TERCERA UNIDAD

LEYES DE CONSERVACION

OBJETIVO DE UNIDAD

El alumno, al terminar la unidad en el tema:

I. LEYES DE CONSERVACION.

1. Aplicará las leyes de la Conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, en la solución de problemas.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

El alumno, por escrito en su cuaderno, sin error, en el tema:

I. LEYES DE CONSERVACION.

1.1. Definirá cantidad de movimiento e impulso.

1.2. Deducirá las unidades de cantidad de movimiento e impulso.

1.3. Enunciará la ley de la conservación de la energía.

1.4. Expresará ejemplos que muestren la validez de la ley de la conservación de la energía.

1.5. Enunciará la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

1.6. Utilizará las leyes de la conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento, en la resolución de problemas en una sola dimensión.

I. LEYES DE CONSERVACION.

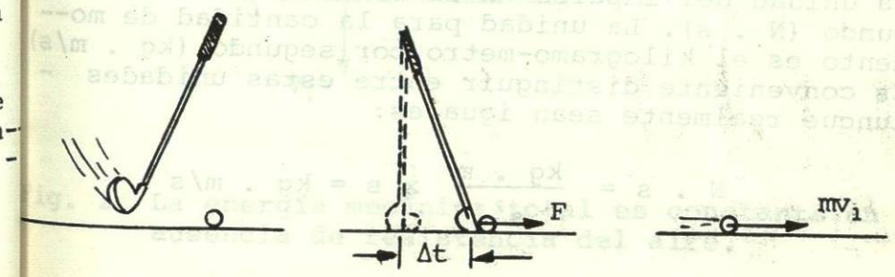
A. IMPULSO Y MOMENTO.

Cuando se golpea una pelota de golf, como se muestra en la figura 1, una fuerza promedio F muy grande actúa sobre la pelota durante un intervalo Δt muy corto, provocando en la pelota una aceleración que cambia su estado de reposo a una velocidad final v_1. Sería muy difícil lograr medir tanto la fuerza como la duración de su acción, pero su producto $F\Delta t$ puede calcularse a partir del cambio de velocidad de la pelota que resultó. Por la segunda ley de Newton tenemos que

$$F = ma = m\,\frac{v_f - v_0}{\Delta t}$$

Fig. 1.

Cuando un palo de golf golpea la pelota, una fuerza F que actúa durante un intervalo de tiempo Δt provoca un cambio en su momento.



Al multiplicar por Δt queda

$$F\,\Delta t = m\,(v_f - v_0)$$

o sea

$$\boxed{F\,\Delta t = mv_f - mv_0} \qquad (3\text{-}1)$$

Esta ecuación resulta de tanta utilidad para resolver problemas de colisiones, que se le han dado nombres especiales a cada término.

El impulso $F\,\Delta t$ es una cantidad vectorial igual en magnitud al producto de la fuerza por el intervalo de tiempo en que actúa. Su dirección es la misma que la de la fuerza.

El momento p de una partícula es una cantidad vectorial igual en magnitud al producto de su masa por su velocidad v.

$$\boxed{p = mv}$$

Por tanto, la ecuación (3-1) puede ser enunciada verbalmente:

Impulso $(F\,\Delta T)$ = cambio del momento $(mv_f - mv_0)$

La unidad del impulso en el SI es el newton-segundo (N . s). La unidad para la cantidad de momento es el kilogramo-metro por segundo (kg . m/s). Es conveniente distinguir entre estas unidades aunque realmente sean iguales:

$$N\,.\,s = \frac{kg\,.\,m}{s^2} \times s = kg\,.\,m/s$$

Las correspondientes unidades del sbg son la libra-segundo (lb-s) y el slug-pie por segundo (slug .ft/s).

B. CONSERVACION DE LA ENERGIA.

Muy a menudo, a velocidades bajas, tiene lugar un intercambio entre las energías cinética y potencial. Por ejemplo, supóngase que una masa m es izada a una altura h y se deja caer, como se indica en la figura 2. Una fuerza externa ha in-

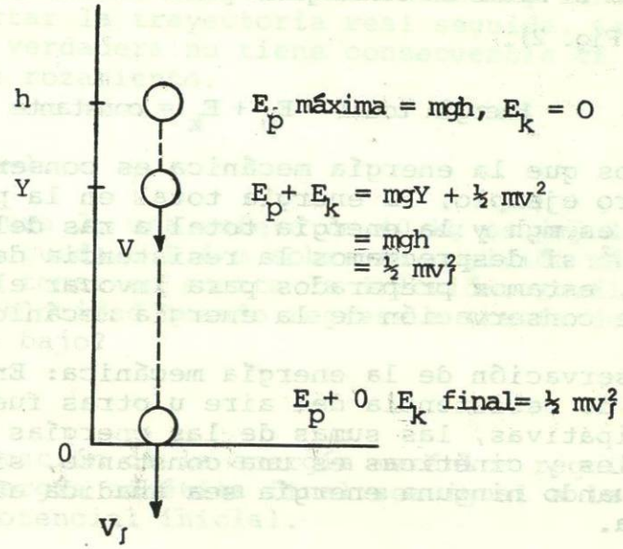


Fig. 2. La energía mecánica total es constante en ausencia de resistencia del aire.

crementado la energía del sistema dándole una energía potencial $E_p = mgh$ en su punto más elevado. Esta es la energía para el sistema, y no puede modificarse salvo que se tope con una fuerza resistiva. A medida que la masa cae, su energía potencial disminuye debido a que su altura sobre el nivel del suelo se ha reducido. La energía potencial perdida se recupera en forma de movimiento de energía cinética. En ausencia de resistencia del aire, la energía total $(E_p + E_k)$ permanece igual. La energía potencial continúa siendo convertida en energía cinética hasta que la masa llegue al suelo (h = 0). En esta posición final, la energía cinética es igual a la energía total, y la energía potencial es cero. El punto importante que puede lograrse es que la suma de E_p y E_k sea el mismo en cualesquier punto durante la caída (véase Fig. 2).

$$\text{Energía total} = E_p + E_k = \text{constante}$$

Decimos que la energía mecánica es conservada. En nuestro ejemplo, la energía total en la parte más eleva es mgh y la energía total a ras del suelo es $\frac{1}{2}m\upsilon^2$ si despreciamos la resistencia del aire. Ahora, estamos preparados para invocar el principio de conservación de la energía mecánica.

> Conservación de la energía mecánica: En ausencia de resistencia del aire u otras fuerzas disipativas, las sumas de las energías potenciales y cinéticas es una constante, siempre y cuando ninguna energía sea añadida al sistema.

Bajo estas condiciones, la energía cinética final de una masa m que se deja caer desde una altura h es

$$\tfrac{1}{2}m\upsilon_f^2 = mgh \qquad (3\text{-}2)$$

Resolviendo esta relación para υ_f se obtiene una ecuación útil para determinar la velocidad final a partir de la energía:

$$\upsilon_f = \sqrt{2gh} \qquad (3\text{-}3)$$

La gran ventaja de calcular la velocidad a partir de consideraciones energéticas consiste en que las energías cinética y potencial dependen exclusivamente de los estados inicial y final, sin importar la trayectoria real seguida. La trayectoria verdadera no tiene consecuencia en ausencia de rozamiento.

EJEMPLO 3-1.

En la figura 3, una esfera de 40 kg es impulsada hasta que queda a 1.6 m sobre su posición más baja. Sin tomar en cuenta la fricción. ¿cuál será su velocidad cuando regrese a través del punto más bajo?

Solución:

La conservación de la energía mecánica requiere que la energía cinética final sea igual a la energía potencial inicial.

$$\tfrac{1}{2}m\upsilon_f^2 = mgh$$

Fig. 3.

$$\tfrac{1}{2} mv_f^2 = mgh$$

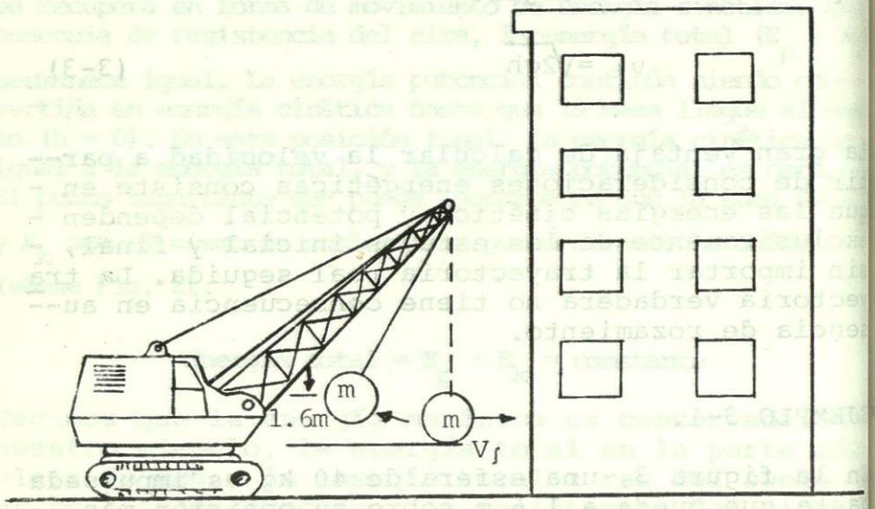


Fig. 3 La velocidad de una masa suspendida al pasar por su punto más bajo se puede encontrar a partir de consideraciones energéticas.

Así, la ecuación (3-3) se aplica y solamente se resuelve para v_f.

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8\ m/s^2)(1.6\ m)}$$

$$= 5.60\ m/s$$

Como un ejercicio adicional, demuestrese que la energía total del sistema es de 627 J.

Consideremos ahora el caso más general en el que alguna energía mecánica se pierde en razón de alguna fuerza disipadora como el rozamiento. El cambio en la energía mecánica que resulta de tal fuerza será siempre igual al trabajo negativo realizado por la fuerza disipadora. La energía cinética final se verá reducida debido a que parte de la energía total disponible inicialmente se perderá debido al esfuerzo contra el rozamiento. Por el rozamiento debemos escribir este hecho como sigue:

$$\left|\begin{matrix}\text{Energía cinética}\\ \text{final}\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\text{Energía potencial}\\ \text{inicial}\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}\text{Esfuerzo contra}\\ \text{el rozamiento}\end{matrix}\right|$$

$$\tfrac{1}{2} mv_f^2 = mgh - Fs \qquad (3\text{-}4)$$

Quizás una mejor forma de escribir esta declaración sería expresarla en términos de la energía total disponible inicialmente.

$$mgh = \tfrac{1}{2} mv_f^2 + Fs \qquad (3\text{-}5)$$

Esta ecuación es un enunciado matemático del principio de conservación de la energía, el cual puede ahora ser reexpresado como sigue:

Conservación de la energía: La energía total de un sistema es siempre constante, aunque pueden ocurrir transformaciones de energía de una forma a otra dentro del sistema.

EJEMPLO 3-2.

Un bloque de 64 lb cae sobre un plano inclinado de 300 ft de longitud y 30° de incilinación, como se ilustra en la figura 4. Si μ_k = 0.1, encuéntrese la velocidad del bloque al pie del plano inclinado a partir de consideraciones energéticas.

Solución.

Comencemos por calcular la energía potencia en la parte superior del plano inclinado.

$$E_p = Wh = (64\ lb)\ (300\ ft)\ (sen\ 30°)$$
$$= 9600\ ft.lb$$

Esta es la energía total disponible inicialmente. Para determinar cuánta energía se perderá al realizar trabajo contra el rozamiento, debemos primero calcular la fuerza normal ejercida por el plano contra el bloque. De la figura 4

$$\mathcal{N} = W_y = (64\ lb)\ (cos\ 30°) = 55.4\ lb$$

y por tanto, la fuerza de rozamiento debe ser

$$\mathcal{F}_k = \mu_k \mathcal{N} = (0.1)(55.4\ lb) = 5.54\ lb$$

El trabajo así realizado por la fuerza de rozamiento es

$$\mathcal{F}_k S = (5.54\ lb)(300\ ft) = 1660\ ft.lb$$

Ahora, de acuerdo con la ecuación (4), la energía cinética final debe ser igual a la energía potencial inicial menos la pérdida de energía sufrida durante la realización del trabajo contra el rozamiento. Así,

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 = 9600\ ft\ .\ lb - 1660\ ft\ .\ lb$$
$$= 7940\ ft\ .\ lb$$

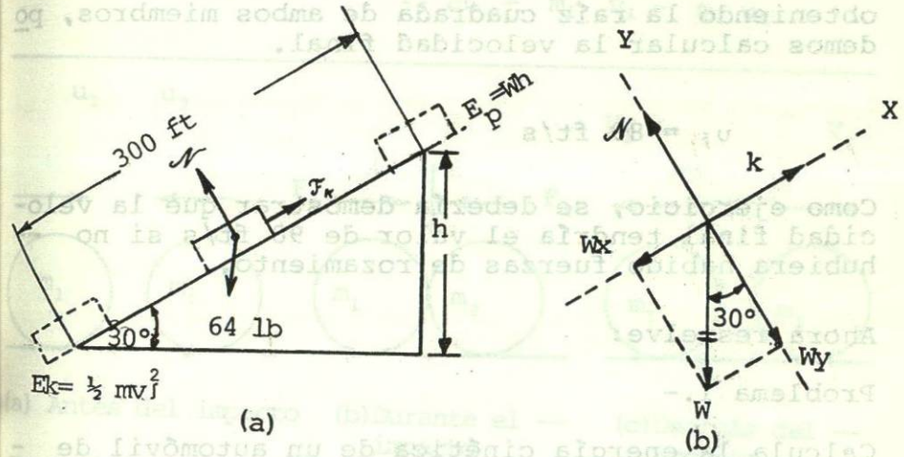


Fig. 4. Una parte de la energía potencial inicial que tenía el cuerpo en la parte alta del plano inclinado se pierde cuando se desliza hacia abajo, al realizar trabajo contra el rozamiento.

Dado que la masa del bloque es

$$m = \frac{W}{g} = \frac{64\ lb}{32\ ft/s^2} = 2\ slugs$$

Al sustituir obtenemos

$$\tfrac{1}{2}(2\ slugs)\,v_f^2 = 7940\ \ ft\ .\ lb$$

de lo cual

$$v_f^2 = 7940 \text{ ft.lb/slug} = 7940 \text{ ft}^2/\text{s}^2$$

obteniendo la raíz cuadrada de ambos miembros, podemos calcular la velocidad final.

$$v_f = 89 \text{ ft/s}$$

Como ejercicio, se debería demostrar que la velocidad final tendría el valor de 98 ft/s si no hubiera habido fuerzas de rozamiento.

Ahora resuelve:

Problema 1.-

Calcula la energía cinética de un automóvil de 3200 lb que se mueve hacia el norte a 60 mi/h.

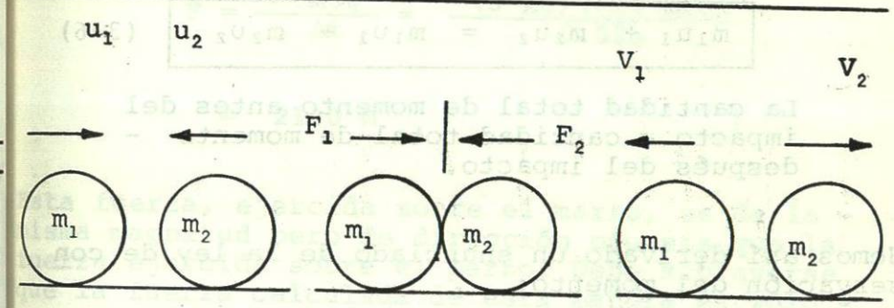
C. La Ley de Conservación del momento.

Consideremos la colisión de frente de las masas m_1 y m_2 que se ilustra en la figura 5. Representamos sus velocidades antes del impacto por los símbolos u_1 y u_2 y después del choque por v_1 y v_2. El impulso de la fuerza F_1 que actúa sobre la masa de la derecha es

$$F_1 \Delta t = m_1 v_1 - m_1 u_1$$

Fig. 5 Colisión de frente entre dos masas.

$$F_1 \Delta t = m_1 v_1 - m_1 u_1$$



(a) Antes del impacto $m_1 u_1 + m_2 u_2$

(b) Durante el impacto $F_1 \Delta t = -F_2 \Delta t$

(c) Después del impacto $m_2 v_1 + m_2 v_2$

De manera similar, el impulso de la fuerza F_2 sobre la masa de la izquierda es

$$F_2 \Delta t = m_2 v_2 - m_2 u_2$$

Durante el lapso Δt, $F_1 = -F_2$, de tal manera que

$$F_1 \Delta t = - F_2 \Delta t$$

o sea

$$m_1 \upsilon_1 - m_1 u_1 = -(m_2 \upsilon_2 - m_2 u_2)$$

y después de ordenar términos, tenemos

$$\boxed{m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2} \quad (3\text{-}6)$$

La cantidad total de momento antes del impacto = cantidad total de momento después del impacto.

Hemos así derivado un enunciado de la ley de conservación del momento:

Cuando dos cuerpos chocan, la cantidad total del momento antes del impacto es igual a la cantidad total del momento después del impacto.

EJEMPLO 3-3.

Un marro de 3 kg tiene una velocidad de 14 m/s en el momento de golpear un perno de acero y es detenido en 0.02 s. Determínese la fuerza media que actúa sobre el perno.

Solución:

Dado que $\upsilon_f = 0$, de la ecuación 3-1 tenemos

$$F\,\Delta t = -m\upsilon_0$$

Si consideramos que el marro se mueve hacia abajo, sustituimos $\upsilon_0 = -14$ m/s, para tener

$$F = \frac{-m\upsilon_0}{\Delta t} = \frac{-(3\text{ kg})(-14\text{ m/s})}{0.02\text{s}}$$

$$= 2100\text{ N}$$

Esta fuerza, ejercida sobre el marro, es de la misma magnitud pero de dirección opuesta que la fuerza ejercida sobre el perno. Debe subrayarse que la fuerza calculada de esta manera es sólo una fuerza media. En algunos instantes la fuerza puede llegar a ser mucho mayor que 2100 N.

EJEMPLO 3-4.

Una pelota de beisbol de 0.6 lb se mueve hacia el bateador a una velocidad de 44 ft/s y al ser golpeada sale en dirección contraria con una velocidad de 88 ft/s. (Véase la Fig. 6). Encuéntrese el impulso y la fuerza media ejercida sobre la pelota si el bat estuvo en contacto con la pelota un lapso de 0.01 s.

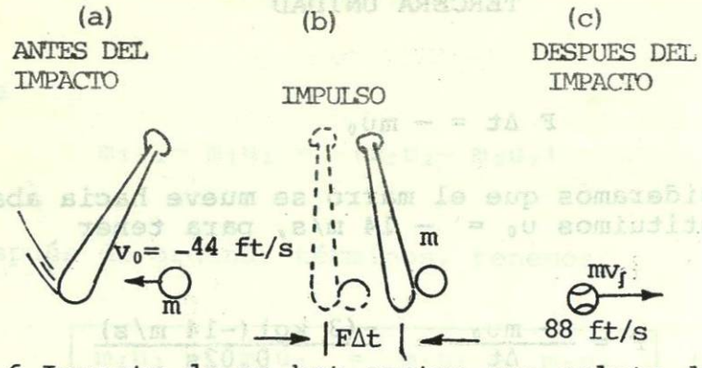


Fig. 6 Impacto de un bat contra una pelota de beisbol.

Solución:

Consideremos la dirección final del movimiento como positiva. Aplicando la ecuación (3-1) podemos encontrar el impulso como sigue:

$$F\,\Delta t = m\upsilon_f - m\upsilon_0 = m(\upsilon_f - \upsilon_0)$$

y dado que

$$m = \frac{W}{g} = \frac{0.6\ \text{lb}}{32\ \text{ft/s}} = 0.0188\ \text{slug}$$

$$F\,\Delta t = 0.0188\ \text{slug}[88\ \text{ft/s} - (-44\ \text{ft/s})]$$

$$= 0.0188\ \text{slug}(132\ \text{ft/s})$$

$$\text{Impulso} = F\,\Delta t = 2.48\ \text{lb . s}$$

Para encontrar la fuerza promedio debemos sustituir $\Delta t = 0.01$ s

$$F(0.01\ \text{s}) = 2.48\ \text{lb . s}$$

$$F = \frac{2.48\ \text{lb . s}}{0.01\ \text{s}} = 248\ \text{lb}$$

Ahora resuelve

Problema 2.-

Un tren que pesa 8×10^6 lb viaja a una velocidad de 60 mi/h. ¿Cuánto impulso ejercerá el tren para detenerse?

Si el tren se detiene totalmente en una distancia de 600 ft. ¿Cuánto dura el frenado?

¿Cuánta fuerza de frenado se necesita?

Problema 3.-

Calcula el momento de un automóvil de 3200 lb que se mueve hacia el norte a 60 mi/h.

EJEMPLO 3-5.

Supóngase que la figura 5 m_1 y m_2 tienen masas de 8 y 6 kg, respectivamente. La velocidad inicial de m_1 es de 4 m/s a la derecha y choca con m_2 que tiene una velocidad de 5 m/s a la izquierda. ¿Cuánta cantidad de momento hay antes y después del impacto?

Solución:

Escogemos la dirección a la derecha como positiva y tenemos la precaución de asignar los signos correctos a cada velocidad.

$$P_0 \text{(antes del impacto)} = m_1u_1 + m_2u_2$$

$$P_0 = (8\ kg)(4\ m/s) + (6\ kg)(-5\ m/s)$$

$$= 32\ kg\ .\ m/s - 30\ kg\ .\ m/s = 2\ kg\ .\ m/s$$

Debe existir la misma cantidad de momento después de la colisión, por lo que escribimos

$$P_f = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = 2\ kg\ .\ m/s$$

Si υ_1 o υ_2 se pueden medir después del choque, la otra puede ser calculada a partir de esta relación.

EJEMPLO 3-6.

Un fusil que pesa 8 lb dispara una bala de 0.02 lb con una velocidad de salida de 2800 ft/s, Calcúlese la velocidad de retroceso del fusil si está suspendido libremente.

Solución:

Dado que tanto el fusil m_1 como la bala m_2 están inicialmente en reposo, al momento total antes del

disparo debe ser igual a cero. La cantidad de momento total no puede cambiar, por lo que debe ser también igual a cero después del disparo. Por lo tanto, la ecuación (3-6) nos dice que

$$0 = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2$$

$$m_1\upsilon_2 = -m_2\upsilon_2$$

$$\upsilon_1 = -\frac{m_2\upsilon_2}{m_1}$$

$$= -\frac{(0.02\ lb/32\ ft/s^2)(2800\ ft/s)}{8\ lb/32\ ft/s^2}$$

$$= -7\ ft/s$$

Ahora resuelve.

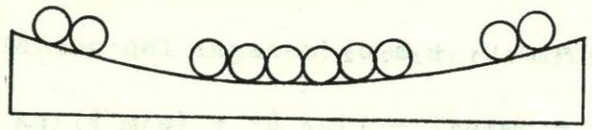
Problema 4.-

Dos niños que pesan 80 y 50 lb están de pie sobre patines de ruedas. Si el niño mayor empuja al menor de tal manera que el menor se aleje a 6 mi/h, ¿cuál será la velocidad del mayor?

Problema 5.-

Una bala de 24 g se dispara con una velocidad de 900m/s por un fusil de 5 kg.
Encuentre la velocidad de retroceso del fusil.

Fig. 6 Conservación del momento



Un experimento muy interesante para demostrar la conservación del momento se puede llevar a cabo con ocho pequeños balines y una pista acanalada como la que se muestra en la figura 6. Si se suelta un balín desde la izquierda, se detendrá al chocar con los otros, pero uno del extremo derecho rodará hacia la derecha con la misma velocidad. De manera similar, si se sueltan dos, tres, cuatro y cinco balines desde la izquierda, un número igual saldrá de la derecha con la misma velocidad, mientras el resto permanecerá en reposo en el centro de la pista.

Con toda razón se podría preguntar por qué no salen dos balines hacia la derecha en la figura 6 en vez de uno solo con el doble de la velocidad, ya que esto también conservaría la cantidad total del momento del sistema. Por ejemplo, si cada balín tiene una masa de 50 g y si hay dos balines que se acercan desde la izquierda a una velocidad de 20 cm/s, la cantidad total del momento antes de la colisión es de 2000 g . cm/s. Esta misma cantidad de momento se podría lograr para después del impacto si sólo un balín saliera a la derecha y su velocidad fuera de 40 cm/s.

La respuesta obedece a que también la energía debe conservarse. Si un solo balín saliera con el doble de la velocidad, su energía cinética sería mucho mayor que la de dos balines de la izquierda. La energía cinética que entraría al sistema sería

$$E_0 = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.1\ \text{kg})(0.2\ \text{m/s})^2$$

$$= 2 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

La energía cinética de un solo balín con velocidad de 40 cm/s es de exactamente el doble de este valor:

$$E_f = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.05\ \text{kg})(0.4\ \text{m/s})^2$$

$$= 4 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

Por lo tanto, podemos concluir que tanto la energía como el momento son importantes al describir los fenómenos del impacto.

D. CHOQUES ELASTICOS E INELASTICOS.

Como resultado del experimento de la sección anterior, el estudiante podría suponer que tanto el momento como la energía cinética deben conservarse en las colisiones. Aunque esta conclusión es aproximadamente cierta para choques entre cuerpos duros como balines o bolas de billar, es falsa para cuerpos suaves que rebotan mucho más lenta--

mente cuando chocan. Durante el choque, todos los cuerpos sufren una pequeña deformación y por lo tanto se liberan pequeñas cantidades de calor. El vigor con que un cuerpo recobra su forma original después de sufrir una deformación viene a ser una medida de su elasticidad o restitución.

Si la energía cinética permanece constante en un choque (caso ideal), se dice que la colisión ha sido perfectamente elástica. En este caso no se pierde energía por calor o deformación durante el choque. Una bola de acero templado que se deja caer sobre una placa de mármol se aproxima mucho a un choque perfectamente elástico. Si los cuerpos que chocan se adhieren entre sí y se mueven como un solo cuerpo después del impacto, se dice que la colisión fue perfectamente inelástica. Una bala que se incrusta en un bloque de madera es un ejemplo de este tipo de impactos. La mayor parte de las colisiones caen entre estos dos extremos.

En una colisión perfectamente elástica entre dos masas m_1 y m_2, podemos decir que tanto la energía como el momento permanecen sin cambio. Por lo tanto, podemos usar dos ecuaciones:

Energía: $\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

Momento: $m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$

que pueden simplificarse para obtener

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2)$$

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(u_2 - v_2)$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda

$$\frac{u_1^2 - v_1^2}{u_1 - v_1} = \frac{u_2^2 - v_2^2}{u_2 - v_2}$$

Factorizamos los numeradores y dividimos para lograr

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2$$

o sea

$$v_1 - v_2 = u_2 - u_1 = -(u_1 - u_2) \qquad (3\text{-}7)$$

Así, en el caso ideal de una colisión perfectamente elástica, la velocidad relativa después de la colisión, $v_1 - v_2$, es igual al negativo de la velocidad relativa antes del choque. Cuanto más iguales sean estas cantidades, tanto más elástica será la colisión. Un medio de medir la elasticidad de un choque, se obtiene por la relación negativa de la velocidad relativa después del choque entre la velocidad relativa antes del mismo.

El coeficiente de restitución e es la relación de la velocidad relativa después del choque entre la velocidad relativa antes del mismo.

$$e = -\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2}$$