APENDICE C

EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Sabemos que un triángulo rectángulo es aquel que tiene uno y sólo uno, ángulo recto. Los lados que forman ese ángulo recto se les llama **catetos** y el lado opuesto a dicho ángulo recto se le denomina **hipotenusa**.

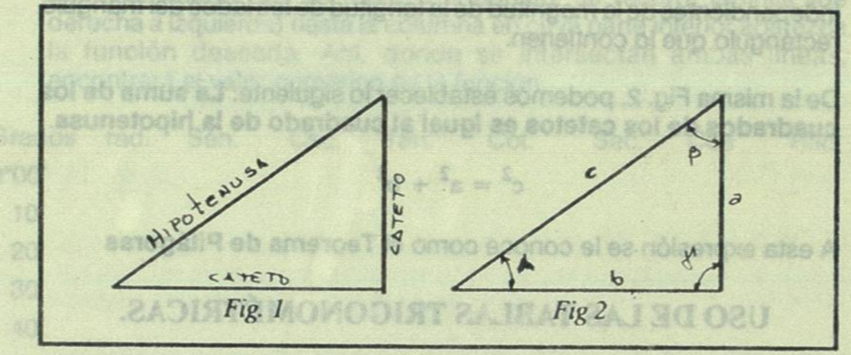


Fig 1 *Fig 2*

Ahora vemos cómo se relacionan los lados y ángulo de un triángulo rectángulo.

Analizando la Fig. 2, podemos relacionar los lados del triángulo de las siguientes formas:

c/a, b/c, a/b, b/a, a/c, c/a

Cada una de estas razones recibe un nombre especial, dependiendo del ángulo al que se está haciendo referencia (α o β en la Fig. 2).

Seno de cualquier ángulo agudo es la razón entre el lado opuesto (L.O) y la hipotenusa. En la Fig. 2 Sen α = a/c, Sen β = b/c.

Coseno de cualquier ángulo agudo es la razón entre el lado adyacente (L.A) y la hipotenusa. En la Fig. 2 Cos α = b/c, Cos β = a/c.

Tangente De cualquier ángulo agudo es la razón entre el lado opuesto y el lado adyacente. En la fig. 2 Tan α = a/b, Tan β = b/a.

Cotangente De cualquier ángulo agudo es la razón entre el lado adyacente y el lado opuesto. En la fig. 2, Cot α = b/a, Cot β = a/b.

Secante De cualquier ángulo agudo es la razón entre la hipotenusa y el lado adyacente. Sec α = c/b, Sec β = c/a.

Cosecante De cualquier ángulo agudo es la razón entre la hipotenusa y el lado opuesto. Csc α = c/a, Csc β = c/b.

Las razones definidas anteriormente se les denomina **Funciones trigonométricas**.

Es importante saber que los valores de las funciones trigonométricas dependen solamente de la magnitud del ángulo, y son completamente independientes de la magnitud de la longitud de los lados del triángulo rectángulo que lo contienen.

De la misma Fig. 2, podemos establecer lo siguiente: **La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa**.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

A esta expresión se le conoce como el **Teorema de Pitágoras**

USO DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

Considerando lo establecido anteriormente, de que el valor de la función trigonométrica depende exclusivamente del ángulo, se pudieron establecer los valores de estas funciones trigonométricas en una tabla (tablas **trigonométricas**).

Estas tablas trigonométricas nos pueden servir para:

1o. Encontrar el valor numérico de cualquier función, dado el ángulo.

2o. Encontrar el ángulo, dado el valor numérico de la función trigonométrica.

Existen algunas tablas que contienen los valores de las funciones de los ángulos comprendidos entre 0° y 90° con intervalos de 10' (minutos).

La forma de usar dichas tablas trigonométricas es la sig:

a) Si el ángulo es menor de 45°, se localiza el ángulo en la columna izquierda de la tabla. Luego se localiza el ángulo deseado, se recorre la línea hasta la columna en cuya parte superior aparece la función deseada. Ahí encontrará el valor de la función.

Ejemplo # 1.

Encontrar el valor de Sen 41° y Cos 41°.

Solución:

Busquemos primero el ángulo de 41° del lado izquierdo de las tablas hasta localizarlo.

De donde Sen de 41° l0' = 0.6583 y Cos de 41°10' = 0.7528.

b)Si el ángulo es mayor de 45°, se localiza el ángulo en la columna derecha. Luego que se localiza el ángulo, se recorre la línea (de derecha a izquierda) hasta la columna en cuya parte inferior aparezca la función deseada. Ahí, donde se intersectan ambas líneas, encontrará el valor numérico de la función.

Grados	rad.	Sen.	Csc.	Tan.	Cot.	Sec.	Cos	Rad.	Grd
0°00'									
10'									
20'									
30'									
40'									
50'									
1°00'									
41°00'	.7156	.6561	1.524	.8693	1.150	1.325	.7547	.8552	49°00
10'	.7185	[.6583]	1.519	.8744	1.144	1.328	.7528	.8523	50'
20'									40'
30'									30'
40'									20'
50'									10'
42°00'									48°00

Ejemplo # 2.

Encontrar el valor de Tan. 73°30'.

Solución: Busquemos en la columna derecha (grados) el ángulo dado (73°30'). Luego, buscamos la función tangente en la parte inferior y donde se crucen estas dos líneas, ahí encontramos el valor de tan 72°30' que es 3.172.

Es importante observar que los ángulos, cuando son mayores de 45°, estan ordenados crecientemente de abajo hacia arriba, por lo que se debe de tener cuidado al localizar los minutos, que se deben leer en la parte superior de la columna de los grados dados y no hacia abajo. Observe que en el ejemplo 2 se hizo esto, es decir, una vez que se localizaron los grados (72) se buscó luego la cantidad de minutos arriba de 72° que en este caso fueron 30'.

Frecuentemente ocurre que en lugar de tener que determinar la tangente de un ángulo dado, sea necesario obtener el ángulo al cual corresponde una función dada.

Cuando el valor decimal dado aparece exactamente en una de las columnas de la función dada, solo necesitamos leer la intersección de las columnas adecuadas, el ángulo que corresponde.

Ejemplo # 3.

Si Tan A = 3.412, determinar A.

Solución:

Puesto que Tan A = 3.412, buscamos en las tablas, en la columna que tiene "tan", en la parte inferior. Entonces leemos a la derecha que A = 73°40'.

Para un mejor manejo de las tablas hay que ver cómo varían los valores de las funciones trigonométricas con respecto al ángulo. Así podemos observar que, mientras el ángulo crece, el valor númerico de: a) el **seno** crece, b) el **coseno** decrece, c) la **tangente** crece, d) la **cotangente** decrece, e) la **secante** crece y f) la **cosecante** decrece.

Como ya se vió antes, la trigonometría es una herramienta muy útil y se usa para calcular cantidades no mesurables directamente. En esta sección veremos algunas de las tantas aplicaciones que tienen las funciones. Te recomendamos veas y analices los ejemplos que a continuación se exponen para que luego resuelvas tu autoevaluación.

APLICACIÓN DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

1.- Conociendo el valor de los dos catetos.

Si conocemos los dos catetos y por supuesto, el ángulo rectángulo, tenemos.

Podemos calcular el valor de la hipotenusa por medio del teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Los valores de A y B también se pueden calcular.

Tan A = LO/LA y Tan B = LO/LA

Tan A = a/b Tan B = b/a

Luego, buscando en las tablas, concluimos:

$$A = \text{Tan}^{-1} a/b \text{ y } B = \text{Tan}^{-1} b/a$$

Ejemplo # 4.

De un triángulo rectángulo tenemos que sus lados miden 30 m. y 40 m. Calcular el valor de la hipotenusa y de los ángulos que forman la hipotenusa con cada uno de los catetos.

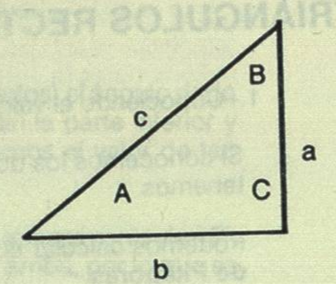
$c^2 = a^2 + b^2$
$= (30\text{ m})^2 + (40\text{ m})^2$
$= 900\text{ m}^2 + 1600\text{ m}^2$
$= 2500\text{ m}^2$
$c = 50\text{ m}$
$A = \text{Tan}^{-1}(30\text{m})/(40\text{m})$
$A = \text{Tan}^{-1}(0.75)$

$A = 36°50'$
$B = 90° - 36°50'$
$B = 53°10'$
$B = \text{Tan}^{-1}(40\text{ m})/(30\text{ m})$
$B = \text{Tan}^{-1}(1.333)$
$B = 53°$

Conociendo la hipotenusa y uno de los ángulos. Podemos calcular el cateto opuesto al ángulo por la función seno.

$$\text{Sen } A = LO/H$$
$$\text{Sen } A = b/c$$

despejando **$b = c \times \text{Sen } A$**



También el cateto adyacente al ángulo dado, por la función coseno.

$$\text{Cos } A = LA/H$$
$$\text{Cos } A = a/c$$

despejando **$a = c \times \text{Cos } A$**

a y el ángulo faltante: $B = 90° - A$

Ejemplo # 5.

Una escalera de 4 m. de largo se apoya contra un muro formando un ángulo de 80° con el suelo. ¿A qué altura del muro está apoyada la escalera? ¿A qué distancia de la pared descansa el pie de la escalera?

SOLUCIÓN: Considerando que este cuerpo forma un triángulo rectángulo con la pared, tenemos los siguientes datos: $c = 4$ m, $A = 80°$, $b = ?$, $a = ?$.

$b = c \times \text{Sen } A$
$b = 4 \text{ m} \times \text{Sen } 80°$
$b = 4 \text{ m} \times 0.9848$ (tablas)
$b = 39.392$ m
$a = c \times \text{Cos } A$

$a = 4 \text{ m} \times \text{Cos } 80°$
$a = 4 \text{ m} \times 0.1736$ (tablas)
$a = 0.6944$ m
$B = 90° - 80°$
$B = 10°$

Problemas para resolver,

A.- Encuentre los valores de las funciones siguientes:

1.- Sen 30°	11.- Cos 10°10'
2.- Cos 60°	12.- Tan 21°
3.- Tan 30°30'	13.- Sen 25°10'
4.- Sen 45°	14.- Cos 74°
5.- Cos 30°	15.- Tan 84°20'
6.- Tan 45°	16.- Sen 57°
7.- Sen 33°20'	17.- Cos 80°20'

8.- Cos 42°20'	18.- Tan 67°40'
9.- Tan 35°50'	19.- Sen 59°50'
10.- Sen 24°30'	20.- Cos 73°

B.- Encontrar el valor del ángulo en los siguientes problemas.

1.- Sen A = 0.1478	11.- Cos B = 0.8572
2.- Tan B = 0.4522	12.- Sen B = 0.2616
3.- Cos A = 0.7880	13.- Tan B = 0.2493
4.- Sen A = 0.8339	14.- Cos A = 0.3934
5.- Cos B = 0.49	15.- Sen A = 0.4094
6.- Tan B = 1.7547	16.- Tan B = 4.773
7.- Sen A = 0.4566	17.- Sen A = 0.500
8.- Cos A = 0.7934	18.- Cos C = 0.500
9.- Tan A = 1.235	19.- Tan C = 1.000
10.- Sen A = 0.445	20.- Cos C = 0.866

C.- Aplicar las funciones trigonométricas para resolver los siguientes problemas.

1.- Se quiere saber cuánto mide la altura de una casa, donde una escalera de 4 m llega a la parte superior y el ángulo que forma con el suelo es de 60°.

2.- Calcular el valor de los lados de un triángulo si una de sus diagonales mide 24 cm y forma con uno de los lados un ángulo de 42°.

3.- Un aeroplano recorre en el aire 15,000 m. siguiendo un ángulo de ascenso constante hasta alcanzar una altura de 1900 mCalcular el ángulo de elevación.

4.- Un faro, construido al nivel del mar, tiene 180 m. de altura. Vista desde su cima, una barca tiene un ángulo de depresión de 24x . Calcular la distancia que existe entre la barca y el pie del faro.

B I B L I O G R A F Í A.

1.- Alvarenga Beatriz de, Máximo Antonio.
FÍSICA GENERAL
Ed. Harla, S.A. México, 1976.

2.- Beltrán Virgilio, Braun, Eliezer
PRINCIPIOS DE FÍSICA
Ed. Trillas, S.A.
México, 1970.

3.- Bueche, F.
FUNDAMENTOS DE FÍSICA.
Libros Mc. Graw-Hill de México, S.A.
México, 1970.

4.- CIENCIAS FÍSICAS. Introducción Experimental
Ed. Norma.
México, 1970.

5.- Gran Sopena.
DICCIONARIO ENCICLOPÉDICO.
Ed. Ramón Sopena, S.A.

6.- Perelman y Akov.
FÍSICA RECREATIVA.
Ed. M.I.R.
Moscú, 1971.

7.- Physical Science Study Comittee.
FÍSICA.
Ed. Reverté, S.A.
México, 1962.

8.- Reynoso, Moreno Vera, Juaristi.
NUEVAS CIENCIAS NATURALES.
Ed. Progreso, S.A.
México, 1973.

9.- Rutherford James, Holton Gerald, Watson Fletcher.
THE PROYECT PHISICS COURSE.
Holt, Rinehert y Winston Inc.

10.- Schaum, Daniel.
FÍSICA GENERAL.
Libros Mc Graw-Hill de México, S.A.
México, 1970.

11.- Stolberg Robert y Fait Fitch Hill.
FÍSICA. Fundamentos y Fronteras.
Publicaciones Culturales, S.A.
México. 1975.

12.- White, Harvey E.
FÍSICA MODERNA.
Montaner y Simon, S.A.
Barcelona, 1965.

$(2x + 8y) + (3x - 10y)$

$2x + 8y + 3x - 10y$

$5x - 2y$

$(3x + 10y) - (2x + 9y)$

$3x + 10y - 2x - 9y$

$x + y$

$(3x + 8y) + [(4x - 9y)$

$3x + 8y + [4x - 9y] + (2x - 4$

$3x + 8y + 4x - 9y - 2x - 1y$

$5x - 5y$

$5x + \{2y - [(5x - 2y) - (x + y)] + 2x\}$

$5x + \{2y - [5x - 2y - x - y] + 2x\}$

$5x + \{2y - 5x + 2y + x + y + 2x\}$

$5x + 2y - 5x + 2y + x + y + 2x$

$+ 8y - [(4x - 9y) + (2x + 4y)]$

$+ 8y - [4x + 9y + 2x + 4y]$

$+ 8y - 4x - 9y - 2x - 4y$

$+ 8y$