SEGUNDO CASO: Un sistema formado por dos ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 1.-

(1)	$x^2 + y^2 = 8$	CIRCULO
(2)	$xy = 4$	HIPERBOLA EQUILATERA

De la ecuación (2), despejamos a x :

$$x = \frac{4}{y}$$

Ahora, sustituímos el valor de x en la ecuación (1) y efectuamos operaciones:

$$x^2 + y^2 = 8$$

$$\left(\frac{4}{y}\right)^2 + y^2 = 8$$

$$\frac{16}{y^2} + \frac{y^2}{1} = 8$$

$$\frac{16 + y^4}{y^2} = 8$$

$$16 + y^4 = 8y^2$$

$$y^4 - 8y^2 + 16 = 0$$

$$(y^2 - 4)(y^2 - 4) = 0$$

$$y^2 - 4 = 0$$

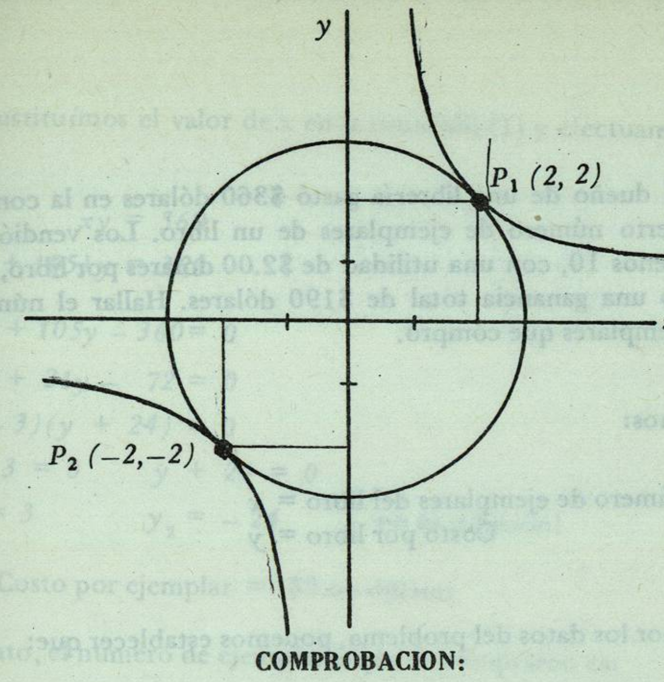
$$y^2 = 4$$

$$y_1 = +2; \quad x = \frac{4}{y} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = \pm 2$$

$$y_2 = -2; \quad x = \frac{4}{y} = \frac{4}{-2} = -2$$

C. S. $\{(2, 2), (-2, -2)\}$ que son las coordenadas de los puntos donde se intersectan las gráficas.



COMPROBACION:

	$x^2 + y^2 = 8$	$xy = 4$
	$(2)^2 + (2)^2 = 8$	$(2)(2) = 4$
P_1 (2, 2)	$4 + 4 = 8$	$4 = 4$
	$8 = 8$	
	$(-2)^2 + (-2)^2 = 8$	$(-2)(-2) = 4$
P_2 (−2, −2)	$4 + 4 = 8$	$4 = 4$
	$8 = 8$	

Ejemplo 2.-

El dueño de una librería gastó $360 dólares en la compra de cierto número de ejemplares de un libro. Los vendió todos, menos 10, con una utilidad de $2.00 dólares por libro, teniendo una ganancia total de $190 dólares. Hallar el número de ejemplares que compró.

Consideremos:

Número de ejemplares del libro = x
Costo por libro = y

Entonces, por los datos del problema, podemos establecer que:

(1) $xy = 360$

(2) $(x - 10)(y + 2) = 360 + 190$

Efectuemos las operaciones indicadas en la ecuación (2):

$$xy + 2x - 10y - 20 = 550$$

$$360 + 2x - 10y - 570 = 0$$ substituyendo a xy por su valor.

$$\left(\frac{1}{2}\right) \quad 2x - 10y - 210 = 0$$

$$x - 5y - 105 = 0$$

$$x = 5y + 105$$

Ahora, sustituímos el valor de x en la ecuación (1) y efectuamos operaciones:

$$xy = 360$$

$$(5y + 105)y = 360$$

$$\left(\frac{1}{5}\right) \quad 5y^2 + 105y - 360 = 0$$

$$y^2 + 21y - 72 = 0$$

$$(y - 3)(y + 24) = 0$$

$$y - 3 = 0 \qquad y + 24 = 0$$

$$y_1 = 3 \qquad y_2 = -24$$ no es solución!

Costo por ejemplar = $3.oo dólares

Por lo tanto, el número de ejemplares que se compraron es:

$$xy = 360$$

$$x = \frac{360}{y} = \frac{360}{3} = 120$$ ejemplares

COMPROBACION

Número de libros vendidos = 120 – 10 = 110

Precio de venta = Costo + Utilidad = 3 + 2 = $ 5 dólares

Importe total de la venta = Costo + ganancia total

= 360 + 190 = 550

(110) (5) = 550
550 = 550

C. S. {Se compraron 120 ejemplares del libro}

EJERCICIO III - 2

Resolver, por sustitución, el sistema formado por dos ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + y^2 = 40$
$xy = 12$

b) $x^2 + 4y^2 = 16$
$xy = 4$

c) $x^2 + 4y^2 = 25$
$xy = 6$

d) $y^2 = 2x - 8$
$x^2 + y^2 = 16$

e) $x^2 + y = 11$
$x^2 - x - 2y = 2$

f) $\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = 4$
$xy = 16$

g) Un comerciante compró una cantidad de sombreros en \$100.00 dólares. Si cada sombrero hubiera costado \$ 1.00 menos, habría comprado 5 sombreros más con el mismo dinero. Encontrar el número de sombreros que compró.

h) El Sr. Gómez compró algunas acciones en \$1,875.00 dólares. Las vendió todas menos 15 por \$1,740.00, ganando \$4.00 dólares por acción. ¿Cuántas acciones compró?

2. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS POR SUMAS O RESTAS.

Consideremos un sistema en que ambas ecuaciones son de la forma:

$$ax^2 + by^2 = c$$

el método para resolverlo, consiste en eliminar una de las variables por suma o resta.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

(1) $4x^2 + y^2 = 13$

(2) $x^2 + y^2 = 10$

Multiplicamos por (– 1) la ecuación (2) y sumamos ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 4x^2 + y^2 = 13 \\ -x^2 - y^2 = -10 \\ \hline 3x^2 = 3 \end{array}$$

$$x^2 = 1$$

$$\sqrt[2]{x^2} = \sqrt[2]{1}$$

$$x = \pm 1$$

Sustituímos el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales:

$$x^2 + y^2 = 10$$

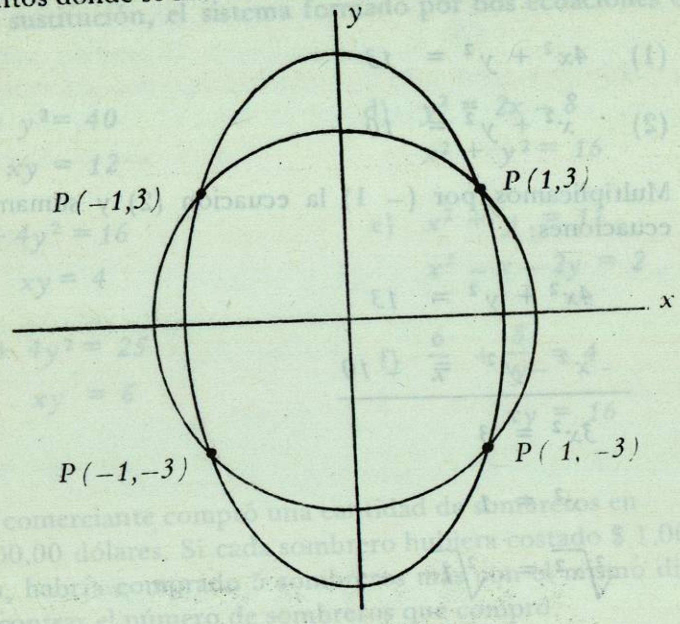
$$y^2 = 10 - x^2$$

$$y^2 = 10 - 1$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3$$

C. S. $\{ (1, 3), (-1, 3), (-1, -3), (1, -3) \}$ que son las coordenadas de los puntos donde se intersectan las gráficas.



COMPROBACION

$x = \pm 1$	$y = \pm 3$
$4x^2 + y^2 = 13$	$x^2 + y^2 = 10$
$4(\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 = 13$	$(\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 = 10$
$4 + 9 = 13$	$1 + 9 = 10$
$13 = 13$	$10 = 10$

EJERCICIO III - 3

Resolver los sistemas de ecuaciones cuadráticas por el método de sumas o restas:

a) $2x^2 - 3y^2 = 6$
$3x^2 + 2y^2 = 35$

b) $x^2 + y^2 = 10$
$9x^2 + y^2 = 18$

c) $5x^2 - 3y^2 = -11$
$7x^2 - 5y^2 = -13$

d) $4x^2 + 5y^2 = 21$
$3x^2 + 4y^2 = 16$

e) $2x^2 - y^2 = 5$
$3x^2 + 4y^2 = 57$

f) $x^2 + y^2 = 45$
$x^2 - y^2 = 27$

g) $2x^2 + 3y^2 = 35$
$4x^2 - y^2 = 7$

h) $16x^2 - 3y^2 = 1$
$4x^2 + 5y^2 = 6$

i) $3x^2 - y^2 = 7$
$2x^2 + 3y^2 = 23$

j) $4x^2 - 3y^2 = -2$
$3x^2 + 4y^2 = 11$

3. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS: POR ELIMINACION DEL TERMINO CONSTANTE.

Consideremos un sistema de dos ecuaciones, sin términos lineales y con término xy, de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

donde a, b, c, d pueden ser cero.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

(1) $x^2 + 6xy = 28$

(2) $xy + 8y^2 = 4$

Para eliminar el término constante, multiplicamos la ecuación (2) por -7:

$$\begin{aligned} x^2 + 6xy &= 28 \\ -7xy - 56y^2 &= -28 \\ \hline x^2 - xy - 56y^2 &= 0 \end{aligned}$$

, resolvemos para x :

$$(x-8y)(x+7y) = 0$$

$$x - 8y = 0 \qquad x + 7y = 0$$

$$x_1 = 8y \qquad x_2 = -7y$$

Sustituímos los valores encontrados para x, en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} x^2 + 6xy &= 28 \\ (8y)^2 + 6(8y)y &= 28 \\ 64y^2 + 48y^2 &= 28 \\ 112y^2 &= 28 \\ y^2 &= \frac{28}{112} \\ y^2 &= \frac{1}{4} \\ \sqrt[2]{y^2} &= \sqrt[2]{\frac{1}{4}} \\ y &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$y_1 = +\frac{1}{2}, \qquad x = 8y$$

$$x = 8\left(+\frac{1}{2}\right)$$

$$x_1 = 4$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}, \qquad x = 8\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x_2 = -4$$

$$\begin{aligned} x^2 + 6xy &= 28 \\ (-7y)^2 + 6(-7y)y &= 28 \\ 49y^2 - 42y^2 &= 28 \\ 7y^2 &= 28 \\ y^2 &= \frac{28}{7} \\ y^2 &= 4 \\ \sqrt[2]{y^2} &= \sqrt[2]{4} \\ y &= \pm 2 \end{aligned}$$

$$y_3 = +2, \qquad x = -7y$$

$$x = -7(+2)$$

$$x_3 = -14$$

$$y_4 = -2 \qquad x = -7(-2)$$

$$x_4 = 14$$

C. S. $\left\{ (4, \frac{1}{2}), (-4, -\frac{1}{2}), (-14, 2), (14, -2) \right\}$ que son las coordenadas de los puntos donde se intersectan las gráficas.

EJERCICIO III - 4

Resolver los sistemas de ecuaciones cuadráticas por eliminación del término constante:

a) $x^2 + 3xy = -5$
$y^2 - xy = 6$

b) $x^2 - 2xy - 2y^2 = 1$
$2x^2 + xy + y^2 = 2$

c) $3x^2 - 4xy = 4$
$x^2 - 2y^2 = 2$

d) $x^2 - xy = 12$
$xy - y^2 = 3$

e) $x^2 - xy + y^2 = 7$
$x^2 + y^2 = 10$

f) $2x^2 - xy = 6$
$x^2 - y^2 = 3$

g) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 15$
$2xy + y^2 = 0$

h) $x^2 + y^2 = 5$
$3xy + 4y^2 = 10$

i) El producto de los dígitos de un número de dos cifras excede al cuadrado de las unidades en 16. La suma de los cuadrados de los dígitos es 80. Hallar el número.

j) Hallar dos números cuya suma de sus cuadrados excede al doble producto de ellos en 4, y cuya diferencia de cuadrados es mayor que la mitad de su producto en 4.

RESUMEN

La ecuación cuadrática general en dos variables es de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

donde: a, b, c, d, e, f son constantes reales y al menos una de las constantes a, b, o c es diferente de cero.

Secciones Cónicas: Se obtienen al cortar un cono circular recto con un plano.

Ecuación del Círculo: $x^2 + y^2 = r^2$ de radio r y centro en el origen.

Ecuación de la Elipse: $ax^2 + by^2 = c$ con $a, b, c > 0$ y $a \neq b$

Ecuación de la Hipérbola: $ax^2 - by^2 = c$ con $a, b > 0$ y $c \neq 0$

Ecuación de la Hipérbola Equilátera: $xy = b$ con $b \neq 0$

Ecuación de la Parábola: $y = ax^2 + bx + c$, ó
$x = ay^2 + by + c$ donde: $a \neq 0$ y a, b, c, son constantes reales.

Un par de ecuaciones en que el mayor grado de la incógnita es dos, constituyen un Sistema de Ecuaciones Cuadráticas en dos variables.

El conjunto solución del sistema queda determinado por las coordenadas de los puntos de intersección de ambas gráficas. Cada uno de estos puntos son una solución del sistema, puesto que satisface a ambas ecuaciones simultáneamente.

AUTOEVALUACION

1. Resolver, por sustitución, el sistema formado por una ecuación de primer grado y una de segundo grado.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$$

2. Resolver, por sustitución, el sistema formado por dos ecuaciones cuadráticas.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ xy &= -12 \end{aligned}$$

3. Resolver el sistema de ecuaciones cuadráticas por el método de sumas o restas.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 16 \\ x^2 + y^2 &= 34 \end{aligned}$$

4. Resolver el siguiente problema, cuya solución implica un sistema de ecuaciones cuadráticas.

   "Cierto número de personas alquilan un camión en \$32,000.00. En el momento de la salida, faltan dos personas y por eso los demás tienen que pagar cada una \$800.00 más. ¿Cuántas personas había al contratar el camión?

5. Resolver el sistema de ecuaciones cuadráticas por eliminación del término constante.

$$\begin{aligned} x^2 + 3xy &= 28 \\ xy + 4y^2 &= 8 \end{aligned}$$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

1. C. S. $\{(0, -5), (4, 3)\}$

2. C. S. $\{(-3, 4), (4, -3)\}$

3. C. S. $\{(5, 3), (-5, 3), (5, -3), (-5, -3)\}$

4.- Había 10 personas

5. C. S. $\{(-14, 4), (14, -4), (4, 1), (-4, -1)\}$

1) *¿Qué hay de erróneo en lo que sigue?*
Para dividir 17 caballos entre tres personas, de modo que una de ellas reciba la mitad, otra la tercera parte y la última una novena parte, se sugirió la solución siguiente: Tomar prestado otro caballo, lo cual da un total de 18; darle la mitad a la primera persona, o sea, 9 caballos, a la segunda persona una tercera parte, o sea 6 caballos y una novena parte a la tercera, es decir, 2 caballos; lo cual constituye, 9+6+2 =17 caballos.
Ahora ya podemos devolverle el caballo restante a su dueño.

2) *Utilizando los dígitos que van del 1 al 9, una sola vez, llene los cuadros que siguen, hasta obtener una suma de 15, vertical, horizontal y diagonalmente.*

4

I.- Sucesiones y Series.

II.- Progresiones Aritméticas, y Geométricas.

III.- Teorema del Binomio.