Se sugiere el siguiente método para establecer la ecuación con la cual se resuelven:

1o. Leer y re-leer el problema con sumo cuidado y estudiarlo hasta lograr entenderlo con claridad.

2o. Identificar las cantidades conocidas y las desconocidas del problema.

3o. Seleccionar una de las incógnitas representándola por medio de un símbolo, x ; a continuación se expresan las otras incógnitas en términos de este símbolo.

4o. Encontrar qué cantidades o combinaciones entre ellas son iguales.

5o. A partir de las combinaciones encontradas se establece una ecuación cuadrática.

6o. Resolver la ecuación obtenida y verificar el conjunto solución en el problema original.

Aquí debe observarse que a veces un problema que se resuelve mediante una ecuación cuadrática tiene una solución única, mientras que la ecuación tiene dos soluciones. En tales casos la raíz que no satisface las condiciones del problema se descarta.

EJEMPLO 1.-

Hallar dos enteros positivos consecutivos cuyo producto sea 210.

Sea x = un número entero positivo.
$x + 1$ = su consecutivo

$$x(x+1) = 210$$
$$x^2 + x - 210 = 0$$
$$(x-14)(x+15) = 0$$
$$x - 14 = 0 \qquad x + 15 = 0$$
$$x_1 = 14 \qquad x_2 = -15$$

se descarta!

Como los números solicitados son positivos, tomaremos solamente el valor $x = 14$, los números son, entonces:

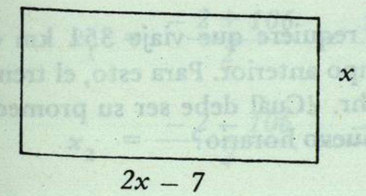
un número = 14
su consecutivo 14 + 1 = 15

Comprobación:

$14(14+1) = 210$
$14\,(15) = 210$
$210 = 210$

EJEMPLO 2.-

El largo de un jardín rectangular es 7 metros menos que dos veces su ancho. Si el área del jardín es 204m², ¿Cuáles son las dimensiones del jardín?



Sea:
ancho del jardín $= x$
largo del jardín $= 2x - 7$
Area $= 204m^2$
dimensiones = ?

$$x(2x-7)=204$$

$$2x^2-7x-204=0$$

$a=2$

$b=-7$

$c=-204$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(2)(-204)}}{2(2)}$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49+1632}}{4}=\frac{7\pm 41}{4}$$

$$x_1=\frac{7+41}{4}=\frac{48}{4}=12$$

$$x_2=\frac{7-41}{4}=\frac{-34}{4}=-8.5$$

no es solución!

SOLUCION:

ancho del jardín $= x = 12$

largo del jardín $= 2x-7 = 17$

COMPROBACION:

$(12)(17)=204$

$204=204$

EJEMPLO 3.-

Un nuevo horario para un tren requiere que viaje 351 km en un cuarto de hora menos que el tiempo anterior. Para esto, el tren debe aumentar su velocidad en 2 km/hr. ¿Cuál debe ser su promedio de velocidad para poder cumplir el nuevo horario?

Sea x la velocidad promedio real del tren en km/hr.

Sabemos que: $t=\frac{d}{v}$, entonces:

tiempo anterior − tiempo nuevo $=\frac{1}{4}$ hr

$$\frac{351}{x}-\frac{351}{x+2}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{351(x+2)-351x}{x(x+2)}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{351x+702-351x}{x^2+2x}=\frac{1}{4}$$

$$x^2+2x=4(702)$$

$$x^2+2x-2808=0$$

$a=1$

$b=2$

$c=-2808$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(-2808)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+11{,}232}}{2}=\frac{-2\pm 106}{2}$$

$$x_1=\frac{2+106}{2}=\frac{104}{2}=52$$

$$x_2=\frac{-2-106}{2}=\frac{-108}{2}=-54$$

no es solución!

La velocidad promedio del tren será de $52 + 2 = 54$ Km/hr.

COMPROBACION:

$$\frac{351}{52} - \frac{351}{54} = \frac{1}{4}$$

C. S. $\{54\}$

$$6.75 - 6.50 = 0.25$$

$$0.25 = 0.25$$

EJEMPLO 4.-

La diferencia en tiempos que tardan dos pintores A y B, en pintar 1 m^2 de una barda es de 1 minuto. Juntos pueden pintar 27 m^2 en 1 hora. ¿Cuánto tiempo le tomará a cada uno por separado para pintar 1 m^2?

Consideremos que:

x = Número de minutos requeridos por el pintor más rápido para pintar 1 m^2 (supongamos que sea A), entonces:

$x + 1$ = Número de minutos requeridos por el pintor B.

Ahora:

$\frac{1}{x}$ = Es la fracción de 1 m^2 que el pintor A puede pintar en un minuto.

$\frac{1}{x+1}$ = Es la fracción de 1 m^2, que el pintor B logra pintar en un minuto.

De aquí que: trabajando juntos será:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} =$ fracción de 1 m^2 que ambos pintan en 1 minuto.

Pero nos dice el problema, que juntos pueden pintar 27 m^2 en 1 hora; en 1 minuto harán:

$\frac{27}{60}$, simplificando queda: $\frac{9}{20}$ de m^2

Entonces podemos establecer que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{9}{20}$$

$$\frac{x+1+x}{x(x+1)} = \frac{9}{20}$$

$$\frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{9}{20}$$

$$9(x^2+x) = 20(2x+1)$$

$$9x^2 + 9x - 40x - 20 = 0$$

$$9x^2 - 31x - 20 = 0$$

$$a = 9 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b = -31$$

$$c = -20 \qquad x = \frac{-(-31) \pm \sqrt{(-31)^2 - 4(9)(-20)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{31 \pm \sqrt{961 + 720}}{18} = \frac{31 \pm 41}{18}$$

$$x = \frac{31 + 41}{18} = \frac{72}{18} = 4$$

$$x = \frac{31 - 41}{18} = \frac{-10}{18} = -\frac{5}{9}$$

no es solución!

La raíz $-\frac{5}{9}$, se elimina ya que es un tiempo negativo y no tiene sentido en este problema.

Por consiguiente:

$x = 4$

SOLUCION:

$x + 1 = 5$

A – tarda 4 minutos en pintar 1 m^2

B – tarda 5 minutos en pintar 1 m^2

EJERCICIO II - 8

1.- Problemas de números:

a) **Hallar dos números positivos sabiendo que uno de ellos es igual al triple del otro más 5 y que el producto de ambos es igual a 68**

b) **Hallar dos números sabiendo que la suma de sus cuadrados es 34 y que uno de ellos es igual al doble del otro menos 1.**

c) **Hallar tres números enteros consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 110.**

d) **Hallar un número sabiendo que la suma del triple del mismo con el doble de su recíproco es 5.**

e) **Si a 10 veces un número le sumamos 12 se obtiene un resultado igual a dos veces el cuadrado del número. Encontrar el número.**

2.- Problemas geométricos:

a) **Hallar las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 50 m y su área es 150 m^2.**

b) **La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a 34 cms. Hallar las longitudes de los catetos, sabiendo que uno de ellos es 14 cms., mayor que el otro.**

c) **Hallar las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su longitud es igual al triple de su altura, y que si se disminuye en 1 cm la altura y se aumenta en 3 cm la longitud, el área será 72 cm^2.**

d) El perímetro de un triángulo rectángulo es 60 cms., y su hipotenusa mide 25 cms. Hallar las longitudes de los otros dos lados.

e) Un terreno rectangular tiene 50 m. de ancho y 60 m. de largo. Si el ancho y el largo se aumentan en la misma cantidad, el área aumenta en 1200 m^2 . Encontrar la cantidad en que se ha aumentado el ancho y el largo del terreno.

3. Problemas de móviles:

a) Un piloto realiza un vuelo de 600 kilómetros. Sabiendo que si aumenta la velocidad en 40 km/hr podría recorrer dicha distancia empleando 30 minutos menos, hallar su velocidad.

b) Un policía de caminos salió de su cuartel y viajó con velocidad constante durante 28 kms. y entonces se le notificó de un accidente. Manejó hasta el lugar del accidente que estaba a 8 kms. a una velocidad que era 45 kms/hr mayor que su velocidad de crucero anterior. Si habían transcurrido 54 minutos desde que se inició su servicio hasta que llegó al accidente, encuentre su velocidad de crucero.

c) Un ranchero recorrió 100 km. hasta una ciudad para recoger un automóvil nuevo regresándose al mismo lugar en él. Su velocidad promedio a la ciudad fue de 10 kms/hr más que la velocidad de regreso; el recorrido completo lo realizó en 3 horas y 40 minutos. Encuentre la velocidad para cada parte del viaje.

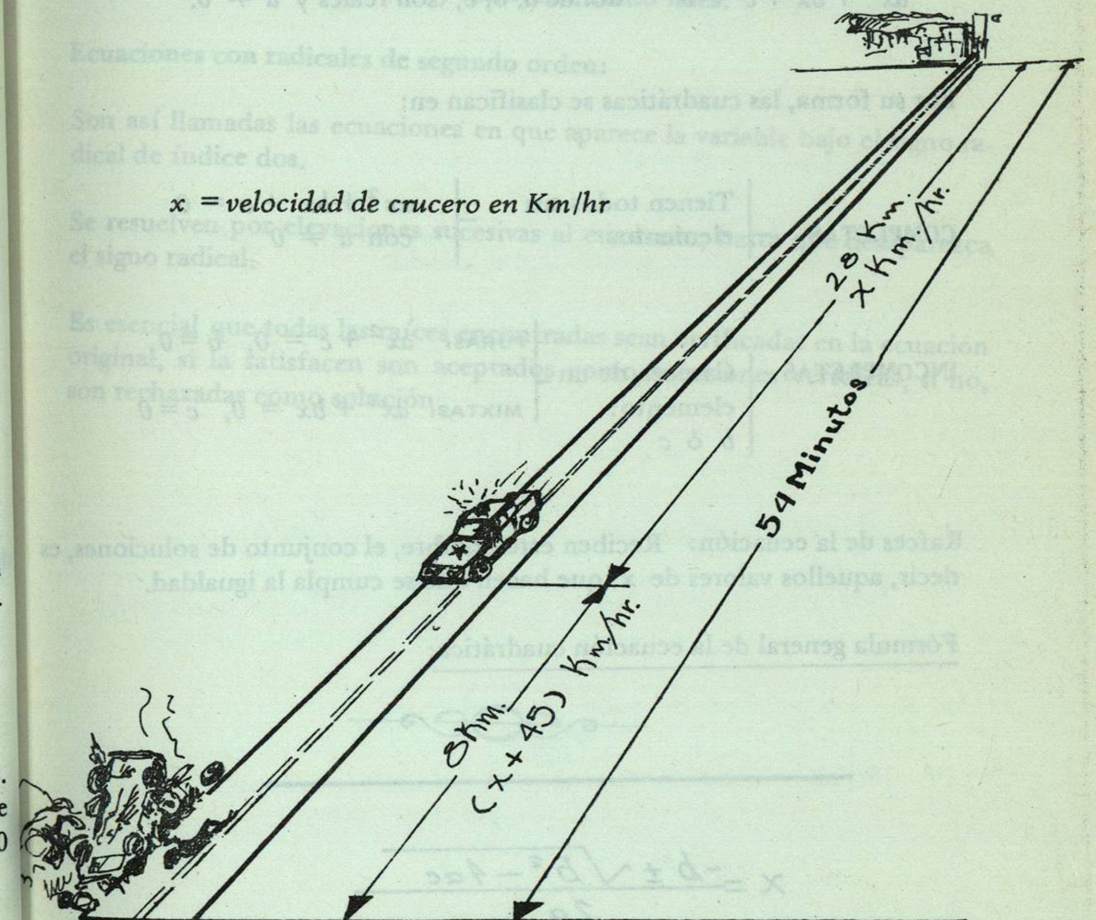
4. Problemas de tiempos de trabajos:

a) Dos hermanos lavaron las paredes de su cuarto en 3 horas. ¿Cuántas horas requerirá cada uno para lavar las paredes de cuartos iguales, si el mayor puede hacer el trabajo en 2 horas 30 minutos menos que el otro?

b) Dos operarios A y B, juntos, realizan una tarea en 10 días. Trabajando por separado, A tardaría 5 días más que B. Hallar el número de días que tardarían en hacer la tarea trabajando cada uno por sí solo.

c) El operario B tarda 6 horas más que el A en efectuar un trabajo. Hallar cuánto tiempo tardarían en realizarlo cada uno de ellos sabiendo que juntos, invierten 4 horas en terminarlo.

x = velocidad de crucero en Km/hr



RESUMEN

Ecuaciones Cuadráticas: Reciben este nombre las ecuaciones en que aparece el cuadrado de la variable, también se les conoce como ecuaciones de segundo grado.

Forma general de la ecuación cuadrática en una variable:

$ax^2 + bx + c = 0$ donde $a, b, c,$ son reales y $a \neq 0.$

Por su forma, las cuadráticas se clasifican en:

COMPLETAS — Tienen todos sus elementos — $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$

INCOMPLETAS — Carecen de un elemento: b ó c
- PURAS: $ax^2 + c = 0, \quad b = 0$
- MIXTAS: $ax^2 + bx = 0, \quad c = 0$

Raíces de la ecuación: Reciben este nombre, el conjunto de soluciones, es decir, aquellos valores de x que hacen que se cumpla la igualdad.

Fórmula general de la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ecuaciones de "forma cuadrática":

$ax^{2n} + bx^n + c = 0$ donde $a, b, c, n,$ son racionales, con a y n diferentes de cero.

Son ecuaciones que no son propiamente cuadráticas pero que pueden ser transformadas en cuadráticas y resolverse como tales.

Ecuaciones con radicales de segundo orden:

Son así llamadas las ecuaciones en que aparece la variable bajo el signo radical de índice dos.

Se resuelven por elevaciones sucesivas al cuadrado, hasta que desaparezca el signo radical.

Es esencial que todas las raíces encontradas sean verificadas en la ecuación original, si la satisfacen son aceptados como soluciones verídicas, si no, son rechazadas como solución.

AUTOEVALUACION

I. **INSTRUCCIONES:** Resuelve las siguientes cuestiones cuadráticas incompletas.

a) $x^2 + 32 = 0$

b) $8x^2 + \frac{1}{2} = 0$

c) $6x^2 - 2x = 0$

d) $3x^2 + 2x = 0$

II. **INSTRUCCIONES:** Resuelve las siguientes cuestiones cuadráticas completas, por el método que se solicita.

a) Gráfico: $y = 4x^2 - 4x + 5 = 0$

b) Factorización: $2x^2 + 7x + 6 = 0$

c) Completar T. C. P. $2x^2 - x - 6 = 0$

d) Fórmula General: $2x^2 - 2x + 1 = 0$

III. **INSTRUCCIONES:** Resuelve la ecuación "de forma cuadrática".

$$x^{-\frac{2}{3}} - 5x^{-\frac{1}{3}} + 4 = 0$$

IV. **INSTRUCCIONES:** Resuelve la ecuación con radicales:

$$\sqrt{x^2 - 9} = x - 3$$

V. **INSTRUCCIONES:** Resuelve el siguiente problema, cuya solución implica una ecuación cuadrática:

"Hallar dos números positivos, sabiendo que la suma de sus cuadrados es 20 y que uno de ellos es igual al triple del otro menos 2"

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

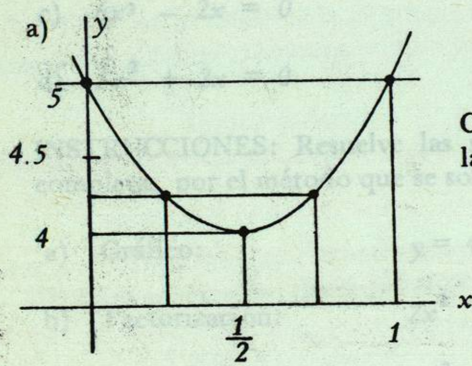
I. a) $x = \pm 4i\sqrt{2}$

b) $x = \pm \frac{1}{4}\, i$

c) $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{1}{3}$

d) $x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{2}{3}$

II. a)



C. S. $= \{\emptyset\}$
las raíces no son reales.

b) $x_1 = -\frac{3}{2};\ x_2 = -2$

c) $x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{3}{2}$

d) $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i;\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, i$

III. $x_1 = \frac{1}{64};\ x_2 = 1$

IV. $x = 3$

V. C.S. $\{2, 4\}$

3

Sistemas de Ecuaciones Cuadráticas