1) *¿Qué hay de erróneo en lo que sigue?*
Para dividir 17 caballos entre tres personas, de modo que una de ellas reciba la mitad, otra la tercera parte y la última una novena parte, se sugirió la solución siguiente: Tomar prestado otro caballo, lo cual da un total de 18; darle la mitad a la primera persona, o sea, 9 caballos, a la segunda persona una tercera parte, o sea 6 caballos y una novena parte a la tercera, es decir, 2 caballos; lo cual constituye, 9+6+2 =17 caballos.
Ahora ya podemos devolverle el caballo restante a su dueño.

2) *Utilizando los dígitos que van del 1 al 9, una sola vez, llene los cuadros que siguen, hasta obtener una suma de 15, vertical, horizontal y diagonalmente.*

4

I.- Sucesiones y Series.

II.- Progresiones Aritméticas, y Geométricas.

III.- Teorema del Binomio.

CUARTA UNIDAD
SUCESIONES Y SERIES, PROGRESIONES Y TEOREMA DEL BINOMIO

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

I. SUCESIONES Y SERIES.

1. Aplicará, en ejercicios, en forma precisa los conceptos de sucesiones y series finitas e infinitas.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error en el tema:

I. SUCESIONES Y SERIES.

1.1 Definirá el concepto de sucesión.

1.2 Identificará los elementos de una sucesión.

1.3 Representará gráficamente las sucesiones dadas.

1.4 Determinará los elementos de una sucesión mediante una fórmula o regla específica dada.

1.5 Determinará los elementos de una sucesión, dada la fórmula que le rige y el primer elemento de la misma.

1.6 Definirá el concepto de serie.

1.7 Diferenciará entre sucesión y su serie correspondiente, ya sean finitas o infinitas.

1.8 Enunciará el significado del símbolo: $\sum_{n=1}^{K} a_n$

1.9 Determinará los elementos de una serie, expresando en notación sigma.

1.10 Determinará los elementos de sumatorias finitas e infinitas.

1.11 Representará cualquier término de una serie específica, mediante una expresión algebraica.

INTRODUCCION

Son llamadas sucesiones a conjuntos como los siguientes:

$$4, 8, 12, 16, 20, \ldots\ldots\ldots\ldots 4n \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ldots\ldots\ldots n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots\ldots\ldots\ldots 2n-1 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1, 10, 100, 1000, \ldots\ldots\ldots\ldots 10^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Son conjuntos de números ordenados que tienen una determinada ley de formación.

En esta unidad, estudiaremos con detalle, el concepto de sucesiones, su representación matemática y su formación.

Veremos también, el concepto de Serie, su significado, su representación Σ , y su relación con las sucesiones.

I. SUCESIONES Y SERIES.

A. Sucesiones.

Una sucesión es un conjunto de elementos dispuestos en un orden definido y que guardan una determinada ley de formación.

Cada elemento de la sucesión se llama **término.**

Si el número de términos es finito, la sucesión se denomina sucesión finita, y en caso contrario, sucesión infinita.

Como una sucesión es un conjunto de términos ordenados, a cada uno de ellos le corresponde el orden primero, segundo, tercero, etc., es decir, existe una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre el conjunto de los números naturales y los términos de la sucesión.

Se trata de un tipo especial de funciones, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$ o un subconjunto propio de él.

Consideremos la función $f(n) = n^2$, $n \in N$

$$\begin{array}{cccccc} n: & 1, & 2, & 3, & 4 & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ f(n): & 1, & 4, & 9, & 16 & \ldots \end{array}$$

Esto define una función cuyos elementos son los pares ordenados $[n, f(n)]$:

$$f(n) = \{n^2\} = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16) \ldots (n, n^2) \;\ldots\}$$

El dominio de la función es: $\{1, 2, 3, 4 \ldots\}$

El rango de la función es: $\{1, 4, 9, 16 \ldots\}$ que constituyen los términos de la sucesión.

Una sucesión puede escribirse enumerando solamente los elementos del rango en el orden de los números naturales con los cuales se asocian.

La sucesión, entonces, se denota por:

$$\{a_n\} = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)\ldots\}$$

o indistintamente por:

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots\}$$

donde a_1 se llama primer término de la sucesión; a_2, segundo término, y en general, para cualquier número natural n, a_n es el término n-ésimo de la sucesión. Se les pone el subíndice a los términos para indicar el lugar que ocupa en la sucesión.

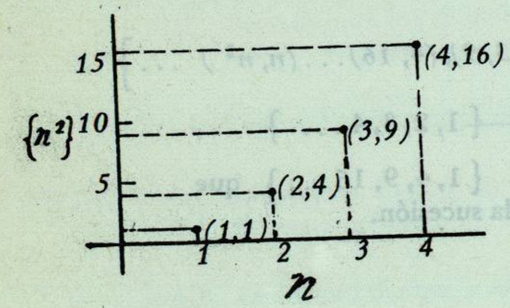
Una sucesión $\{a_n\}$ es una función que asocia a cada entero positivo n, un número a_n.

---

entonces:

$\{a_n\} = \{n^2\} = 1, 4, 9, 16, \ldots n^2, \ldots$ se llama **la sucesión de los cuadrados de los números enteros.**

Las sucesiones pueden representarse gráficamente en un sistema coordenado rectangular, por ejemplo, la gráfica de la sucesión anterior es:



La gráfica de la sucesión la forman un conjunto de puntos aislados.

GRAFICA DE LA SUCESION $\{n^2\} = 1, 4, 9, 16, \ldots n^2, \ldots$

Podemos calcular cualesquier término de una sucesión sustituyendo adecuadamente en la expresión para el n-ésimo término del número natural que se asocia con el orden que ocupa dicho término.

Así, si queremos expresar el 12o. término de esta sucesión, sustituímos $n = 12$ en la fórmula $a_n = n^2$, lo cual nos da:

$$a_{12} = (12)^2 = 144.$$

Luego 144 es el término décimo-segundo de la sucesión.

Otro método para determinar una sucesión es dar el primer término y una fórmula llamada "fórmula de inducción o de recurrencia" o también regla de formación.

Ejemplo:

$a_n = 3a_{n-1} + 2$ y $a_1 = 3$, tenemos entonces:

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3(3) + 2 = 11$$
$$a_3 = 3(11) + 2 = 35$$
$$a_4 = 3(35) + 2 = 107$$, por lo tanto:

$$a_n = 3, 11, 35, 107, \ldots, 3a_{n-1} + 2, \ldots \quad n \in N$$

B. Series.

Una serie es la suma indicada de los términos de una sucesión.

No debemos confundir una serie con su suma.

Al igual que las sucesiones, las series pueden ser finitas o infinitas, según el número de términos.

Usamos la letra griega Σ (sigma), que corresponde a la inicial de la palabra sumatoria para representar una serie ya sea finita o infinita, seguida de una fórmula para el n-ésimo término e indicamos cuales términos se han de sumar, poniendo numerales arriba y abajo de la sigma mayúscula.

Una serie, entonces, se denota por:

$$\sum_{n=1}^{K} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_K \qquad \text{serie finita}$$

o bien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad \text{serie infinita}$$

EJEMPLO 1. Expresar la sumatoria de los términos correspondientes a los recíprocos de n, $1 \leqslant n \leqslant 4$:

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \qquad \text{serie finita}$$

"sumatoria desde $n = 1$ hasta 4 de $\frac{1}{n}$".

EJEMPLO 2. Expresar la sumatoria de todos los números pares de dos cifras:

$$\sum_{n=5}^{49} 2n = 10 + 12 + 14 + \ldots + 98 \qquad \text{serie finita}$$

EJEMPLO 3. Expresar la sumatoria de los primeros cuatro términos correspondientes a la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{1+1}{1}\right) + \left(\frac{2+1}{2}\right) + \left(\frac{3+1}{3}\right) + \left(\frac{4+1}{4}\right) + \ldots$$

$$= 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \ldots$$

serie infinita

EJERCICIO IV - 1

1. Escribir los primeros cuatro términos de las sucesiones, cuando el n-ésimo término para cada caso es el que se indica, y $n \in$ N:

a) $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$ e) $\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$

b) $\left\{ \frac{2n-1}{n^2} \right\}$ f) $\left\{ \frac{1}{2n} \right\}$

c) $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ g) $\left\{ \frac{2^n}{n^2+1} \right\}$

d) $\left\{ 2^n \right\}$ h) $\left\{ n^3 \right\}$

2. Graficar las sucesiones, $n \in$ N:

a) $\left\{ 2n - 1 \right\}$ c) $\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$

b) $\left\{ 2^n \right\}$ d) $\left\{ 2n \right\}$

3.- **Escribir los primeros cuatro términos de las sucesiones, dados el primer término y la fórmula de inducción:**

a) $a_n = a_{n-1} + 2 , \quad a_1 = 1$

b) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2} , \quad a_1 = 5$

c) $a_n = 2a_{n-1} + 4, \quad a_1 = 3$

d) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n} , \quad a_1 = -3$

4.- **Expresar la sumatoria de todos los términos de las siguientes series finitas:**

a) $\sum_{k=1}^{5} (k+2) =$

b) $\sum_{k=2}^{5} 3^k =$

c) $\sum_{k=2}^{5} k^3 =$

d) $\sum_{x=1}^{5} \dfrac{1}{x^2} =$

e) $\sum_{k=0}^{4} \dfrac{1}{k^2+2} =$

f) $\sum_{x=0}^{5} (x+1)^2 =$

5.- **Expresar la sumatoria de los primeros cuatro términos de las siguientes series infinitas:**

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) =$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} =$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2}{2} =$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k(k-1)}{2} =$

6. **Encontrar una expresión para el n-ésimo término (regla de formación) de las siguientes series y expresar en notación sigma:**

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 100^2$

b) $1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + \ldots + 100^{101}$

c) **La sumatoria de todos los múltiplos de 3 entre 70 y 170.**

d) **La sumatoria de todos los números pares de tres cifras.**

e) **La sumatoria de los cuadrados de los recíprocos de los números naturales menores de 10.**

7. Encontrar una expresión para el n-ésimo término (regla de formación) de las siguientes series y calcular el valor del término que se solicita.

a) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{25} + \ldots + a_n + \ldots ,$ *7o. término*

b) $1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + a_n + \ldots ,$ *10o. término*

c) $2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + a_n + \ldots ,$ *8o. término*

d) $1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{1000} + \ldots + a_n + \ldots ,$ *9o. término*

e) $(-3) + (-6) + (-9) + (-12) + \ldots + a_n + \ldots ,$ *11o. término*

f) $1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{5^3} + \ldots + a_n + \ldots ,$ *10o. término*

g) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + \ldots + a_n + \ldots ,$ *13o. término*

h) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + a_n + \ldots ,$ *10o. término*

i) $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + a_n + \ldots,$ *8o. término*

j) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + a_n + \ldots,$ *9o. término*

k) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + a_n + \ldots,$ *15o. término*

l) $1 + 8 + 27 + 64 + \ldots + a_n + \ldots,$ *5o. término*

PASATIEMPO MATEMATICO

1) Un reloj tarda cinco segundos en dar seis campanadas. ¿Cuánto tardará en dar doce? !No!. La contestación no es 10 segundos

2) Una botella y su tapón cuestan \$110.00. La botella cuesta \$100.00 más que el tapón. ¿Cuánto cuesta la botella? ¡No! La respuesta no es \$100.00

RESPUESTAS

1) Las campanadas en sí no ocupan un tiempo apreciable; los 5 segundos corresponden a los 5 intervalos entre las 6 campanadas. Entre 12 campanadas hay 11 intervalos. Por lo tanto la respuesta correcta es 11 segundos.

2) Si la botella costara \$100.00 y el tapón \$10.00, la botella costaría solamente \$90.00 más que el tapón.

costo tapón \$ 5.00

costo botella 105.00

CUARTA UNIDAD
SUCESIONES Y SERIES, PROGRESIONES Y TEOREMA DEL BINOMIO

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

II. PROGRESIONES.

2. Aplicará los conceptos de progresión, en problemas.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error, en el tema:

II. PROGRESIONES.

2.1 Definirá progresiones aritméticas.

2.2 Calculará los componentes de una progresión aritmética.

2.3 Utilizará las fórmulas de las progresiones aritméticas, para la solución de ejercicios y problemas sencillos.

2.4 Definirá progresiones geométricas.

2.5 Calculará los componentes de una progresión geométrica.

2.6 Utilizará las fórmulas de las progresiones geométricas, para la solución de ejercicios y problemas sencillos.

II. PROGRESIONES.

Las progresiones aritméticas suceden en los problemas relacionados a la producción de alimentos, en el análisis del movimiento de un cuerpo en caída libre que inicialmente se encontraba en reposo y en general, en "todo aquello en que la variación es constante y uniforme".

A. Progresión Aritmética.

Es una sucesión en la cual la diferencia que se obtiene al restar cualquier término del inmediato anterior es siempre la misma.

Esta diferencia es llamada la diferencia común de la progresión y se designa por la letra d.

Por tanto:

La sucesión $\{a_n\}$, en la que $a_n - a_{n-1} = d$ para $n > 1$ es llamada sucesión aritmética o progresión aritmética.

Ejemplo:

La sucesión 2, 5, 8, 11, 14, . . . es una progresión aritmética cuya diferencia común es 3.

Podemos formar una progresión airtmética agregando la diferencia común al término inmediato anterior al que queremos encontrar.

Esto es:

$a_1 =$ Primer término de la progresión aritmética.

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$

$a_4 = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$, etc.

entonces, el n-ésimo término será:

$$\underbrace{a_1}_{1o.},\ \underbrace{a_1 + d}_{2o.},\ \underbrace{a_1 + 2d}_{3o.},\ \underbrace{a_1 + 3d}_{4o.},\ \ldots\ \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{n\text{-ésimo}},\ \ldots$$

Observemos que el coeficiente de d, en cada término es una unidad menor que el número de orden correspondiente al término.

Si a_n es el n-ésimo término, tenemos entonces la fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

donde:

a_1 = primer término de la progresión aritmética

d = diferencia común

n = número de términos

Podemos encontrar cualquier término deseado de una progresión airtmética, sustituyendo adecuadamente el entero positivo apropiado para n.

Ejemplo:

Hallar el término 23o. de la progresión aritmética 7, 13, 19, . . .

tenemos aquí que: $a_1 = 7$, $d = 6$, y $n = 23$

entonces:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{23} = 7 + (23-1)(6)$$

$$a_{23} = 7 + (22)(6)$$

$$a_{23} = 139$$

LA SUMA DE n TERMINOS.

Karl Friedrich Gaus (1777 - 1855), matemático, astrónomo y físico de origen alemán, siendo casi un niño, razonó así, ante la petición de su profesor, de obtener la suma de los primeros 100 enteros positivos, sin efectuar la suma:

$$1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + 98 + 99 + 100 = ?$$

Observó que cualquier pareja de términos que equidistan de los extremos de la serie, suman 101. Como son 100 números, habrá 50 parejas, por lo tanto hay 50 veces el sumando 101, o sea:

$$\text{Suma total} = 50 \times 101 = 5{,}050.$$

Veamos, ahora, la sustentación matemática del pensamiento de Gaus:

Sea S_n, la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética.

entonces:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

escribiendo la serie en orden inverso, tendremos:

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

sumando ambas expresiones, nos queda:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a$$

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

por tanto, la fórmula para la suma es:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

donde:

S_n	=	suma de n términos
n	=	número de términos
a_1	=	primer término
a_n	=	n-ésimo término

También podemos expresar la suma de n términos de esta otra manera:

sabemos que:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

sustituyendo este valor en la fórmula encontrada tendremos:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

MEDIOS ARITMETICOS.– Siempre es posible interpolar cualquier número de términos entre dos números dados, de tal modo que todo el conjunto forme una progresión aritmética.

Se llaman "medios aritméticos" los términos intermedios entre el primero y el último de una progresión aritmética.