C. Números complejos.

Se les llama números complejos a los números formados por la suma de un número real y un número imaginario.

Ejemplos:

$$2 + 5i, \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i, -1 + \frac{2}{3}i, \text{ etc. . .}$$

Son de la forma $a + bi$, donde a y b son reales y diferentes de cero, e $i = \sqrt[2]{-1}$.

---

a es la parte real y bi es la parte imaginaria del número complejo. Esta es llamada la forma canónica o forma rectangular.

Si $a = 0$, el número complejo $a + bi$ es:
$0 + bi = bi$ imag. puro

Si $b = 0$, el número complejo $a + bi$ es:
$a + 0i = a$ número real

Por consiguiente, en los números complejos están incluidos todos los números reales y todos los números imaginarios puros.

D. Representación gráfica de los números complejos.

La idea de representar gráficamente un número complejo es realmente muy simple ya que éstos se pueden representar por puntos en un sistema rectangular, puesto que todo número complejo queda identificado por una pareja de números reales (a, b).

Establecemos una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números complejos y los puntos del Plano XY. Así los puntos del eje X corresponden a números reales y los puntos del eje Y a números imaginarios puros; éste es llamado el **Plano Complejo.**

La localización de puntos en el Plano Complejo constituyen el Diagrama de Argand.

Ejemplo: Localizar en el plano complejo los siguientes números complejos en forma rectangular.

A $(2 + 3i)$

B $(-3 + 2i)$

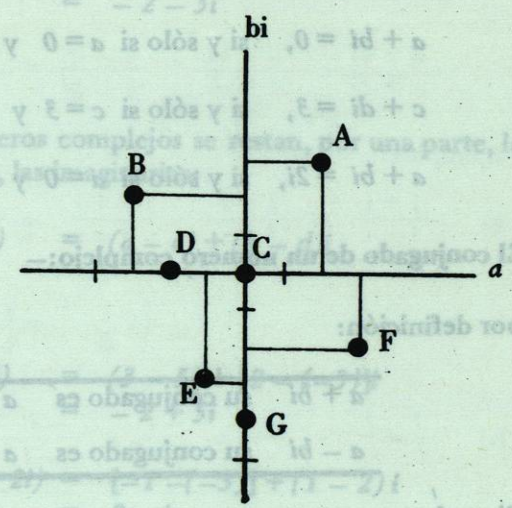
C $(0 + 0i)$

D $(-2 + 0i)$

E $(-1 - 3i)$

F $(3 - 2i)$

G $(0 - 4i)$



PLANO COMPLEJO
DIAGRAMA DE ARGAND

E. Operaciones fundamentales con números complejos.

Definición de igualdad de dos números complejos:

La condición necesaria y suficiente para que dos números complejos sean iguales es, que sus partes reales sean iguales y sus partes imaginarias sean también iguales.

Es decir:

$$a + bi = c + di \text{ , si y sólo si, } a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

Ejemplos:

$$3 + 5i = \frac{6}{2} + \frac{10}{2} i$$

$$6 + 8i \neq 6 - 8i$$

entonces:

$a + bi = 0,$ si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$

$c + di = 3,$ si y sólo si $c = 3$ y $d = 0$

$a + bi = 2i,$ si y sólo si $a = 0$ y $b = 2$

El conjugado de un número complejo:—

por definición:

$a + bi$	su conjugado es	$a - bi$,	y
$a - bi$	su conjugado es	$a + bi$	

Ejemplo:

$5 - 3i$ y $5 + 3i$ son conjugados recíprocamente.

Los números complejos tienen todas las propiedades de los números reales.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

1) ADICION:

Para sumar dos números complejos se suman, por una parte, las partes reales y, por otra, las imaginarias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i$$

Ejemplos:

a) $(5 + 4i) + (3 + 2i) = (5 + 3) + (4 + 2)i$
$= 8 + 6i$

b) $(-6 + 2i) + (4 - 5i) = (-6 + 4) + (2 - 5)i$
$= -2 - 3i$

2) SUSTRACCION.

Para restar dos números complejos se restan, por una parte, las partes reales y, por otra, las imaginarias:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplos:

a) $(3 + 2i) - (5 - 3i) = (3 - 5) + [2 - (-3)]i$
$= -2 + 5i$

b) $(-1 + i) - (-3 + 2i) = [-1 - (-3)] + (1 - 2)\, i$
$= 2 - i$

3) MULTIPLICACION.

Para multiplicar dos números complejos se efectúa la operación como si se tratase de dos binomios, sustituyendo luego i^2 por -1.

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

Ejemplos:

a) $$\begin{aligned}(5+3i)(2-2i) &= 10-10i+6i-6i^2\\ &= 10-4i-6(-1) = 16-4i\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(3-2i)(4+i) &= 12+3i-8i-2i^2\\ &= 12-5i-2(-1) = 14-5i\end{aligned}$$

4) DIVISION.

Para dividir dos números complejos, usamos la propiedad del número 1, multiplicando el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplos.

a) $$\begin{aligned}\frac{1+i}{3-i} &= \frac{1+i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i+3i+i^2}{3^2-i^2} = \frac{2+4i}{10}\\ &= \frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\end{aligned}$$

b) $$-\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{-(-1)} = \frac{-i}{+1} = -i$$

c) $$\begin{aligned}\frac{2-5i}{4+3i} &= \frac{2-5i}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i} = \frac{8-6i-20i+15i^2}{16-9i^2}\\ &= \frac{8-26i+15(-1)}{16-9(-1)} = \frac{-7-26i}{25}\\ &= -\frac{7}{25}-\frac{26}{25}i\end{aligned}$$

EJERCICIO I - 2

1.- **Localizar en el plano complejo los siguientes números complejos en forma rectangular:**

A	$(3+2i)$	E	$(1+0i)$
B	$(-\frac{1}{2}+3i)$	F	$(0+i)$
C	$(-2-2i)$	G	$(0+3i)$
D	$(1-3i)$	H	$(0-2i)$

2.- **Efectuar las sumas:**

a) $(5-2i)+(6+3i) =$

b) $\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{8}i\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right) =$

c) $3i+(3+9i) =$

d) $(-10+7i)+(10+7i) =$

e) $(3+2i)+(6-5i)+(-2+8i) =$

3.- Efectuar las restas:

a) $(6+3i)-(4-2i)=$

b) $(5-3i)-(-2+5i)=$

c) $(5+7i)-(5-7i)=$

d) $(1-i)^2-(1+i)^2=$

e) $\sqrt{-9}\ -(3-i)=$

4.- Efectuar los productos:

a) $5i\,(2-i)=$

b) $(5+3i)^2=$

c) $(2+i)(2-i)=$

d) $(4-i)(3+2i)=$

e) $(-5+3i)(5+3i)=$

5.- Encontrar los cocientes y expresar en forma rectangular:

a) $\dfrac{1}{3+i}=$

b) $\dfrac{2+i}{5}=$

c) $\dfrac{2i}{3+8i}=$

d) $\dfrac{5+4i}{2-3i}=$

e) $\dfrac{2+i\ \sqrt{3}}{2-i\ \sqrt{3}}=$

RESUMEN

Números Reales: Comprenden al conjunto unión de los Racionales e Irracionales.

Números Racionales: Son los que pueden ser representados por una fracción, o sea el cociente de dos enteros, exceptuando la división por cero.

Números Irracionales: Se les define por exclusión, como: "todo número real que no es racional".

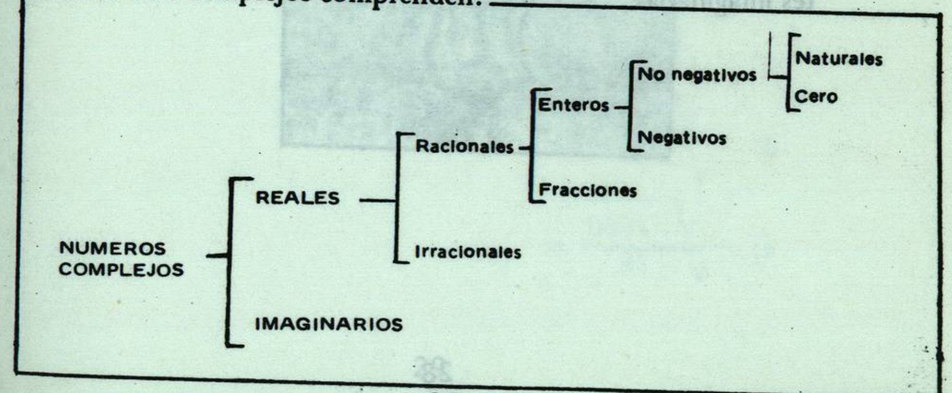
También se les define como aquellos números cuya representación decimal está formada por infinitas cifras que no se repiten periódicamente.

Número Imaginario Puro: Es aquel número indicado por la raíz de índice par de un número negativo; y también, lo definimos como el producto de un número real cualquiera, positivo o negativo, pero diferente de cero, por la unidad imaginaria, $bi\ (i=\sqrt[2]{-1})$.

Número Complejo: Es la suma algebráica de un número real, diferente de cero, con un número imaginario.

Forma rectangular de un número complejo: $a+bi$, donde a y b son reales y diferentes de cero, e $i=\sqrt[2]{-1}$

Los números complejos comprenden:



En el sistema de los números imaginarios y también en el de los números complejos son válidas **las propiedades de los números reales.**

Potencias sucesivas de i:

El valor de las potencias de i se repiten en ciclos de cuatro:

$$\left.\begin{aligned} i &= \sqrt[2]{-1} \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -\sqrt[2]{-1} \\ i^4 &= 1 \end{aligned}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} i^5 &= i \\ i^6 &= i^2 \\ i^7 &= i^3 \\ i^8 &= i^4 \end{aligned}\right] \quad , \quad \text{etc.}$$

Operaciones fundamentales con números complejos:

1) ADICION: Se suman, por separado, las partes reales y las partes imaginarias.

2) SUSTRACCION: Se restan, por separado, las partes reales y las partes imaginarias.

3) MULTIPLICACION: Se efectúa la operación como si se tratara de dos binomios, sustituyendo luego i^2 por -1.

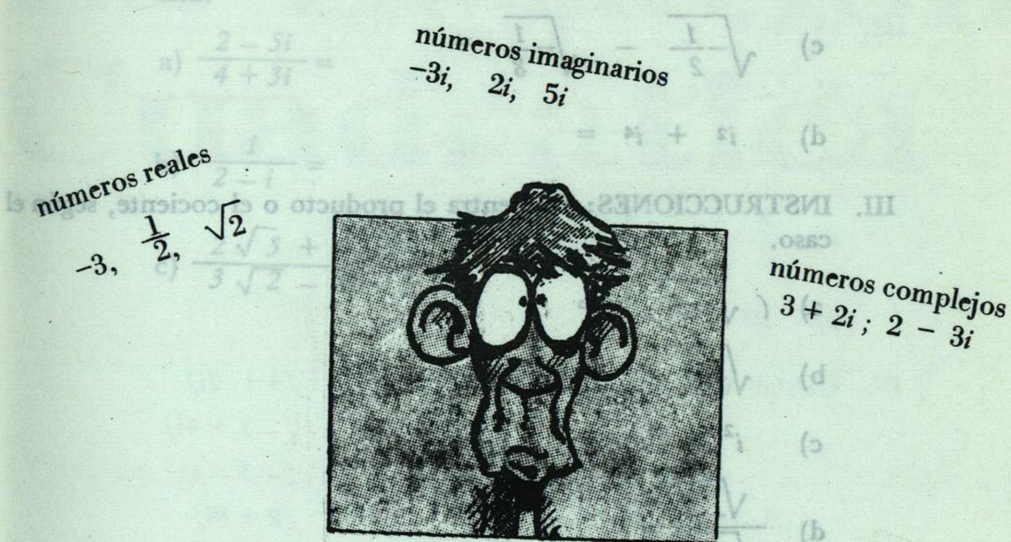
4) DIVISION: Usamos la propiedad del número 1, multiplicando el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor, se simplifica y se expresa finalmente en la forma $a + bi$.

El conjugado de un número complejo:

Por definición:

$a + bi$ es el conjugado de $a - bi$, y

$a - bi$ es el conjugado de $a + bi$.



AUTOEVALUACION

I. INSTRUCCIONES: Expresa en términos de i.

a) $5\sqrt[2]{-\frac{1}{5}} =$

b) $\frac{1}{2}\sqrt[2]{-36} =$

c) $(-8)^{1/2} =$

d) $\sqrt[2]{-50} =$

II. INSTRUCCIONES: Encuentra la suma o diferencia; según el caso.

a) $\sqrt{-18} + \sqrt{-18} =$

b) $\sqrt{-25} + \sqrt{-4} - \sqrt{-49} =$

c) $\sqrt{-\frac{1}{2}} - \sqrt{-\frac{1}{8}} =$

d) $i^2 + i^4 =$

III. INSTRUCCIONES: Encuentra el producto o el cociente, según el caso.

a) $(\sqrt{-5})^2 =$

b) $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-3} =$

c) $i^2 \cdot i^4 =$

d) $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-8}} =$

e) $\dfrac{\sqrt{-1000}}{\sqrt{-10}} =$

IV. INSTRUCCIONES: Traza el Diagrama de Argand, con los siguientes números complejos.

a) $(4 + 2i)$

b) $(-1 + 4i)$

c) $(-3 - i)$

d) $(2 + 0i)$

e) $(0 - 2i)$

f) $(3 - 3i)$

V. INSTRUCCIONES: Efectúa las sumas o restas, según se indica:

a) $(2 + i) + (6 - 3i) - (-1 - 4i) =$

b) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i) + (-\frac{1}{4} - \frac{1}{6}i) =$

c) $(3 + 4i) - (3 - 4i) =$

VI. INSTRUCCIONES: Efectúa los productos o cocientes, según se indica:

a) $\dfrac{2 - 5i}{4 + 3i} =$

b) $\dfrac{1}{2 - i} =$

c) $\dfrac{2\sqrt{3} + i\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 4i\sqrt{3}} =$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

I. a) $i\sqrt{5}$

b) $3i$

c) $2i\sqrt{2}$

d) $5i\sqrt{2}$

II. a) $6i\sqrt{2}$

b) 0

c) $\frac{1}{4}i\sqrt{2}$

d) 0

III. a) -5

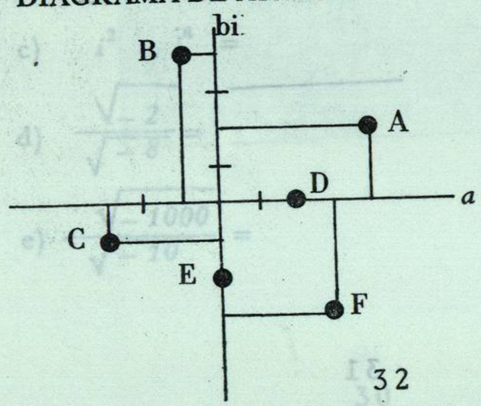
b) $-2\sqrt{6}$

c) -1

d) $\frac{1}{2}$

e) 10

IV. DIAGRAMA DE ARGAND:



A $(4+2i)$

B $(-1+4i)$

C $(-3-i)$

D $(2+0i)$

E $(0-2i)$

F $(3-3i)$

V. a) $9+2i$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}i$

c) $8i$

VI. a) $-\frac{7}{25}-\frac{26}{25}i$

b) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

c) $\frac{1}{33}\sqrt{6}+\frac{15}{33}i$

2

La Ecuación Cuadrática