$$= 10 \text{ m} + 5 \text{ m}$$
$$= 15 \text{ m.}$$

Y la velocidad al finalizar la etapa:

$$v = v_o + at$$
$$= 10 \text{ m/seg} + (10 \text{ m/seg}^2)(1\text{seg})$$
$$= 10 \text{ m/seg} + 10 \text{ m/seg}$$
$$= 20 \text{ m/seg}$$

Distancia hasta este momento:

$$d_2 = 5 \text{ m} + 15 \text{ m}$$
$$= 20 \text{ m}$$

3º. ¿Qué sucede en el tercer segundo? Existirá también una distancia recorrida en este tiempo, para lo cual usaremos como Vel. inicial la vel. final del paso anterior: $v_o = 20$ m/seg.

$$d_3 = v_o t + + at^2$$
$$= (20\text{m/seg})(1\text{seg}) + + (10\text{m/seg}^2)(1\text{seg})^2$$
$$= 20 \text{ m} + 5 \text{ m}$$
$$= 25 \text{ m}$$

Al finalizar la etapa: la Vel. quedaría así:

$$v = v_o + at$$
$$= 20 \text{ m/seg} + (10 \text{ m/seg})(1 \text{ seg})$$
$$= 30 \text{ m/seg}$$

$$d_t = d_1 + d_2 + d_3$$
$$= 5 \text{ m} + 15 \text{ m} + 25 \text{ m} = 45 \text{ m}$$

Por deducción obtendremos que recorrió 45 m en 3 seg y que la Vel. final (de choque) es de 30 m/seg.

Los pasos anteriores sirven para darnos cuenta del comportamiento en caída libre, ya que todos los cuerpos en caída libre realizan lo mismo.

Tomando como base las cuatro fórmulas generales del movimiento acelerado, se muestra enseguida con que facilidad se calculan estas dos incógnitas:

a) Para calcular la velocidad final, solo podemos usar la Ec. III. Las ecuaciones I y II no tenemos los datos suficientes para calcular la Vel. final, y la ecuación IV no tiene la incógnita v.

$$v^2 = v_o^2 + 2ad$$
$$= 0 + 2(10 \text{ m/seg}^2)(45 \text{ m})$$
$$= 0 + 90 \text{ m}^2/\text{seg}^2$$
$$= 900 \text{ m}^2$$
$$v = \sqrt{900 \text{ m}^2}$$
$$= 30 \text{ m /seg}$$

b) Para calcular el tiempo conociendo la Vel. final se pueden utilizar todas las ecuaciones, a excepción de la III, puesto que no tiene la incógnita. La más sencilla de usar es la II.

$$v = v_o + at$$
$$t = (v - v_o)/a$$
$$t = (30 \text{ m/seg} - 0)/10 \text{ m/seg}^2$$
$$= 30 \text{ m/seg}/10 \text{ m/seg}^2$$
$$= 3 \text{ seg.}$$

Ejemplo nº 2.

Un objeto se suelta en caída libre y tarda 6 seg. en tocar el suelo. Calcular:

a) Desde que altura se soltó y

b) con qué velocidad llegó al suelo.

Primeramente tenemos que identificar los datos del problema:

En caída libre, la Vel. inicial es cero y la aceleración es la de la gravedad.

Datos: En caída libre, la Vel. inicial es cero y la aceleración es la de la gravedad, por lo tanto: $v_o = 0$, $t = 6$ seg, $a = 10$ m/seg^2 y las incógnitas son: $d = ?$ y $v = ?$

a) Para calcular la altura solo podemos emplear la ecuación. IV. En la I no aparece la incógnita y en la II y III tendríamos dos incógnitas.

$$d = v_0t + 1/2\,at^2$$
$$d = 0 + 1/2(10\ m/seg^2)(6\ seg)^2$$
$$= 0 + 180\ m$$
$$= 180\ m$$

b) Para la Vel. final utilizamos la ecuación I:

$$v = v_0 + at$$
$$v = 0 + (10\ m/seg^2)(6\ seg)$$
$$= 60\ m/seg$$

6-3 TIRO VERTICAL.

Cuando un cuerpo se proyecta en línea recta hacia arriba, su velocidad disminuye con rapidez hasta llegar a un punto en el cual esté, momentáneamente, en reposo; luego caerá de vuelta hacia la tierra, adquiriendo de nuevo, al llegar al suelo, la misma velocidad que tenía al ser lanzado. La experimentación ha demostrado que el tiempo empleado en elevarse al punto más alto de su trayectoria, es igual al tiempo transcurrido en su caída libre hacia el suelo. Esto implica que los movimientos hacia arriba son precisamente iguales a los movimientos hacia abajo, pero invertidos, y que el tiempo y la rapidez para cualquier punto a lo largo de la trayectoria están dados por las ecuaciones generales del movimiento acelerado.

Para tratar el movimiento matemáticamente, es conveniente usar las ecuaciones generales del movimiento acelerado tomando el punto de lanzamiento como el **origen**, y adoptando el siguiente convenio para los signos en el movimiento vertical:

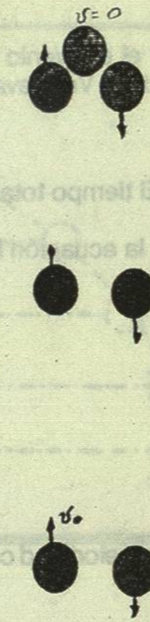
- *Las distancias por encima del origen son* **positivas.**
- *Las distancias abajo del origen son* **negativas.**
- *Las velocidades hacia arriba son* **positivas.**
- *Las velocidades hacia abajo son* **negativas**
- *La aceleración hacia abajo (gravedad) es* **negativa.**

Ya sea que el cuerpo se mueva hacia arriba o hacia abajo, la aceleración g es siempre hacia abajo. Usando el convenio anterior sobre los signos, el valor de la gravedad es:

$$g = -9.8\ m/seg^2 \quad C\,G\,S$$
$$g = -32\ pies/seg^2 \quad M.K.S$$

Para nuestros ejemplos usaremos $g = -10\ m/seg^2$.

Ejemplo # 1.



Se arroja una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 35 m/seg. Calcular:

a) la altura máxima alcanzada,

b) la velocidad con que llega al punto de partida,

c) el tiempo total de vuelo hasta regresar al punto de partida,

d) La velocidad con la que llegaría si tuviese libertad de seguir más abajo del nivel de lanzamiento, recorriendo 22.5 m.

Solución:

a) Altura máxima alcanzada. Utilizando los datos del período de subida, podemos calcular la altura máxima.

Datos: $v_0 = 35\ m/seg$, $a = -10\ m/seg^2$ y $v = 0$.

(El ascenso se da hasta que el cuerpo se detenga; en esta parte la Vel. final es 0).

Para este caso usamos la Ec. III.

$$v^2 = vo^2 + 2ad$$

despejando:

$$d = (v^2 - vo^2)/2a$$

$$d = (0) - (35\ m/seg)^2/2(-10\ m/seg^2)$$

$$d = 61.25\ m$$

b) La velocidad con que llega al punto de partida.

Datos: vo = 35 m/seg, a = -10 m/seg^2,

$$d = 0\ m.$$

Por la ecuación III tenemos:

$$v^2 = (35\ m/seg)^2 + 2(-10\ m/seg^2)(0)$$

$$v^2 = (35\ m/seg)^2 + 0$$

$$v = (\pm)\ 35\ m/seg$$

Por el convenio de los signos en el tiro vertical, tenemos que en la caída la Vel. lleva una dirección hacia abajo, luego el resultado es:

$$v = -35\ m/seg$$

c) El tiempo total de vuelo hasta llegar al punto de partida:

Por la ecuación I, tenemos:

$$v = vo + at$$

$$t = (v - vo)/a$$

$$t = (-35\ m/seg - 35\ m/seg)/(-10\ m/seg^2)$$

$$t = -70\ m/seg / -10\ m/seg^2$$

$$t = 7\ seg$$

d) La velocidad con la que llegaría a 22.5 m. abajo del punto de partida.

Por la ecuación III, tenemos:

$$v^2 = vo^2 + 2ad$$

$$v^2 = (35\ m/seg)^2 + 2(-10\ m/seg^2)(-22.5\ m)$$

$$v^2 = 1225\ m^2/seg^2 + 450\ m^2/seg^2$$

$$v^2 = 1675\ m^2/seg^2$$

$$v = (\pm)\ 40.93\ m/seg$$

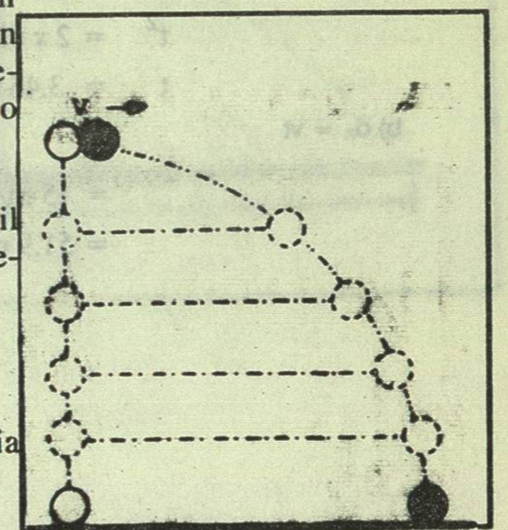
$$v = -40.93\ m/seg$$

Lo anterior por el convenio de los signos.

6-4 TIRO HORIZONTAL.

Si un cuerpo cae libremente desde el reposo, al mismo tiempo que otro es lanzado desde la misma altura, los dos chocan a la vez en el suelo. Ver dibujo de la fig. 7.

La primera conclusión que se puede inferir del dibujo es que la aceleración hacia abajo de un proyectil es la misma que la caída libre de un cuerpo, y se produce independientemente de su movimiento horizontal.



En otras palabras, un proyectil ejecuta dos movimientos independientes:

1º. Una Vel. horizontal V

2º. La aceleración vertical hacia abajo.

La primera parte es similar a lo que se vió en el tema de la velocidad constante; por lo tanto, el alcance del proyectil en tiro horizontal será:

$$d_x = vt$$

La segunda parte es similar a la caída libre; por lo tanto, la altura recorrida será:

$$d_y = 1/2\ at^2$$

Ejemplo # 1.

Desde un punto situado a 60 m de altura se lanza horizontalmente una piedra con una velocidad de 15 m/seg. Calcular:

a) el tiempo que tarda la piedra en tocar el suelo.

b) la distancia con respecto a la base:

a) $d_y = 1/2\ at^2$

$$t^2 = 2d/a$$

$$t^2 = 2 \times 60\ m/10\ m/seg^2$$

$$t = 3.46\ seg.$$

b) $d_x = vt$

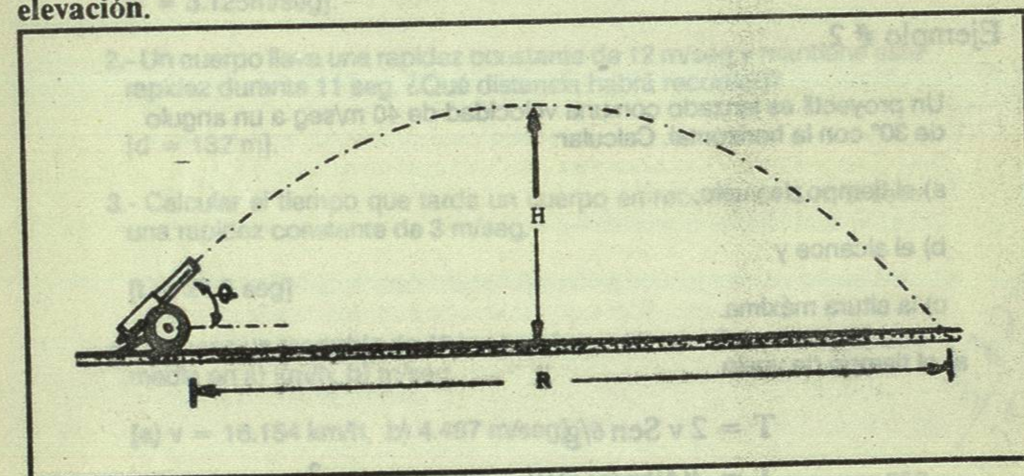
$$= 15\ m/segy3.46\ seg$$

$$= 51.9\ m$$

6-5 TIRO PARABÓLICO.

Muchos objetos, cuando son lanzados al aire, siguen una trayectoria parabólica. Tal es el caso de los objetos arrojados a bajas velocidades, donde la fuerza retardadora de la fricción del aire es despreciable. En los proyectiles lanzados a gran velocidad, el aire frena continuamente el movimiento, impulsandolos hacia abajo y apartando su trayectoria de la parábola. Cuanto más alta sea la velocidad, más grande será la fuerza de fricción del aire y mayor la desviación respecto de una trayectoria parabólica.

En general, es conveniente despreciar la fricción del aire y calcular la trayectoria teórica de un proyectil, y luego, si es necesario, hacer las correcciones para el rozamiento del aire. Como regla general, los factores conocidos concernientes a un proyectil dado son: "v" (velocidad inicial de lanzamiento) y θ (ángulo de salida). Este ángulo siempre se mide desde la horizontal; en el caso de balas y granadas es la **elevación, ángulo de elevación.**



Los factores para calcular son:

1.- El tiempo total de vuelo.

2.- La altura máxima alcanzada.

3.- El alcance logrado.

El tiempo total de vuelo de un proyectil se define como el tiempo necesario para su regreso al mismo nivel de donde fue disparado. La altura máxima, llamada flecha, se define como la mayor distancia vertical alcanzada, medida desde el plano horizontal de tiro, mientras el alcance es la diferencia horizontal desde el punto de proyección, hasta el punto donde el proyectil vuelve otra vez al mismo plano horizontal.

Para calcular cada uno de estos factores, basados en los conceptos de velocidad constante, movimiento acelerado y bajo procedimientos matemáticos, se dedujeron las siguientes fórmulas:

$$T = 2\,v\,\mathrm{Sen}\,\theta/g$$
$$H = (v\,\mathrm{Sen}\,\theta)^2/2g$$
$$R = v^2(\mathrm{Sen}\,2\theta)/g$$

Ejemplo # 2.

Un proyectil es lanzado con una velocidad de 40 m/seg a un angulo de 30° con la horizontal. Calcular:

a) el tiempo de vuelo,

b) el alcance y

c) la altura máxima.

a) el tiempo de vuelo.

$$T = 2\,v\,\mathrm{Sen}\,\theta/g$$
$$T = 2(40\mathrm{m/seg})(\mathrm{Sen}30°)/10\mathrm{m/seg}^2$$
$$T = 2(40\ \mathrm{m/seg})(0.5)/\ 10\ \mathrm{m/seg}^2$$
$$T = 4.000\ \mathrm{Seg}$$

b) El alcance.

$$R = v^2\mathrm{Sen}\ 2\theta/g$$
$$R = (40\mathrm{m/seg})^2(\mathrm{sen}60°)/10\mathrm{m/seg}^2$$

$$R = (40\mathrm{m/seg}^2)(0.866)/10\ \mathrm{m/seg}^2$$
$$R = 138.56\ \mathrm{m}$$

c) Altura máxima.

$$H = (v\mathrm{Sen}\,\theta)^2/2g$$
$$H = (40\mathrm{m/segySen}30°)^2/20\ \mathrm{m/seg}^2$$
$$H = (40\mathrm{m/seg}\ \ 0.5)^2/\ 20\ \mathrm{m/seg}^2$$
$$H = 20\ \mathrm{m}$$

AUTOEVALUACIÓN.

1.- Un cuerpo en movimiento recorre 25 m en 8 seg. ¿Cuál será su rapidez si su movimiento es uniforme?

[v = 3.125m/seg].

2.- Un cuerpo lleva una rapidez constante de 12 m/seg y mantiene esta rapidez durante 11 seg. ¿Qué distancia habrá recorrido?

[d = 132 m].

3.- Calcular el tiempo que tarda un cuerpo en recorrer 64.5 m si lleva una rapidez constante de 3 m/seg.

[t = 21.5 seg]

4.- Se hace un recorrido de 42 km en 2 horas 36 min. Calcular la rapidez media en a) km/h, b) m/seg.

[a) v = 16.154 km/h, b) 4.487 m/seg]

5.- Un automóvil viaja a 90 km/h. a) ¿Cuánto tardará en recorrer 636 km? b) ¿Cuánto tardará en recorrer 945 km.? c) En 23:45', ¿cuánto habrá recorrido?.

[a) t = 7.07h, b) t = 10.5 h y c) d = 2122.5 km]

6.- Un avión de reacción de pasajeros cruza un país con una distancia de 4,500 km durante 4 hs 28 min, Calcular la rapidez media en: a) km/h y b) m/seg.