RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

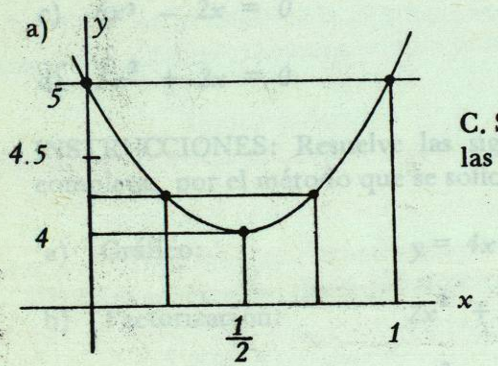
I. a) $x = \pm 4i\sqrt{2}$

b) $x = \pm \frac{1}{4} i$

c) $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{1}{3}$

d) $x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{2}{3}$

II. a)



C. S. $= \{\emptyset\}$
las raíces no son reales.

b) $x_1 = -\frac{3}{2};\ x_2 = -2$

c) $x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{3}{2}$

d) $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i;\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$

III. $x_1 = \frac{1}{64};\ x_2 = 1$

IV. $x = 3$

V. C.S. $\{2, 4\}$

3

Sistemas de Ecuaciones Cuadráticas

TERCERA UNIDAD
SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

I. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS.

1. Aplicará los diferentes métodos en la resolución de ecuaciones cuadráticas.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error, en el tema:

I. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS.

1.1 Enunciará la forma de una ecuación cuadrática general con dos variables.

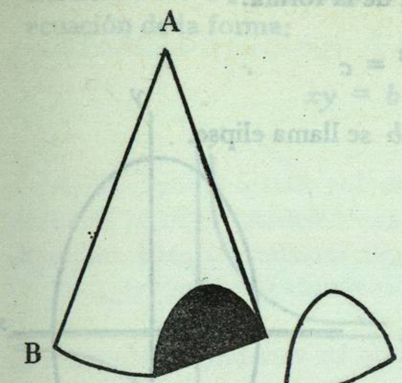
1.2 Identificará las Secciones Cónicas, su ecuación, su forma y alguna característica distintiva.

1.3 Comprenderá la resolución de sistemas de ecuaciones cuadráticas, por graficación.

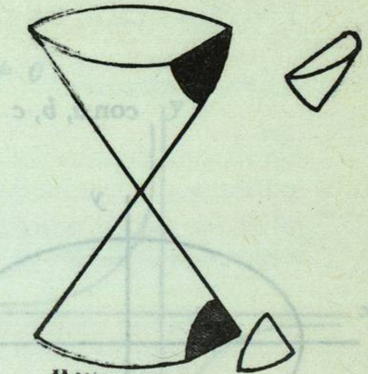
1.4 Encontrará la solución de un sistema de ecuaciones cuadráticas, por el método de sustitución:
- a) Un sistema formado por una ecuación de primer grado y y una de segundo grado.
- b) Un sistema formado por dos ecuaciones cuadráticas.

1.5 Encontrará la solución de un sistema de ecuaciones cuadráticas, por el método de sumas o restas.

1.6 Encontrará la solución de un sistema de ecuaciones cuadráticas, con términos xy y sin términos lineales, por el método de eliminación del término constante.

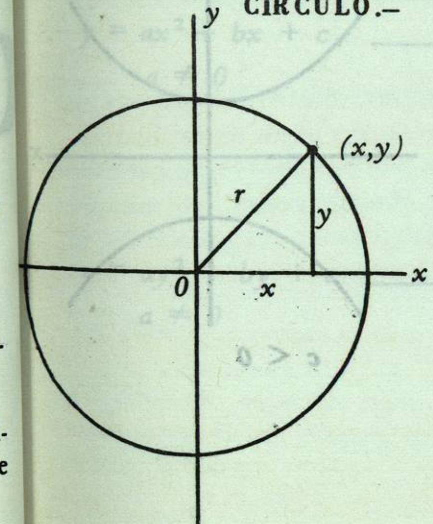


PARABOLA
El plano es paralelo a AB



HIPERBOLA
El plano es perpendicular al plano de la base del cono doble invertido.

En seguida veremos solamente la ecuación y alguna característica sobresaliente de las secciones cónicas, ya que su estudio en detalle corresponde a Geometría Analítica; por ahora para los fines del tema que estudiamos basta con su identificación para comprender mejor el conjunto solución de un sistema de ecuaciones cuadráticas dado.



CIRCULO.– La gráfica de una ecuación de la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es un círculo de radio r y centro en el origen.

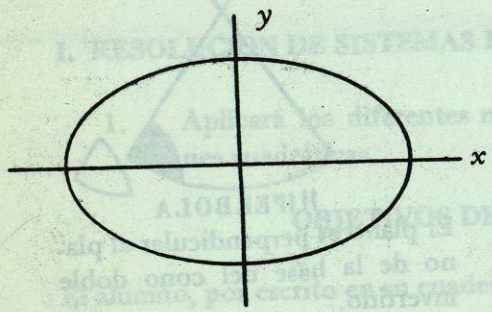
De acuerdo con el Teorema de Pitágoras las coordenadas de cualquier punto del círculo satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

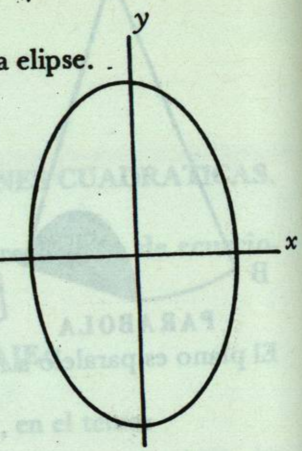
ELIPSE.– La gráfica de una ecuación de la forma:

$$ax^2 + by^2 = c$$

con $a, b, c > 0$ y $a \neq b$ se llama elipse.



$a < b$



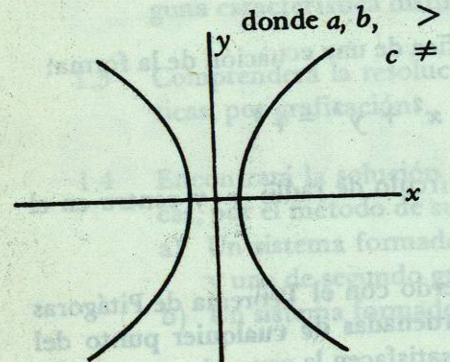
$a > b$

HIPERBOLA.– La gráfica de una ecuación de la forma:

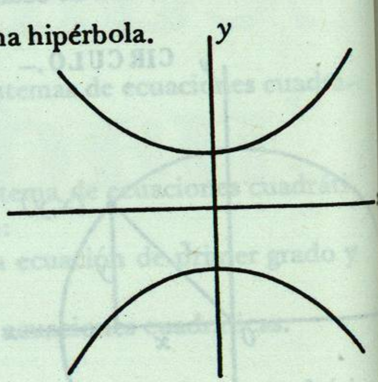
$$ax^2 - by^2 = c$$

donde $a, b, > 0$ se llama hipérbola.

$c \neq 0$



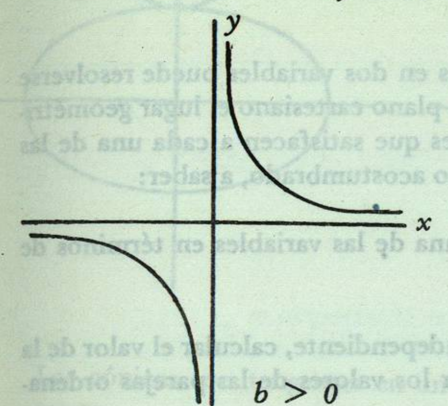
$c > 0$



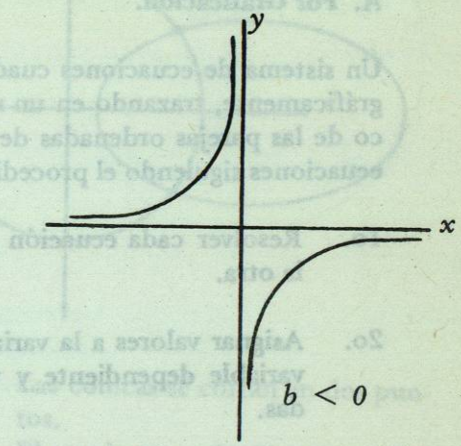
$c < 0$

HIPERBOLA EQUILATERA o RECTANGULAR.– La gráfica de una ecuación de la forma:

$xy = b$ donde $b \neq 0$



$b > 0$



$b < 0$

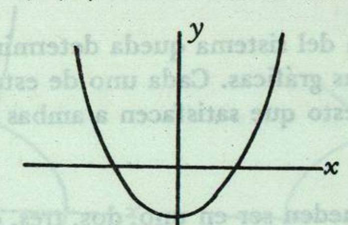
PARABOLA.– La gráfica de una ecuación de la forma:

$y = ax^2 + bx + c$ ó $x = ay^2 + by + c$

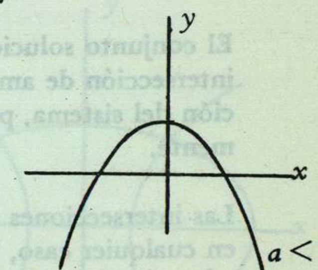
en donde $a \neq 0$, y $a, b, c,$ son constantes reales.

$y = ax^2 + bx + c$

$a \neq 0$



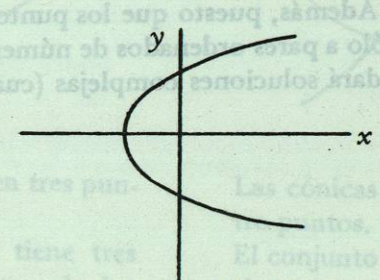
$a > 0$



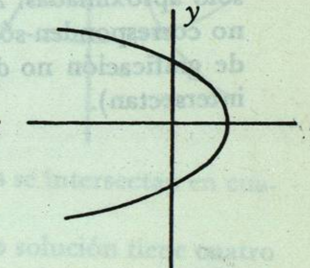
$a < 0$

$x = ay^2 + by + c$

$a \neq 0$



$a > 0$



$a < 0$

I. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS.

A. Por Graficación.

Un sistema de ecuaciones cuadráticas en dos variables puede resolverse gráficamente, trazando en un mismo plano cartesiano el lugar geométrico de las parejas ordenadas de valores que satisfacen a cada una de las ecuaciones siguiendo el procedimiento acostumbrado, a saber:

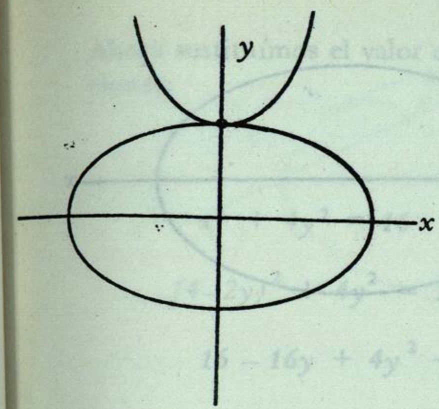
1o. Resolver cada ecuación para una de las variables en términos de la otra.

2o. Asignar valores a la variable independiente, calcular el valor de la variable dependiente y tabular los valores de las parejas ordenadas.

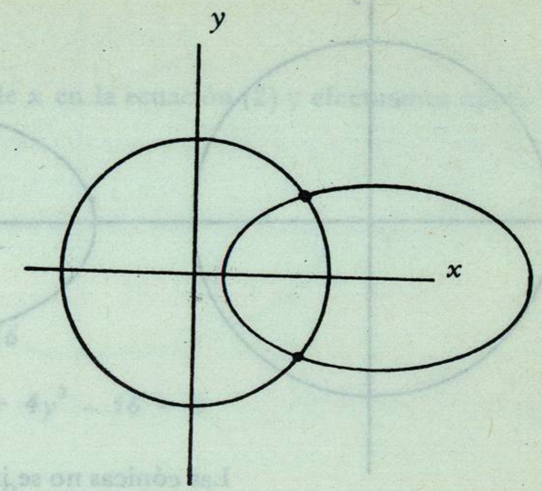
3o. Trazar la gráfica de cada ecuación, localizando en un mismo plano los puntos determinados por los pares de valores y uniéndolos con una curva de variación uniforme.

El conjunto solución del sistema queda determinado por los puntos de intersección de ambas gráficas. Cada uno de estos puntos son una solución del sistema, puesto que satisfacen a ambas ecuaciones simultáneamente.

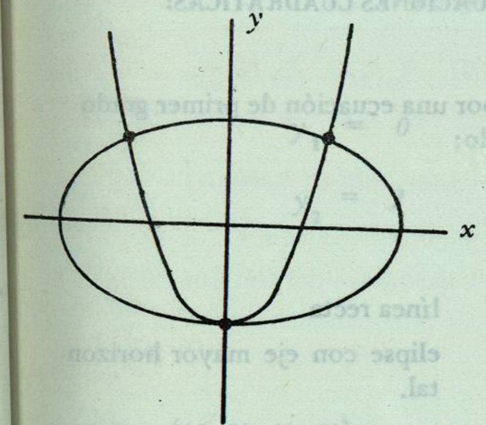
Las intersecciones pueden ser en uno, dos, tres, cuatro o ningún punto, en cualquier caso, las soluciones que se obtienen a partir de gráficas son sólo aproximadas. Además, puesto que los puntos en un plano cartesiano corresponden sólo a pares ordenados de números reales, este método de graficación no dará soluciones complejas (cuando las gráficas no se intersectan).



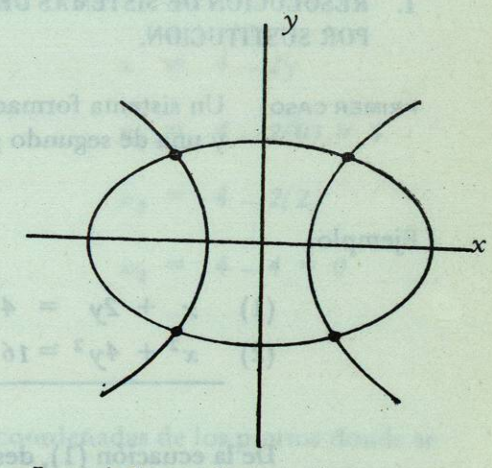
Las cónicas son tangentes en un punto.
El conjunto solución tiene un elemento en el sistema de los números reales.



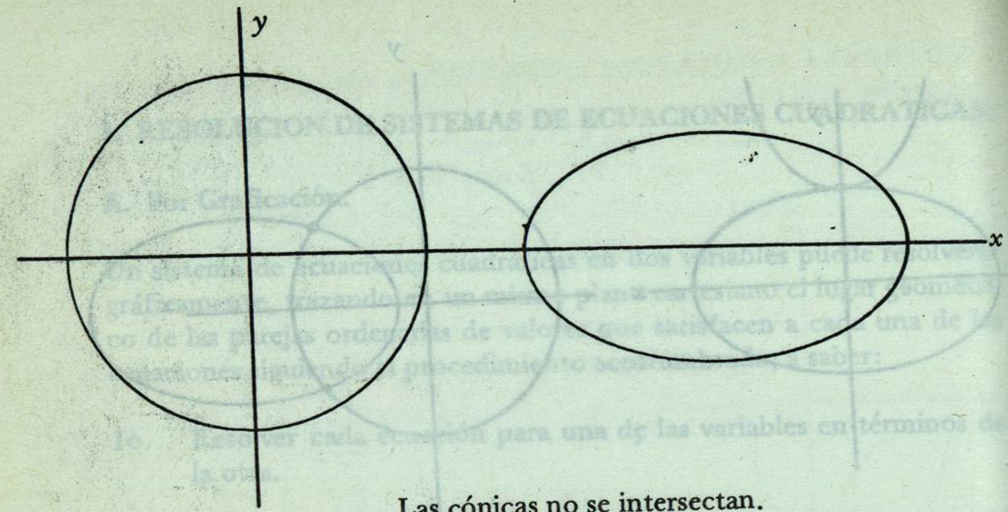
Las cónicas se cortan en dos puntos.
El conjunto solución tiene dos elementos en el sistema de los números reales.



Las cónicas se cortan en tres puntos.
El conjunto solución tiene tres elementos en el sistema de los números reales.



Las cónicas se intersectan en cuatro puntos.
El conjunto solución tiene cuatro elementos en el sistema de los números reales.



Las cónicas no se intersectan.
El conjunto solución es el conjunto vacío (∅), en el sistema de los números reales.

B. Métodos Algebraicos.

1. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS: POR SUSTITUCION.

PRIMER CASO: Un sistema formado por una ecuación de primer grado y una de segundo grado:

Ejemplo:

(1) $x + 2y = 4$ línea recta

(2) $x^2 + 4y^2 = 16$ elipse con eje mayor horizontal.

De la ecuación (1), despejamos a x :

$$x = 4 - 2y$$

Ahora sustituímos el valor de x en la ecuación (2) y efectuamos operaciones:

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

$$(4-2y)^2 + 4y^2 = 16$$

$$16 - 16y + 4y^2 + 4y^2 - 16 = 0$$

$$(\tfrac{1}{8})\ 8y^2 - 16y = 0$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y(y-2) = 0$$

$$y = 0 \qquad y - 2 = 0$$

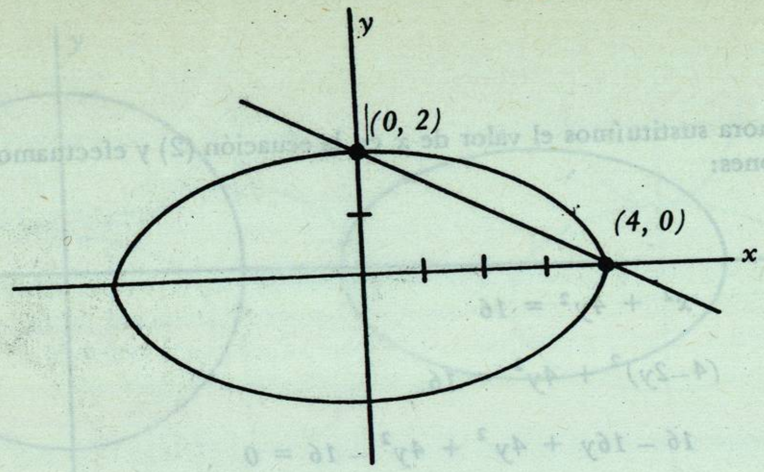
$$x = 4 - 2y$$

$$y_1 = 0 \qquad x_1 = 4 - 2(0) = 4$$

$$y_2 = 2 \qquad x_2 = 4 - 2(2)$$

$$x_2 = 4 - 4 = 0$$

C. S. $\{(4, 0), (0, 2)\}$ que son las coordenadas de los puntos donde se intersectan las gráficas.



COMPROBACION

	$x + 2y = 4$	$x^2 + 4y^2 = 16$
$P_1\,(4,0)$	$4 + 2(0) = 4$	$(4)^2 + 4(0)^2 = 16$
	$4 = 4$	$16 + 0 = 16$
		$16 = 16$
	$0 + 2(2) = 4$	$(0)^2 + 4(2)^2 = 16$
$P_2\,(0,2)$	$4 = 4$	$4(4) = 16$
		$16 = 16$

Nótese que hemos comprobado ambos elementos del conjunto solución en las dos ecuaciones.

EJERCICIO III - 1

Resolver, por sustitución, el sistema formado por una ecuación de primer grado y una ecuación de segundo grado:

a) $x^2 + y^2 = 25$
$x + 2y = 10$

e) $x^2 + xy = 6$
$3x - y = 2$

b) $x + 2y = 4$
$y^2 - xy = 7$

f) $3x^2 + 2y^2 = 11$
$x - y = 1$

c) $3x - 7 + 2y = 0$
$3x^2 - y^2 + 4 = 0$

g) $x + 5y = 5$
$y^2 - x^2 = 1$

d) $x^2 - xy + y = 5$
$2x + y = 3$

h) $y^2 = 2x$
$2x - y = 1$

i) La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 11. La suma de los cuadrados de las dos cifras es 65. Hallar el o los números.

j) La suma de dos números es 9 y la suma de sus recíprocos es $\frac{1}{2}$. Hallar los números.

k) Un rectángulo tiene 40 m. de perímetro y 96 m^2 de área. Hallar sus dimensiones.

l) La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 34 cm., y su área es de 120 cm^2. Hallar la longitud de la hipotenusa.