac{75a^7m^5}{100a^3m^{12}n^3} = \underline{\qquad\qquad}$; m.c.d. $= \underline{\qquad\qquad}$

5.- $\dfrac{24ab^2c}{18a^2bc^2} = \underline{\qquad\qquad}$; m.c.d. $= \underline{\qquad\qquad}$

6.- $\dfrac{12a^2b^3}{60a^3b^5c^6} = \underline{\qquad\qquad}$; m.c.d. $= \underline{\qquad\qquad}$

7.- $\dfrac{27a^2b^2c^3d^4}{63a^3b^3c^4d^5} = \underline{\qquad\qquad}$; m.c.d. $= \underline{\qquad\qquad}$

8.- $\dfrac{(25a^2b^5)\,(15a^3b^6)}{150a^6\,b^6} = \underline{\qquad\qquad}$; m.c.d $= \underline{\qquad\qquad}$

Factorizar y reducir a su mínima expresión, las fracciones siguientes, llenando los espacios indicados.



9.- $\dfrac{3x^2y + 15xy}{x^2 - 25} = \dfrac{3xy\,(\quad)}{(x + 5)(\quad)} = \underline{\qquad\qquad}$

10.- $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 5x + 6} = \dfrac{(x + 3)\,(\quad)}{(\quad)(x + 2)} = \underline{\qquad\qquad}$

11.- $\dfrac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \dfrac{(a - b)\,(\quad)}{(\quad)\,(a - b)} = \underline{\qquad\qquad}$

12.- $\dfrac{a^3 - 2a^2 - a + 2}{a^3 + 2a^2 - a - 2} = \dfrac{a^2(\quad) - (a - 2)}{a^2(a + 2) - (\quad)} = \dfrac{(a - 2)\,(\quad)}{(a + 2)\,(\quad)}$

13.- $\dfrac{9 - 6x + x^2}{9 - 9x + 2x^2} = \dfrac{(3 - x)\,(\quad)}{(3 - 2x)\,(\quad)} = \underline{\qquad\qquad}$

Reduzca cada fracción a términos mínimos.

14.- $\dfrac{b^2 - a^2}{(a - b)^2}$

15.- $\dfrac{a^2 - b^2}{2a^2 + ab - b^2}$

16.- $\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^3 + b^3}$

17.- $\dfrac{3x^2 - 11x + 6}{3x^2 + x - 2}$

18.- $\dfrac{c^3 + 3c^2 + 2c + 6}{c^3 - c^2 + 2c - 2}$