RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

I. a) $i\sqrt{5}$

b) $3i$

c) $2i\sqrt{2}$

d) $5i\sqrt{2}$

II. a) $6i\sqrt{2}$

b) 0

c) $\frac{1}{4}\,i\sqrt{2}$

d) 0

III. a) -5

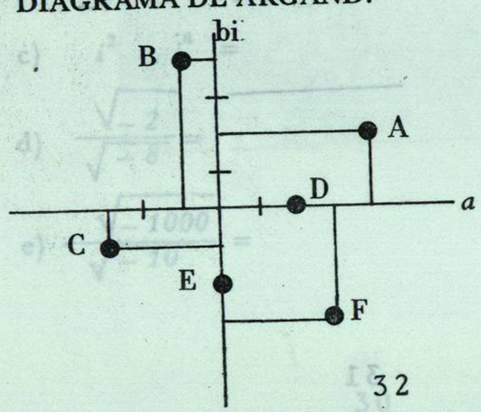
b) $-2\sqrt{6}$

c) -1

d) $\frac{1}{2}$

e) 10

IV. DIAGRAMA DE ARGAND:



A $(4+2i)$
B $(-1+4i)$
C $(-3-i)$
D $(2+0i)$
E $(0-2i)$
F $(3-3i)$

V. a) $9+2i$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\,i$

c) $8i$

VI. a) $-\frac{7}{25}-\frac{26}{25}\,i$

b) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\,i$

c) $\frac{1}{33}\sqrt{6}+\frac{15}{33}\,i$

2

La Ecuación Cuadrática

SEGUNDA UNIDAD
LA ECUACION CUADRATICA

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

I. **SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS:**

1. Aplicará diversos métodos para resolver en forma precisa las ecuaciones cuadráticas en una variable.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error, en el tema:

I. **SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS.**

1.1 Expresará la forma general de una ecuación cuadrática en una variable.

1.2 Clasificará las ecuaciones cuadráticas atendiendo a su forma.

1.3 Encontrará la solución de las ecuaciones cuadráticas incompletas: Puras y Mixtas.

1.4 Representará gráficamente la función cuadrática.

1.5 Determinará "los ceros" de una función cuadrática por el método gráfico.

1.6 Encontrará la solución de una ecuación cuadrática por el método de factorización.

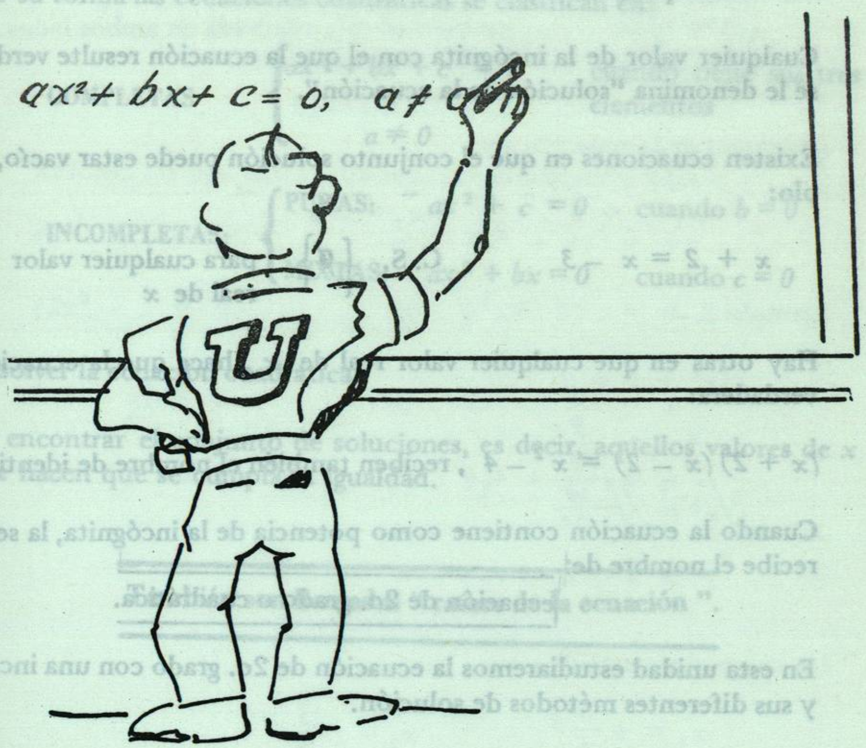
1.7 Encontrará la solución de una ecuación cuadrática por el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.

1.8 Encontrará la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de la fórmula general.

1.9 Utilizará el método de sustitución de variable para transformar una ecuación "de forma cuadrática" en una cuadrática equivalente y la resolverá por cualquiera de los métodos descritos.

1.10 Resolverá ecuaciones que contengan radicales.

1.11 Resolverá problemas expresados mediante palabras (de razonamiento), cuya solución implique ecuaciones cuadráticas.



INTRODUCCION

Sabemos que una ecuación es una declaración de que dos expresiones son iguales.

Así tenemos:

$2 + 3 = 5$	ecuación verdadera
$7 - 4 = 1$	ecuación falsa
$x + 5 = 9$	ecuación condicional

Esta última se llama condicional, porque puede ser cierta o falsa, según los valores que se le den a x.

Cualquier valor de la incógnita con el que la ecuación resulte verdadera, se le denomina "solución de la ecuación".

Existen ecuaciones en que el conjunto solución puede estar vacío, ejemplo:

$x + 2 = x - 3$ C. S. $\{\emptyset\}$ para cualquier valor real de x

Hay otras en que cualquier valor real de x, hace que la ecuación sea verdadera:

$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$, reciben también el nombre de identidades.

Cuando la ecuación contiene como potencia de la incógnita, la segunda, recibe el nombre de: $\boxed{\text{ecuación de 2o. grado o cuadrática.}}$

En esta unidad estudiaremos la ecuación de 2o. grado con una incógnita y sus diferentes métodos de solución.

También, ecuaciones que aunque no son propiamente cuadráticas se les incluye dentro de esta familia. Finalmente, estudiaremos algunos problemas interesantes cuyo planteo requiere una ecuación cuadrática.

I. SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS.

A. Forma canónica de la ecuación cuadrática en la variable x.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

B. Clasificación de las ecuaciones cuadráticas por su forma:

Por su forma las ecuaciones cuadráticas se clasifican en:

COMPLETAS $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ cuando tiene sus tres elementos

INCOMPLETAS: $\begin{cases} \text{PURAS: } ax^2 + c = 0 & \text{cuando } b = 0 \\ \text{MIXTAS: } ax^2 + bx = 0 & \text{cuando } c = 0 \end{cases}$

Resolver la ecuación cuadrática:

Es encontrar el conjunto de soluciones, es decir, aquellos valores de x que hacen que se cumpla la igualdad.

También son llamadas " raíces de la ecuación ".

C. **Métodos de resolución de las ecuaciones cuadráticas.**

INCOMPLETAS. Carecen de un elemento y son, a saber:

1. **PURAS:** Son de la forma $ax^2 + c = 0$. Para encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación; despejaremos a x en función de los valores conocidos:

Ejemplo 1.–

$$2x^2 - 72 = 0$$

$$x^2 = \frac{72}{2}$$

$$x^2 = 36$$

$$\sqrt[2]{x^2} = \sqrt[2]{36}$$ extraemos raíz cuadrada en ambos lados.

$$x = \pm 6$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = +6 \qquad x_2 = -6$$

Ejemplo 2.–

$$25x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -\frac{9}{25}$$

$$\sqrt[2]{x^2} = \sqrt[2]{-\frac{9}{25}}$$

$$x = \pm\frac{3}{5}i$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = +\frac{3}{5}i \qquad x_2 = -\frac{3}{5}i$$

2. **MIXTAS:** Son de la forma $ax^2 + bx = 0$. Para encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación, aplicaremos el método de descomposición en factores y el siguiente teorema:

Dados los números reales a y b
$ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ ó $b = 0$

Ejemplo:

$$2x^2 + 6x = 0$$

$$2x(x+3) = 0$$

$$2x = 0 \qquad x + 3 = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -3$$

EJERCICIO II - 1

1.- Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas PURAS.

a) $4x^2 - 1 = 0$ e) $9x^2 + 25 = 0$

b) $12x^2 - 3 = 0$ f) $y^2 + 27 = 0$

c) $4x^2 - \frac{1}{25} = 0$ g) $2x^2 + 50 = 0$

d) $4y^2 - 2 = 0$ h) $9y^2 + \frac{1}{4} = 0$

2.- Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas MIXTAS.

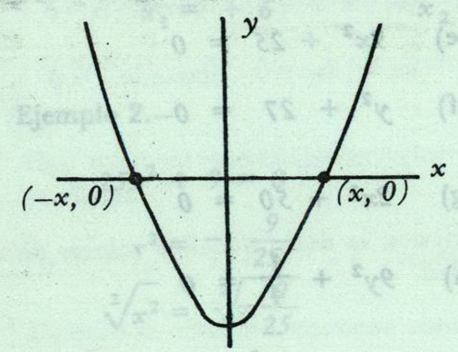
a)	$9x^2 + 15x = 0$	e)	$3x^2 + 6x = 0$
b)	$x^2 - x = 0$	f)	$3x^2 - 5x = 0$
c)	$2x^2 + x = 0$	g)	$y^2 - 7y = 0$
d)	$9y^2 - 3y = 0$	h)	$5x^2 + 15x = 0$

COMPLETAS.– Tienen sus tres elementos, y se pueden resolver por los siguientes métodos:

1. **GRAFICAMENTE:** La gráfica de la función cuadrática

$$y = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0$$

es una curva uniforme abierta, llamada PARABOLA; cuando el coeficiente de x^2 es positivo la curva "se abre hacia arriba" y cuando el coeficiente de x^2 es negativo "se abre hacia abajo".



Los puntos de la gráfica sobre el eje de las X, (la abscisa de este punto) son los valores de x que hacen que $y = 0$.

Este valor de x es un "cero de la función" y es una raíz de la ecuación.

$$y = ax^2 + bx + c = 0$$

Por tanto, las soluciones, o raíces reales (si las hay) de una ecuación cuadrática pueden obtenerse a partir de la gráfica de la ecuación cuadrática y son los valores de las abscisas de los puntos en que la parábola corta o toca al eje X .

Si la curva no corta al eje X, no hay solución en el dominio de los números reales, entonces, las raíces son imaginarias o complejas.

EJEMPLO 1.-

Resolver gráficamente la ecuación cuadrática:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

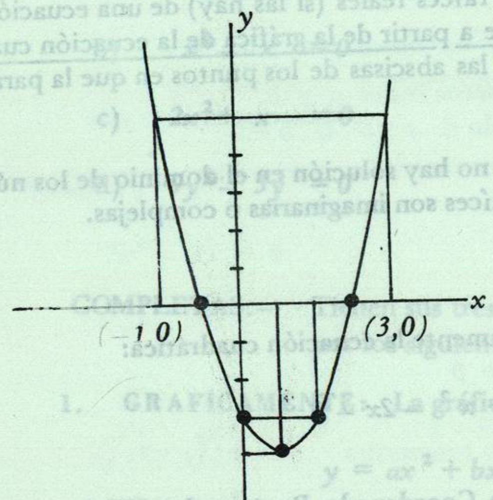
Graficaremos en un Sistema Coordenado Rectangular XY la ecuación dada, para ello:

1o.- Asignamos valores a la variable independiente x.

2o. Substituimos estos valores en la ecuación y calculamos los valores de la variable dependiente y.

3o. Registramos estos valores en un tabulador.

4o. Localizamos en el plano cartesiano los valores de las parejas ordenadas (x, y), uniendo estos puntos trazamos la gráfica de la función cuadrática que es una curva uniforme abierta llamada parábola.



$$y = \quad x^2 \ - 2x \ - 3$$

$$y = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5$$

$$y = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$$

$$y = (0)^2 - 2(0) - 3 = -3$$

$$y = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$$

$$y = (2)^2 - 2(2) - 3 = -3$$

$$y = (3)^2 - 2(3) - 3 = 0$$

$$y = (4)^2 - 2(4) - 3 = 5$$

GRAFICA DE LA FUNCION CUADRATICA

$y = x^2 - 2x - 3$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

TABULADOR

Determinar el conjunto solución o raíces de la ecuación, es encontrar los valores de x para cuando $y = 0$ en la ecuación $y = x^2 - 2x - 3$ y nos queda, entonces:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Aquí la x solo puede tomar ciertos valores para que se cumpla la igualdad, a diferencia de $y = x^2 - 2x - 3$ en la que para cada valor asignado a x, calculamos otro para y.

En la gráfica leemos el valor de las abscisas de los puntos en que la parábola corta al eje X [coordenada $(x, 0)$], se le conoce también como los "ceros de la función".

C. S. $\{-1, 3\}$

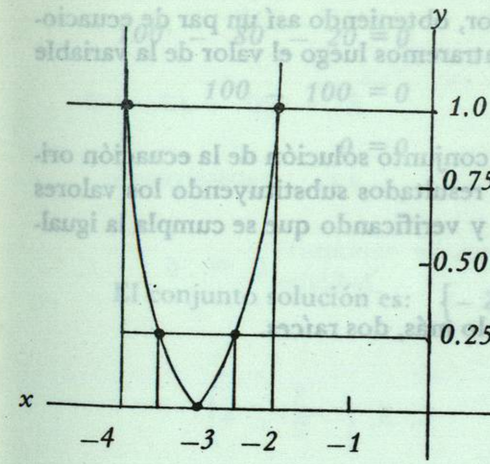
EJEMPLO 2.-

Resolver gráficamente la ecuación cuadrática

$$y = x^2 + 6x + 9$$

Procederemos como en el ejemplo anterior.

x	-2	-2.5	-3	-3.5	-4
y	1	0.25	0	0.25	1



$$x_1 = x_2 = -3$$

RAIZ DOBLE

C. S. $\{-3\}$

EJERCICIO II - 2

Resolver gráficamente las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $y = 6x^2 - 5x - 6 = 0$

b) $y = x^2 - x - 6 = 0$

c) $y = x^2 + x - 6 = 0$

d) $y = 2x^2 + 3x - 5 = 0$

e) $y = 4x^2 - 12x + 9 = 0$

f) $y = x^2 + 6x + 5 = 0$

g) $y = 2x^2 + 5x - 12 = 0$

h) $y = 8 + 5x - 2x^2 = 0$

2.- POR FACTORIZACION: La resolución de ecuaciones cuadráticas por este método es como sigue:

1o) Factorizamos el trinomio cuadrado (si es factorizable) y aplicamos el teorema estableciendo que cada factor es igual a cero. Si el trinomio no es factorizable, podremos encontrar el conjunto solución por el método de la fórmula general.

2o) Igualamos a cero cada factor, obteniendo así un par de ecuaciones de primer grado; encontraremos luego el valor de la variable que hace cierta la igualdad.

De esta forma determinaremos el conjunto solución de la ecuación original, pudiendo comprobar estos resultados substituyendo los valores encontrados en la ecuación dada y verificando que se cumpla la igualdad.

Toda ecuación cuadrática tiene, a lo más, dos raíces.

EJEMPLO 1.-

Resolver la ecuación cuadrática por factorización:

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$
$$(x - 10)(x + 2) = 0$$

si y sólo si

$x - 10 = 0$ $\qquad$ $x + 2 = 0$

$x_1 = 10$ $\qquad$ $x_2 = -2$

COMPROBACION

Cuando $x = 10$

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$
$$(10)^2 - 8(10) - 20 = 0$$
$$100 - 80 - 20 = 0$$
$$100 - 100 = 0$$
$$0 = 0$$

cuando $x = -2$

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$
$$(-2)^2 - 8(-2) - 20 = 0$$
$$4 + 16 - 20 = 0$$
$$20 - 20 = 0$$
$$0 = 0$$

El conjunto solución es: $\{-2, 10\}$