AUTOEVALUACIÓN 2.

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

1) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{\quad}{4}$

2) $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{12}=\frac{\quad}{18}$

3) $\frac{u}{9}+\frac{v}{2}+\frac{4u-9v}{18}=\frac{\quad}{3}$

4) $\frac{1}{6y}+\frac{1}{3x}+\frac{2x+3y}{12xy}=\frac{\quad}{12xy}$

5) $\frac{2}{3b}+\frac{3}{2a}+\frac{2a-3b}{2ab}=\frac{\quad}{ab}$

6) $\frac{5a}{12bc}+\frac{4b}{9ac}+\frac{3c}{16ab}=\frac{\quad}{144abc}$

7) $\frac{3yz}{4x^2}+\frac{5}{8xyz}+\frac{7x}{36yz^2}=\frac{\quad}{72x^2yz^2}$

8) $\frac{h}{10k}+\frac{2h^2-5k^2}{20hk}+\frac{k}{12h}=\frac{\quad}{30hk}$

9) $\frac{2u}{9v^2}+\frac{5v}{18u^2}+\frac{u^2}{12v^3}=\frac{\quad}{36u^2v^3}$

10) $\frac{4c}{5a^2b}+\frac{3b}{10ac^2}+\frac{5a}{6b^2c}=\frac{\quad}{30a^2b^2c^2}$

Suma de fracciones con denominadores polinomios.

EJEMPLO:

Sumar, $\frac{1}{3a+3}+\frac{1}{2a-2}+\frac{1}{a^2-1}$

Se factorizan los binomios, para encontrar el m.c.m. de los denominadores:

$3a+3=3(a+1)$

$2a-2=2(a-1)$ m.c.m. $=6(a+1)(a-1)$

$a^2-1=(a+1)(a-1)$

dividiendo el m.c.m., entre cada denominador y multiplicando cada cociente, por el numerador respectivo, tenemos:

$$\frac{1}{3a+3}+\frac{1}{2a-2}+\frac{1}{a^2-1}=\frac{2(a-1)+3(a+1)+6}{6(a+1)(a-1)}$$

multiplicando $=\frac{2a-2+3a+3+6}{6(a+1)(a-1)}$

reduciendo términos semejantes $=\frac{5a+7}{6(a+1)(a-1)}$

EJEMPLO:

Sumar, $\frac{x-1}{x^2-4}+\frac{x-2}{x^2-x-6}+\frac{x+6}{x^2-5x+6}$

Se encuentra el m.c.m. de los denominadores:

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) \text{ m.c.m.} = (x + 2)(x - 2)(x - 3)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

dividiendo el denominador común, entre cada denominador y multiplicando los cocientes, por los numeradores respectivos, se tiene:

$$\frac{x-1}{x^2-4} + \frac{x-2}{x^2-x-6} + \frac{x+6}{x^2-5x+6} = \frac{(x-1)(x-3)+(x-2)^2+(x+2)(x+6)}{(x+2)(x-2)(x-3)}$$

$$\text{multiplicando} \quad = \frac{x^2-4x+3+x^2-4x+4+x^2+8x+12}{(x+2)(x-2)(x-3)}$$

$$\text{reduciendo términos semejantes} = \frac{3x^2+19}{(x^2-4)(x-3)}$$

AUTOEVALUACIÓN 3.

Efectuar las operaciones siguientes y simplificar:

1) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{\quad}{x^2-1}$

2) $\dfrac{1}{3a-2b} + \dfrac{a-b}{9a^2-4b^2} = \dfrac{\quad}{9a^2-4b^2}$

3) $\dfrac{2}{x^2-xy} + \dfrac{2}{xy+y^2} = \dfrac{\quad}{xy(x^2-y^2)}$

4) $\dfrac{xy}{9x^2-y^2} + \dfrac{x}{3x+y} = \dfrac{\quad}{9x^2-y^2}$

5) $\dfrac{y+1}{10} + \dfrac{y-3}{5y-10} + \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{\quad}{10(y-2)}$

6) $\dfrac{a}{x^2-xa} + \dfrac{x+a}{xa} + \dfrac{x}{xa-a^2} = \dfrac{\quad}{a(x-a)}$

7) $\dfrac{1}{b+b^2} + \dfrac{1}{b-b^2} + \dfrac{b+3}{1-b^2} = \dfrac{\quad}{b(1-b)}$

8) $\dfrac{z-a}{z+a} + \dfrac{z+a}{z-a} + \dfrac{4za}{z^2-a^2} = \dfrac{\quad}{z-a}$

9) $\dfrac{c-2}{2c^2-5c-3} + \dfrac{c-3}{2c^2-3c-2} + \dfrac{2c-1}{c^2-5c+6} = \dfrac{\quad}{(2c+1)(c-2)(c-3)}$

10) $\dfrac{k-2}{k-1} + \dfrac{k+3}{k+2} + \dfrac{k+1}{k-3} = \dfrac{\quad}{(k-1)(k+2)(k-3)}$

1-6 RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Definición.

La sustracción o resta, es una operación que tiene por objeto, hallar lo que falta a un número, para igualar a otro mayor de la misma especie; o también, hallar uno de dos sumandos, cuando se conocen la suma y el otro sumando.

La suma dada, se llama minuendo, el sumando conocido, se llama sustraendo, y el sumando que se busca, se denomina resta o diferencia.

El signo de la sustracción, es una rayita horizontal (-) que se lee menos, y que se coloca entre el minuendo y el sustraendo.

Para restar fracciones algebráicas, se reducen las fracciones a un común denominador y se restan los numeradores.

EJEMPLOS:

1) $\frac{3}{2a} - \frac{1}{6a} = \frac{9 - 1}{6a} = \frac{8}{6a} = \frac{4}{3a}$

2) $\frac{8}{a - b} - \frac{5}{a + b} = \frac{8(a + b) - 5(a - b)}{a^2 - b^2} = \frac{8a + 8b - 5a + 5b}{a^2 - b^2}$

$$= \frac{3a + 13b}{a^2 - b^2}$$

3) $\frac{a + 3b}{a^2 - 9b^2} - \frac{a - 5b}{a^2 - 25b^2} = \frac{1}{a - 3b} - \frac{1}{a + 5b}$

$$\frac{a + 5b - (a - 3b)}{a^2 + 2ab - 15b^2} = \frac{a + 5b - a + 3b}{a^2 + 2ab - 15b^2} = \frac{8b}{a^2 + 2ab - 15b^2}$$

Resta de fracciones con denominadores monomios.

EJEMPLO:

De, $\frac{x + 2y}{3x}$ restar $\frac{4xy^2 - 3}{6x^2y}$

El m.c.m. de los denominadores es, $6x^2y$.

Dividiendo $6x^2y$ entre cada denominador y multiplicando cada cociente, por el numerador respectivo, se tiene:

$$\frac{x + 2y}{3x} - \frac{4xy^2 - 3}{6x^2y} = \frac{2xy(x + 2y)}{6x^2y} - \frac{4xy^2 - 3}{6x^2y}$$

multiplicando $= \frac{2x^2y + 4xy^2}{6x^2y} - \frac{4xy^2 - 3}{6x^2y}$

restando numeradores $= \frac{2x^2y + 4xy^2 - (4xy^2 - 3)}{6x^2y}$

restando numeradores $= \frac{2x^2y + 4xy^2 - 4xy^2 + 3}{6x^2y}$

$$= \frac{2x^2y + 3}{6x^2y}$$

obsérvese que para restar $4xy^2 - 3$ del primer numerador hay que cambiar el signo a cada uno de sus términos, y esta operación la indicamos, incluyendo $4xy^2 - 3$ en un paréntesis, precedido del signo (-).

Resta de fracciones con denominadores polinomios.

EJEMPLO:

restar, $\frac{x}{xy - y^2} - \frac{1}{y}$

se encuentra el m.c.m. de los denominadores:

$xy - y^2 = y(x - y)$ m.c.m.: $y(x - y)$

$y = y$

dividiendo, y(x - y) entre cada denominador y multiplicando cada cociente, por el numerador respectivo, se tiene:

$$\frac{x}{xy - y^2} - \frac{1}{y} = \frac{x - (x - y)}{y(x - y)} = \frac{x - x + y}{y(x - y)} = \frac{y}{y(x - y)} = \frac{1}{x - y}$$

EJEMPLO:

Simplificar: $\frac{4a^2 - 1}{2a^2 - 8} - \frac{(a + 1)^2}{a^2 + 4a + 4} - \frac{a + 3}{a - 2}$

Se encuentra el denominador común:

$2a^2 - 8 = 2(a^2 - 4) = 2(a + 2)(a - 2)$

$a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$ m.c.m. $= 2(a + 2)^2(a - 2)$

$(a - 2) = (a - 2)$

dividiendo, $2(a + 2)^2(a - 2)$ entre cada denominador, queda:

$$\frac{4a^2 - 1}{2a^2 - 8} - \frac{(a + 1)^2}{a^2 + 4a + 4} - \frac{a + 3}{a - 2} =$$

$$\frac{(a + 2)(4a^2 - 1) - 2(a - 2)(a + 1)^2 - 2(a + 2)^2(a + 3)}{2(a + 2)^2(a - 2)}$$

$$= \frac{(a + 2)(4a^2 - 1) - 2(a - 2)(a^2 + 2a + 1) - 2(a^2 + 4a + 4)(a + 3)}{2(a + 2)^2(a - 2)}$$

$$= \frac{(a + 2)(4a^2 - 1) - 2(a - 2)(a^2 + 2a + 1) - 2(a^2 + 4a + 4)(a + 3)}{2(a + 2)^2(a - 2)}$$

$$= \frac{4a^3 + 8a^2 - a - 2 - 2(a^3 - 3a - 2) - 2(a^3 + 7a^2 + 16a + 12)}{2(a + 2)^2(a - 2)}$$

$$= \frac{4a^3 + 8a^2 - a - 2 - 2a^3 + 6a + 4 - 2a^3 - 14a^2 - 32a - 24}{2(a + 2)^2(a - 2)}$$

resumiendo términos semejantes y simplificando, queda:

$$= \frac{-6a^2 - 27a - 22}{2(a + 2)^2(a - 2)} = \frac{6a^2 + 27a + 22}{2(a + 2)^2(2 - a)}$$

AUTOEVALUACIÓN 4.

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

Restar:

1) $\frac{1}{2}$ de $\frac{4b}{a} = \frac{\qquad}{2a}$

2) $\frac{2a + 5}{2a}$, de $\frac{1}{10a} = \frac{\qquad}{10a}$

3) $\frac{y - 3}{xy}$, de $\frac{x + 5}{x} = \frac{\qquad}{xy}$

4) De, $\frac{7x - 4}{4}$, restar $\frac{3x + 2}{3} = \frac{\qquad}{12}$

5) De, $\frac{4}{rs}$, restar $\frac{2 - t}{rt} = \frac{\qquad}{rst}$

6) De, $\frac{b - 2a}{20a}$, restar $\frac{a - 3b}{24b} = \frac{\qquad}{120ab}$

7) $\dfrac{3}{a^3} - \dfrac{2}{a^2} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{\qquad}{a^3}$

8) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{\qquad}{x^3}$

9) $\dfrac{a}{yz} - \dfrac{a + z}{xz} - \dfrac{a + y}{xy} = \dfrac{\qquad}{xyz}$

10) $\dfrac{3}{5c} - \dfrac{c - 1}{3c^2} - \dfrac{c^2 + 2c + 3}{15c^3} = \dfrac{\qquad}{5c^3}$

AUTOEVALUACIÓN 5.

Resta,

1) $\dfrac{x}{2x - 4}$, de $\dfrac{2x - 5}{2 - x} = \dfrac{\qquad}{2}$

2) $\dfrac{a}{a^2 - b^2}$, de $\dfrac{1}{a + b} = \dfrac{\qquad}{b^2 - a^2}$

3) $\dfrac{a - 1}{a + 3}$, de $\dfrac{3a}{2a + 6} = \dfrac{\qquad}{2(a + 3)}$

4) De, $\dfrac{4x - 7}{x^2 - 3x + 2}$, restar $\dfrac{3}{x - 1} = \dfrac{\qquad}{x - 2}$

5) De, $\dfrac{6m - 13}{m^2 - 5m + 6}$, restar $\dfrac{5}{m - 3} = \dfrac{\qquad}{m - 2}$

6) De, $\dfrac{x}{x^2 - 25}$, restar $\dfrac{1}{2x + 10} = \dfrac{\qquad}{2(x - 5)}$

7) $\dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{3}{1 + x} - \dfrac{x - 5}{1 - x^2} = \dfrac{\qquad}{\qquad}$

8) $\dfrac{a - 2}{(a + 2)^2} - \dfrac{a}{5(a + 2)} - \dfrac{1}{25} = \dfrac{\qquad}{25(a + 2)^2}$

9) $\dfrac{a - 6b}{2a^2 + 5ab + 2b^2} - \dfrac{3}{2a + b} - \dfrac{7}{a + 2b} = \dfrac{\qquad}{(2a + b)(a + 2b)}$

10) $\dfrac{a}{a^2 + a - 2} - \dfrac{3}{a^2 + 2a - 3} - \dfrac{a}{a^2 + 5a + 6} = \dfrac{\qquad}{(a-1)(a+2)(a+3)}$

1-7 SUMA Y RESTA COMBINADAS DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

EJEMPLO:

Efectuar las operaciones siguientes y simplificar:

$$\frac{a - 2}{a^2 - a} - \frac{a + 3}{a^2 + 3a - 4} + \frac{a^2 + 12a + 16}{a^4 + 3a^3 - 4a^2}$$

se encuentra el común denominador:

$a^2 - a = a(a - 1)$

$$a^2 + 3a - 4 = (a + 4)(a - 1)$$

$$a^4 + 3a^3 - 4a^2 = a^2(a^2 + 3a - 4) = a^2(a + 4)(a - 1)$$

$$\text{m.c.m.} = a^2(a - 1)(a + 4)$$

se tiene

$$\frac{a - 2}{a^2 - a} - \frac{a + 3}{a^2 + 3a - 4} + \frac{a^2 + 12a + 16}{a^4 + 3a^3 - 4a^2} =$$

$$= \frac{a(a + 4)(a - 2) - a^2(a + 3) + a^2 + 12a + 16}{a^2(a - 1)(a + 4)}$$

$$\text{multiplicando} = \frac{a^3 + 2a^2 - 8a - a^3 - 3a^2 + a^2 + 12a + 16}{a^2(a - 1)(a + 4)}$$

$$\text{simplificando} = \frac{4a + 16}{a^2(a - 1)(a + 4)} = \frac{4(a + 4)}{a^2(a - 1)(a + 4)} = \frac{4}{a^2(a - 1)}$$

AUTOEVALUACIÓN 6.

Efectúa las operaciones indicadas y simplificar:

1) $\frac{5}{4} - \frac{11}{12} + \frac{5}{18} = \underline{\qquad}$

2) $\frac{1}{6y} + \frac{1}{3x} - \frac{2x + 3y}{12xy} = \underline{\qquad}$

3) $\frac{5a}{12bc} + \frac{4b}{9ac} - \frac{3c}{16ab} = \frac{\qquad}{144abc}$

4) $\frac{u}{9} - \frac{v}{2} - \frac{4u - 9v}{18} = \underline{\qquad}$

5) $\frac{3x}{2x + y} + \frac{5y}{3x} - \frac{3}{2} = \frac{\qquad}{6x(2x + y)}$

6) $\frac{x}{x - 2y} + \frac{y}{2x + y} - 1 = \frac{\qquad}{(x - 2y)(2x + y)}$

7) $\frac{3u + v}{u^2 - v^2} - \frac{2v}{u(u - v)} - \frac{1}{u + v} = \underline{\qquad}$

8) $\frac{x^2 + 4xy}{x^3 + y^3} + \frac{1}{x + y} - \frac{x}{x^2 - xy + y^2} = \frac{\qquad}{x^2 - xy + y^2}$

9) $\frac{a + 2}{a^2 - a - 6} + \frac{a - 4}{a^2 - 7a + 12} - \frac{a + 2}{a^2 - 2a - 8} = \frac{\qquad}{(a - 3)(a - 4)}$

10) $\frac{x}{x^2 - 5x - 14} - \frac{2}{x - 7} + \frac{x}{x^2 - 9x + 14} = \frac{\qquad}{(x^2 - 4)(x - 7)}$

1-8 FRACCIONES COMPLEJAS.

Si el numerador o el denominador de una fracción, o ambos, contienen a su vez fracciones, la fracción se llama, **fracción compleja**.

EJEMPLOS:

$$\frac{\frac{3}{2}}{5}, \quad \frac{1+\frac{x}{y}}{x+y}, \quad \frac{\frac{4x}{x+y}+\frac{2y}{x-y}}{3-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$$

Existen dos métodos, para reducir una fracción compleja a una simple. El primero consiste, en multiplicar el numerador y el denominador de la fracción compleja, por el m.c.m. de cada denominador que aparezca en ella.

EJEMPLO:

Reducir, la siguiente fracción compleja, a una simple.

$$\frac{1+\frac{x}{y}}{x+y}$$

se observa, que los denominadores de 1 y de $(x + y)$, son 1. Por tanto, el m.c.m. de los denominadores de la fracción compleja es "y". Por consiguiente, se multiplican por "y" el numerador y el denominador, y se obtiene

$$\frac{1+\frac{x}{y}}{x+y} = \frac{y(1+\frac{x}{y})}{y(x+y)} = \frac{y+x}{xy+y^2} = \frac{y+x}{y(x+y)} = \frac{1}{y}$$

EJEMPLO:

En la fracción compleja,

$$\frac{\frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}}{\frac{4(x-y)}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}}$$

el m.c.m. de los denominadores es, $(x + y)(x - y)$ ó $x^2 - y^2$. A continuación, se indican los pasos de la simplificación.

$$\frac{\frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}}{\frac{4(x-y)}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}} = \frac{\frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}}{\frac{4(x-y)}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{x+y}(x^2-y^2)-\frac{1}{x-y}(x^2-y^2)}{\frac{4(x-y)}{x+y}(x^2-y^2)-\frac{x+y}{x-y}(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{2(x-y)-(x+y)}{4(x-y)(x-y)-(x+y)(x+y)}$$

$$= \frac{2x - 2y - x - y}{4(x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)}$$

$$= \frac{x - 3y}{4x^2 - 8xy + 4y^2 - x^2 - 2xy - y^2}$$

$$= \frac{x - 3y}{3x^2 - 10xy + 3y^2} = \frac{x - 3y}{(3x - y)(x - 3y)} = \frac{1}{3x - y}$$

Si en las expresiones, en la fracción compleja son complicadas, resulta a veces más fácil, reducir el numerador y el denominador a fracciones simples y proceder luego, como en la división.

EJEMPLO:

Redudir, la siguiente fracción compleja.

$$\frac{\dfrac{x - y}{x + y} - \dfrac{x + y}{x - y}}{1 - \dfrac{x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2}} = \frac{\dfrac{(x - y)^2 - (x + y)^2}{(x + y)(x - y)}}{\dfrac{x^2 - y^2 - (x^2 - xy - y^2)}{x^2 - y^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2}{x^2 - y^2}}{\dfrac{x^2 - y^2 - x^2 + xy + y^2}{x^2 - y^2}} = \frac{\dfrac{-4xy}{x^2 - y^2}}{\dfrac{xy}{x^2 - y^2}}$$

$$= \frac{-4xy}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{xy} = -4$$

Si el numerador o el denominador de una fracción compleja, o ambos, son a su vez fracciones complejas, cada una debe reducirse, a una fracción simple, como primer paso de la simplificación.

EJEMPLO:

Reducir, la siguiente fracción compleja.

$$\frac{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x - 1}}}{\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x + 1}}} = \frac{1 + \dfrac{x - 1}{x - 1 + 1}}{\dfrac{x + 1}{x + 1 - 1}} = \frac{1 + \dfrac{x - 1}{x}}{\dfrac{x + 1}{x}}$$

En el paso anterior, los dos miembros de la fracción compleja, se han multiplicado en el numerador por $(x - 1)$ y en el denominador por $(x + 1)$.

$$= \frac{x + x - 1}{x + 1} = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

Se ha multiplicado el numerador y el denominador por x.