OBJETIVO GENERAL DEL CURSO:

El alumno será capaz de:

Aplicar los conceptos generales de: Números Complejos; la solución de Ecuaciones Cuadráticas y Sistemas de Ecuaciones Cuadráticas; así como Sucesiones y Series, Progresiones y el Teorema del Binomio; y también Permutaciones y Combinaciones.

1

Números Complejos

PRIMERA UNIDAD
NUMEROS COMPLEJOS

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

I. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS.

1. Aplicará los conocimientos adquiridos sobre números complejos para efectuar las operaciones fundamentales.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error, en el tema:

I. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS.

1.1 Definirá qué es número real.

1.2 Definirá qué son números imaginarios puros.

1.3 Enunciará el concepto de número complejo, escrito en forma rectangular.

1.4 Representará gráficamente a los números complejos escritos en forma rectangular.

1.5 Efectuará con precisión las cuatro operaciones básicas con los números complejos en forma rectangular.

INTRODUCCION

Los números complejos fueron analizados por vez primera, en un libro de álgebra publicado en 1572, sin embargo, no fué sino hasta alrededor de 1800 cuando se les dio una interpretación geométrica y fueron entendidos como objetos cuya existencia podía ser plenamente justificada.

La idea fue originada, en forma independiente, por el noruego C. Wessel en 1797, por el francés J. R. Argand en 1806, y por el alemán Karl F. Gauss en esa misma época.

Comprenderemos la necesidad de extender nuestro concepto de número real, cuando en expresiones como $x^2 + 4 = 0$ no encontramos ningún número real que pueda tomar x para hacer cierta la igualdad. Sabemos que cualquier número (positivo o negativo) cuando es elevado al cuadrado es siempre positivo y sumándole otro número positivo jamás nos dará cero, ¿verdad?

Estudiaremos entonces, un nuevo sistema numérico, es decir, un nuevo conjunto de números, los complejos y sus propiedades.

I. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS.

A. Números reales.

Recordemos el concepto de Números Reales.

Se le llama Números Reales, al conjunto de números que comprende a los Racionales y a los Irracionales, $R = Q \cup I$.

También se les define como aquellos números que pueden expresarse como decimales.

Son <u>números Racionales</u> (Q) aquellos que pueden ser representados por una fracción, o sea el cociente de dos enteros, exceptuando la división por cero, $Q = \frac{p}{q}$ donde $q \neq 0$.

Ejemplos: Son números Racionales:

a) Todos los números enteros:

$$8 = \frac{8}{1} = \frac{16}{2} = \frac{24}{3}, \text{ etc.} \ldots$$

b) Las fracciones propias y las impropias:

$$\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, \text{ etc.} \ldots$$

c) El cero:

El cero puede ser dividido por cualquier otro número (excepto el cero) y el cociente siempre será cero.

$$0 = \frac{0}{7} = \frac{0}{5} = \frac{0}{n}, \text{ donde } n \in \mathbb{N}$$

La división por cero no tiene sentido, ya que para que el cociente $\frac{5}{0}$ tenga significado, necesitamos encontrar un número x tal que $x \cdot 0 = 5$ Este número no existe.

En el caso de la división $\frac{0}{0}$, podemos decir que $\frac{0}{0} = N$, ya que $0 \cdot N = 0$ para cualquier valor de N, por lo que una vez más afirmamos que la división por cero no conduce a un resultado útil, por lo tanto, no es permisible.

Cualquier número racional tiene una representación decimal, exacta o periódica y viceversa.

Ejemplos:

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$$

$$\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$$

$$\frac{4}{7} = 0.571428\ldots$$

$$0.\overline{36} = \frac{4}{11}$$

Son <u>números Irracionales</u> (I) aquellos cuya representación decimal está formada por infinitas cifras que <u>no se repiten periódicamente</u>.

También se les define como "todo número real que no es racional".

Ejemplos:

$\sqrt{3}$, π , $\sqrt[3]{7}$, etc...

B. Números imaginarios puros.

Cuando estos números fueron introducidos por vez primera hace aproximadamente 400 años, parecieron una cosa tan extraña que se les denominó "imaginarios", aún cuando no son más "irreales" que los números "reales".

La expresión $\sqrt[n]{A} = R$, si y solo si $R^n = A$ nos define el concepto de raíz enésima principal de un número, donde:

$\sqrt{\ }$ = radical

n = índice del radical

A = radicando

R = raíz

Así tenemos que:

$\sqrt[2]{25} = 5$ porque $(5)^2 = 25$

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $(2)^3 = 8$

$\sqrt[5]{32} = 2$ porque $(2)^5 = 32$

$\sqrt[2]{4} = 2$ porque $(2)^2 = +4$, y también

$\sqrt[2]{4} = -2$ porque $(-2)^2 = +4$

De aquí que toda raíz cuadrada de un número tiene dos valores, uno positivo y otro, negativo.

Pero si ahora queremos analizar cuando *n* es par y A es negativo, tendremos:

Por ejemplo:

$\sqrt[2]{-4} = x$ " si " $(x)^2 = -4$

y puesto que no hay valor real de *x* que al ser elevado al cuadrado sea negativo, entonces, procederemos así:

$$\sqrt[2]{-4} = \sqrt[2]{4(-1)} = \sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{-1} = \pm\ 2\sqrt[2]{-1} = \pm\ 2i$$

obteniendo, de esta manera, un número imaginario.

Establecemos que:

$\sqrt[2]{-1}$ no es un número real,

$\sqrt[2]{-1} =$ Es la unidad de los números imaginarios y lo representamos por la letra *i*

"Se llaman números imaginarios puros a los números de la forma *bi*, donde *b* es real y diferente de cero, e $i = \sqrt[2]{-1}$ "

Ejemplos:

$$3i\ ,\ -\frac{1}{2}i\ ,\ i\ ,\ -2i\ ,\ \text{etc.}\ldots$$

En el sistema de los números imaginarios son válidas las propiedades de los números reales, pero debemos expresar siempre en términos de i:

Ejemplos:

a) $\sqrt[2]{-25} = \sqrt[2]{25} \cdot \sqrt[2]{-1} = 5i$

b) $\sqrt[2]{-6} = \sqrt[2]{6} \cdot \sqrt[2]{-1} = i\sqrt{6}$

c) $-\sqrt[2]{-45} = -\sqrt[2]{9} \cdot \sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[2]{-1} = -3i\sqrt{5}$

d) $2\sqrt[2]{-9} + 5\sqrt[2]{-16} = 2\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} + 5\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}$

$= 6i + 20i = 26i$

El producto y el cociente de dos números imaginarios puros, son números reales:

Ejemplos:

a) $\sqrt[2]{-3} \cdot \sqrt[2]{-27} = i\sqrt{3} \cdot i\sqrt{27} = i^2\sqrt[2]{81} = -9$

b) $\dfrac{\sqrt[2]{-10}}{\sqrt[2]{-2}} = \dfrac{i\sqrt{10}}{i\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}} = \sqrt{5}$

Potencias sucesivas de $i, i^2, i^3, \ldots i^8$:

Hemos visto que $i = \sqrt[2]{-1}$,

i^2 será i x i , sustituyendo el valor de i:

$i^2 = \sqrt[2]{-1} \cdot \sqrt[2]{-1}$

$i^2 = (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}}$ por: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$i^2 = (-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ 1a. ley de los exponentes.

$i^2 = (-1)^1 = -1$

Por tanto, i es un número imaginario tal que elevado al cuadrado da el número real -1.

$i = \sqrt[2]{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)(\sqrt[2]{-1}) = -\sqrt[2]{-1}$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = +1$

$i^5 = i^4 \cdot i = (1)(\sqrt[2]{-1}) = \sqrt[2]{-1}$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = (1)(-1) = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i = (-1)(\sqrt[2]{-1}) = -\sqrt[2]{-1}$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = (1)(1) = +1$

El valor de las potencias de i se repite en ciclos de cuatro.

EJERCICIO I - 1

1.- Expresar en términos de i:

a) $2\sqrt{-81} =$

b) $3\sqrt{-50} =$

c) $(-24)^{\frac{1}{2}} =$

d) $6\sqrt{-2} =$

e) $3\sqrt{-\frac{2}{3}} =$

f) $\sqrt{-\frac{1}{6}} =$

g) $\frac{1}{2}\sqrt{-100} =$

h) $5\sqrt{-.01} =$

2.- Hallar la suma o diferencia:

a) $\sqrt{-3} + \sqrt{-12} =$

b) $3\sqrt{-6} + 2\sqrt{-24} =$

c) $\sqrt{-36} + \sqrt{-4} - \sqrt{-9} =$

d) $\sqrt{-\frac{4}{5}} + \sqrt{-\frac{5}{4}} =$

e) $i + i^2 + i^3 + i^4 =$

3.- Encontrar el producto:

a) $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-25} =$

b) $\sqrt{-100} \cdot \sqrt{-100} =$

c) $(-\sqrt{-5})(\sqrt{-5}) =$

d) $(-\sqrt{-5})^2 =$

e) $2i \cdot 4i \cdot 3i^2 =$

4.- Hallar el cociente:

a) $\dfrac{\sqrt{-90}}{\sqrt{-10}} =$

b) $\dfrac{2\sqrt{-50}}{5\sqrt{-2}} =$

c) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-12}} =$

d) $\dfrac{\sqrt{14}}{2\sqrt{-7}} =$

e) $\dfrac{25\sqrt{-3}}{3\sqrt{-5}} =$