EJEMPLO 2.-

Hallar el conjunto solución de la ecuación cuadrática, por factorización:

$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$
$$(2x + 3)(x - 4) = 0$$

si y sólo si

$$2x + 3 = 0 \qquad x - 4 = 0$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} \qquad x_2 = 4$$

COMPROBACION

cuando $x_1 = -\frac{3}{2}$

$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$
$$2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{3}{2}\right) - 12 = 0$$
$$2\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{15}{2} - 12 = 0$$
$$\frac{9}{2} + \frac{15}{2} - 12 = 0$$
$$\frac{24}{2} - 12 = 0$$
$$12 - 12 = 0$$
$$0 = 0$$

cuando $x_2 = 4$

$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$
$$2(4)^2 - 5(4) - 12 = 0$$
$$32 - 20 - 12 = 0$$
$$32 - 32 = 0$$
$$0 = 0$$

C. S. $\left\{-\frac{3}{2}, 4\right\}$

EJERCICIO II - 3

Resolver por factorización las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + 2 = 3x$

b) $x^2 - 7x + 10 = 0$

c) $x^2 + 2x - 8 = 0$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

e) $x^2 + 14x = -49$

f) $40x^2 - 31x + 6 = 0$

g) $2x^2 - 2 = x - 4x$

h) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

i) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

j) $2x^2 - x - 6 = 0$

3.- POR "COMPLETANDO EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO": La resolución de ecuaciones cuadráticas por este método es como sigue:

Se trata de formar un trinomio cuadrado perfecto (T. C. P.) en el lado izquierdo de la igualdad. Ilustraremos este método con un ejemplo:

$$4x^2 - 4x - 15 = 0$$

PRIMER PASO:

Trasponer el término constante al lado derecho de la igualdad.

$$4x^2 - 4x = 15$$

SEGUNDO PASO:

Dividir miembro a miembro de la igualdad entre el coeficiente del término cuadrado y simplificar.

$$\frac{4x^2}{4} - \frac{4x}{4} = \frac{15}{4}$$

$$x^2 - x = \frac{15}{4}$$

TERCER PASO:

Formar un T. C. P. en el lado izquierdo de la igualdad, para ello, agregar en ambos lados "el cuadrado de la mitad del coeficiente de x ".

$$\underbrace{x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{T. C. P.}} = \frac{15}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

CUARTO PASO:

Expresar el lado izquierdo de la igualdad, como un binomio al cuadrado, es decir, factorizar el T. C. P. y efectuar operaciones.

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{4}$$

QUINTO PASO:

Extraer, en ambos lados de la igualdad, raíz cuadrada, utilizando el signo $\pm$ en el lado derecho.

$$\sqrt[2]{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt[2]{\frac{16}{4}}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{4}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{4}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2}$$

C. S. $\left\{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$

EJERCICIO II - 4

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método "completando el trinomio cuadrado perfecto".

a) $4x^2 - 8x - 21 = 0$

b) $2x^2 + 7x + 6 = 0$

c) $x^2 + 5x - 6 = 0$

d) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

e) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

f) $6x^2 + 7x - 3 = 0$

g) $6x^2 + 13x - 5 = 0$

h) $x^2 + x - 2 = 0$

4.- **APLICANDO LA FORMULA GENERAL:** Consideremos la ecuación cuadrática general

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

si resolvemos esta ecuación aplicando el método de "completando el trinomio cuadrado perfecto" obtendremos una fórmula que nos permite hallar las raíces de cualquier ecuación cuadrática, sin limitación alguna, con solo substituir los valores de a, b y c en la fórmula por los valores particulares de cada caso.

Veamos:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{T. C. P.}} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

FORMULA GENERAL ⇨ $$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

EJEMPLO 1.-

Resolver la ecuación cuadrática aplicando el método de la fórmula general.

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$a = 1$, $b = -5$, $c = 4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

C. S. $\{1, 4\}$

EJEMPLO 2.-

Resolver la ecuación cuadrática aplicando el método de la fórmula general.

$$2x^2 - 2x + 1 = 0$$

$a = 2$, $b = -2$, $c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{2 \pm 2i}{4} = \frac{2}{4} \pm \frac{2}{4}i$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

C. S. $\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$

EJERCICIO II - 5

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando el método de la fórmula general:

a) $3x^2 + 7x - 6 = 0$	j) $x^2 - 4x + 1 = 0$
b) $4x^2 + 7x = 2$	k) $2x^2 - 9x = 5$
c) $x^2 - 3x + 2 = 0$	l) $x^2 - 2x + 10 = 0$
d) $4y^2 + 12y + 9 = 0$	m) $y^2 + 2y + 5 = 0$
e) $x^2 - 5x - 6 = 0$	n) $2x^2 - 6x + 5 = 0$
f) $x^2 - 6 = x$	o) $x^2 - 8x + 25 = 0$
g) $3x^2 - 2x - 8 = 0$	p) $2x^2 - 6x + 9 = 0$
h) $16x^2 - 8x + 1 = 0$	q) $x^2 + x + 1 = 0$
i) $x^2 - 2x - 1 = 0$	r) $2x^2 - 2x + 5 = 0$

D. Ecuaciones de Forma Cuadrática.

Hay ecuaciones que no son cuadráticas pero que pueden transformarse en cuadráticas y resolverse como tales:

Son de la forma:

$ax^{2n} + bx^n + c = 0$ siendo $a, b, c, n \in$ Rac. y a y $n \neq 0$

Para resolverlas procederemos como sigue:

Hacemos el cambio de variable $x^n = y$, entonces la ecuación se transforma en otra que sí es una ecuación cuadrática en la nueva variable y.

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \qquad x^n = y$$

$$a(x^n)^2 + bx^n + c = 0$$

$$ay^2 + by + c = 0$$

Resolvemos para y, y de estos valores obtenemos los de x.

Deberemos siempre comprobar los valores obtenidos, substituyendo en la ecuación original, dado que algunas soluciones de la ecuación derivada no lo son de la ecuación original.

Son ejemplos de ecuaciones de forma cuadrática los siguientes:

$$x^4 - 3x^2 - 10 = 0$$

$$8x^6 - 19x^3 - 27 = 0$$

$$4x^{-4} - 17x^{-2} + 4 = 0$$

$$(x+6) - (x+6)^{\frac{1}{2}} - 2 = 0$$

$$2x^{-2} - x^{-1} - 3 = 0 \quad \text{, etc., etc. . .}$$

EJEMPLO 1.-

Resolver para x, la ecuación de forma cuadrática:

$$x^{-\frac{4}{3}} - 5x^{-\frac{2}{3}} + 4 = 0$$

$$(x^{-\frac{2}{3}})^2 - 5x^{-\frac{2}{3}} + 4 = 0$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$(y-4)(y-1) = 0$$

$$y - 4 = 0 \qquad y - 1 = 0$$

$$y_1 = 4 \qquad y_2 = 1$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = y$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = 4$$

$$(x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} = (2^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$x = 2^{-3}$$

$$x = \frac{1}{2^3}$$

$$x_1 = \frac{1}{8}$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = 1$$

$$(x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} =$$

$$x = 1$$

$$x_2 = 1$$

COMPROBACION

Cuando $x = \frac{1}{2^3}$

$$(\tfrac{1}{2^3})^{-\frac{4}{3}} - 5(\tfrac{1}{2^3})^{-\frac{2}{3}} + 4 = 0$$

$$\frac{1}{2^{-4}} - \frac{5}{2^{-2}} + 4 = 0$$

$$2^4 - 5(2^2) + 4 = 0$$

$$16 - 20 + 4 = 0$$

$$20 - 20 = 0$$

$$0 = 0$$

Cuando $x = 1$

$$(1)^{-\frac{4}{3}} - 5(1)^{-\frac{2}{3}} + 4 =$$

$$1 - 5 + 4 = 0$$

$$5 - 5 = 0$$

$$0 = 0$$

C.S. $\left\{1, \frac{1}{8}\right\}$

EJEMPLO 2.-

Resolver para x, la ecuación de forma cuadrática:

$$x - x^{\frac{1}{2}} - 30 = 0$$

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 - x^{\frac{1}{2}} - 30 = 0$$

$$y^2 - y - 30 = 0$$

$$(y-6)(y+5) = 0$$

$$y - 6 = 0 \qquad y + 5 = 0$$

$$y_1 = 6 \qquad y_2 = -5$$

$$x^{\frac{1}{2}} = y$$

$$x^{\frac{1}{2}} = 6 \qquad x^{\frac{1}{2}} = 5$$

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = (6)^2 \qquad (x^{\frac{1}{2}})^2 = (5)^2$$

$$x_1 = 36 \qquad x_2 = 25$$

C. S. $\{36\}$

COMPROBACION

Cuando $x_1 = 36$

$$x - x^{\frac{1}{2}} - 30 = 0$$

$$(36) - (36)^{\frac{1}{2}} - 30 = 0$$

$$36 - 6 - 30 = 0$$

$$36 - 36 = 0$$

$$0 = 0$$

Cuando $x = 25$

$$x - x^{\frac{1}{2}} - 30 = 0$$

$$(25) - (25)^{\frac{1}{2}} - 30 \stackrel{?}{=} 0$$

$$25 - 5 - 30 \neq 0$$

$$25 - 35 \neq 0$$

$$-5 \neq 0$$

no es solución!

EJERCICIO II - 6

Resolver las ecuaciones de forma cuadrática.

a) $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

c) $4x^{-4} - 17x^{-2} + 4 = 0$

d) $y^{-4} - 5y^{-2} + 4 = 0$

e) $3x^{-2} - 4x^{-1} - 4 = 0$

f) $2x^{-2} - x^{-1} - 3 = 0$

g) $6x^{-2} + 5x^{-1} - 6 = 0$

h) $x^4 = 25x^2 - 144$

i) $x^4 + 27 = 12x^2$

j) $8x^6 - 19x^3 - 27 = 0$

k) $8x^{-6} + 7x^{-3} = 1$

l) $(x+6) - (x+6)^{\frac{1}{2}} - 2 = 0$

m) $x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$

n) $x^{\frac{4}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 4 = 0$

E. Ecuaciones con radicales de segundo orden.

Son así llamadas las ecuaciones en que aparecen variables bajo el signo radical de índice dos.

El método de resolución consiste en trasponer términos de modo que nos quede el radical sólo, en un miembro de la ecuación; elevaremos al cuadrado tantas veces como sea necesario para eliminar el signo radical, luego despejaremos la variable en función de los valores conocidos. Este procedimiento (elevar al cuadrado) da lugar, a veces, a ecuaciones que no son equivalentes a la ecuación original y por lo tanto los valores encontrados no siempre la satisfacen; por esta razón es esencial que todas las raíces de las ecuaciones con radicales sean comprobadas para poder ser aceptadas como soluciones verídicas.

Algunos autores llaman a las soluciones de una ecuación derivada, que no lo son de la ecuación original, raíces extrañas; por lo tanto el conjunto solución lo forman solo los valores que sí satisfacen la ecuación original.

EJEMPLO 1.-

Resolver la ecuación con radical:

$$\sqrt[2]{x+2} + 4 = x$$

$$\sqrt[2]{x+2} = x - 4$$

$$\left(\sqrt[2]{x+2}\right)^2 = (x-4)^2$$

$$x + 2 = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 8x - x + 16 - 2 = 0$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x-7)(x-2) = 0$$

$$x - 7 = 0 \qquad x - 2 = 0$$

$$x_1 = 7 \qquad x_2 = 2$$

COMPROBACION

Cuando $x = 7$	Cuando $x = 2$
$\sqrt{x+2} + 4 \overset{?}{=} x$	$\sqrt{x+2} + 4 \overset{?}{=} x$
$\sqrt{7+2} + 4 \overset{?}{=} 7$	$\sqrt{2+2} + 4 \overset{?}{=} 2$
$\sqrt{9} + 4 \overset{?}{=} 7$	$\sqrt{4} + 4 \overset{?}{=} 2$
$3 + 4 = 7$	$2 + 4 \neq 2$
$7 = 7$	$6 \neq 2$
	no es solución!

Por lo tanto, la ecuación tiene solo una raíz.

C. S. $\{7\}$

EJEMPLO 2.-

Resolver la ecuación con radicales:

$$\sqrt{2x-3} = 7 - \sqrt{2x+4}$$

$$(\sqrt{2x-3})^2 = (7 - \sqrt{2x+4})^2$$

$$2x - 3 = 49 - 14\sqrt{2x+4} + 2x + 4$$

$$14\sqrt{2x+4} = 53 + 3$$

$$\frac{14\sqrt{2x+4}}{14} = \frac{56}{14}$$

$$\sqrt{2x+4} = 4$$

$$(\sqrt{2x+4})^2 = (4)^2$$

$$2x + 4 = 16$$

$$2x = 16 - 4$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$x = 6$$

COMPROBACION

$$\sqrt{2x-3} = 7 - \sqrt{2x+4}$$

$$\sqrt{2(6)-3} = 7 - \sqrt{2(6)+4}$$

$$9 = 7 - 16$$

$$3 = 7 - 4$$

$$3 = 3$$

C. S. $\{6\}$

EJERCICIO II - 7

Resolver las ecuaciones con radicales y verificar en cada caso las soluciones obtenidas:

a) $\sqrt{2x+5} = 3$

b) $\sqrt{1-5x} + \sqrt{1-x} = 2$

c) $\sqrt{8x-7} - x = 0$

d) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{x} + 3$

e) $\sqrt{x} = \frac{6}{\sqrt{x}}$

f) $\sqrt{3x+1} + 1 = x$

g) $\sqrt{2y+3} + \sqrt{y+1} = \sqrt{y-2}$

h) $\sqrt{2} + \sqrt{x} = \sqrt{x+2}$

i) $\sqrt{3x-1} + \sqrt{2} = 3\sqrt{x-1}$

j) $\sqrt{2x+13} - \sqrt{x+10} = 1$

F. Problemas diversos que se resuelven por ecuaciones cuadráticas.

Muchos problemas con enunciado, en particular aquellos que tratan con productos o cocientes que contienen la incógnita incluyen en su solución ecuaciones cuadráticas.