Si queremos insertar un cierto número de medios aritméticos entre dos números dados, debemos calcular el valor $\underline{d}$, de la fórmula, y entonces los términos de la progresión pueden hallarse por la suma repetida de este valor.

Ejemplo: Insertar cuatro medios aritméticos entre 9 y 24.

Aquí tenemos: $a_1 = 9$, $a_n = 24$, $n = 6$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$24 = 9 + 5d$$
$$d = \frac{24-9}{5} = 3$$

entonces: $9, \underline{12}, \underline{15}, \underline{18}, \underline{21}, 24$

Cuando tres números forman una progresión aritmética, el término central se llama "medio aritmético" entre los otros dos; es lo que se conoce comúnmente como el promedio de esos dos números.

Así si a, m, b forman una progresión aritmética y el medio aritmético es m.

Y puesto que: $m - a = b - m$

tendremos: $m + m = a + b$

$$2m = a + b$$
$$m = \frac{a+b}{2}$$

Ejemplo:

Calcular el medio aritmético o promedio de 90 y 100:

$90, m, 100$

$$m = \frac{90+100}{2}$$
$$m = \frac{190}{2}$$
$$m = 95$$

de tal manera que se forma una progresión aritmética con:

90, 95, 100 donde la diferencia común es igual a 5.

A continuación veremos algunas aplicaciones de progresiones aritméticas:

EJEMPLO 1.—

Hallar el tiempo que se empleará en saldar una deuda de \$15,000.00, pagando \$1,000.00 el primer mes, \$1,250.00 el segundo, \$1,500.00 el tercero, etc.

tenemos la progresión aritmética:

1,000, 1,250, 1,500, . . .

entonces:

$a_1 = 1{,}000$

$d = 250$

$S_n = 15{,}000$

$n = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$
$$15{,}000 = \frac{n}{2}[2(1000) + (n-1)250]$$
$$30{,}000 = n(2{,}000 + 250n - 250)$$
$$30{,}000 = n(1{,}750 + 250n)$$
$$\left(\frac{1}{250}\right) 30{,}000 = 1750n + 250n^2$$
$$n^2 + 7n - 120 = 0$$
$$(n-8)(n+15) = 0$$
$$n - 8 = 0 \qquad n + 15 = 0$$
$$n_1 = 8 \qquad n_2 = -15$$

no es solución!

C. S. {Se saldará la deuda en 8 meses}

EJEMPLO 2.–

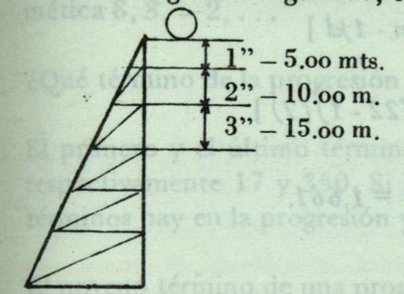
A un empleado le ofrecieron dos planes para el pago de sus honorarios: empezaría a ganar 12 millones anuales pagaderos por semestres, con aumentos de 1.5 millones anuales o si prefería le podían dar \$500,000.00 cada semestre de aumento. ¿Cuál plan cree usted que le conviene más a éste empleado?

	PLAN 1 \$1.5 millones de aumento anual	PLAN 2 \$500,000.00 de aumento semestral
1er. año	6.00 + 6.00 = 12.00	6.0 + 6.5 = 12.5
2o. año	6.75 + 6.75 = 13.50	7.0 + 7.5 = 14.5
3o. año	7.50 + 7.50 = 15.00	8.0 + 8.5 = 16.5
4o. año	8.25 + 8.25 = 16.50	9.0 + 9.5 = 18.5

La primera alternativa nos dice que el aumento anual de 1.5 millones luce más atractivo que tan sólo un aumento de \$500,000.00 por semestre, pero analizándolo detenidamente podemos darnos cuenta que la segunda alternativa ofrece un sueldo anual mayor en 0.5, 1.0, 1.5, y 2.0 millones por año respectivamente.

EJEMPLO 3.–

Un cuerpo que parte del reposo cae 5 metros el 1er. segundo, 10 metros el 2o. segundo, 15 metros el 3er. segundo. ¿Cuánto caerá en el octavo segundo? y ¿Cuánto en el vigésimo segundo?, ¿Cuál será el recorrido total?



$5, 10, 15, 20, \ldots$

$a_1 = 5$

$d = 5$

$a_8 = ?$

$a_{20} = ?$

$S_{20} = ?$

$a_8 = a_1 + (n-1)d \qquad a_{20} = a_1 + (n-1)d \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$a_8 = 5 + (8-1)(5) \qquad a_{20} = 5 + (20-1)(5) \qquad = \frac{20}{2}(5 + 100)$

$a_8 = 5 + 35 = 40m \qquad a_{20} = 5 + 95 = 100m \qquad S_{20} = 1{,}050\ m.$

EJEMPLO 4.–

El primer término de una P.A. es 34 y el último término es 10. Si la diferencia común es –2. Hallar elnúmero de términos y su suma.

$a_1 = 34 \qquad a_n = a_1 + (n-1)d \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$a_n = 10 \qquad 10 = 34 + (n-1)(-2) \qquad = \frac{13}{2}(34 + 10)$

$d = -2 \qquad 10 = 34 - 2_n + 2 \qquad S_n = \frac{13}{2}(44)$

$n = ? \qquad n = \frac{10 - 34 - 2}{-2} \qquad S_n = 286$

$S_n = ? \qquad n = 13$

EJEMPLO 5.—

Hallar la suma de los primeros 22 términos de una P.A. en la cual la diferencia común es 7 y el primer término es 2.

$a_1 = 2 \qquad S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$d = 7$

$n = 22 \qquad S_{22} = \frac{22}{2}[2(2) + (22-1)(7)]$

$S_{22} = 11(4 + 147) = 1{,}661.$

EJERCICIO IV - 2

1. Encuentre el valor de a_1, a_n, n, d y S_n que no estén dados, y escriba los términos de la progresión aritmética.

a)	$a_1 = 1,\ d = 2,\ n = 7$	f)	$a_n = 3,\ n = 8,\ S_n = 80$
b)	$a_1 = 9,\ d = -1,\ n = 6$	g)	$a_1 = -5,\ n = 7,\ S_n = 28$
c)	$a_1 = 22,\ a_n = 2,\ n = 5$	h)	$a_1 = 1,\ a_n = 51,\ d = 10$
d)	$a_1 = -17,\ a_n = 11,\ n = 6$	i)	$a_n = -8,\ a_1 = 10,\ S_n = 7$
e)	$a_n = 1,\ n = 6,\ d = -10$	j)	$a_n = 23,\ d = 3,\ S_n = 100$

2. Interpolar los medios aritméticos que se solicitan y calcular el valor de su suma:

   a) 8 m.a. entre 47 y 2

   b) 5 m.a. entre 8 y 26

   c) 4 m.a. entre 9 y 24.

   d) 2 m.a. entre -1 y 1

   e) 5 m.a. entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$

3. Hallar el término 28o. de la progresión aritmética $-10\frac{1}{2}$, -9, $-7\frac{1}{2}$, . . .

4. Hallar la suma de los primeros 22 términos de la progresión aritmética 8, 3, -2, . . .

5 ¿Qué término de la progresión 5, 14, 23, . . . es 239?

6. El primero y el último término de una progresión aritmética son respectivamente 17 y 350. Si la diferencia común es 9, ¿cuántos términos hay en la progresión y cuál es su suma?

7. El noveno término de una progresión aritmética es $\frac{1}{6}$; el término 16o. es $2\frac{1}{2}$. Hallar el primer término.

8. Hallar cuántos enteros consecutivos a partir de 10 se deben tomar para que su suma valga 2,035.

9. ¿Cuántos términos de la progresión aritmética 24, 22, 20, . . . se necesitan para que su suma sea 150? Escriba los términos.

10. Hallar la suma de todos los números naturales pares de dos cifras.

11. Hallar la suma de los enteros pares entre 21 y 81.

12. Hallar la suma de todos los números naturales impares de dos cifras.

13. Hallar la suma de los enteros impares entre 2 y 50.

14. Hallar la suma de los enteros divisibles por 3 y que son mayores que 2 y menores que 100.

15. Hallar la suma de todos los enteros comprendidos entre 100 y 800 que sean múltiplos de 3.

16. Hallar la suma de los enteros divisibles por 5 que están entre 50 y 200.

17. ¿Cuántos múltiplos de 11 tienen 3 cifras?

18. Hallar cuántos números divisibles por 6 hay entre 0 y 200.

19. Hallar la suma de todos los enteros de dos dígitos múltiplos de 9

20. Hallar la suma de todos los enteros positivos menores que 400 que sean múltiplos de 9.

B. Progresión Geométrica.

Las progresiones geométricas suceden en los problemas relacionados con el crecimiento de la población, con la desintegración radioactiva y también en problemas de interés (%) compuesto devengado sobre dinero.

Progresión Geométrica.

Es una sucesión en la cual el cociente que se obtiene al dividir cualquier término por su inmediato anterior es siempre el mismo.

Este cociente es llamado **la razón de la progresión** y se designa por la letra r.

Por tanto:

La sucesión $\{a_n\}$, en la que $a_n = r\, a_{n-1}$ para toda $n > 1$ es llamada sucesión geométrica o progresión geométrica.

Ejemplo: La sucesión 5, 10, 20, 40, 80, . . . es una progresión geométrica cuya razón es 2.

Podemos formar una progresión geométrica multiplicando por la razón el término inmediato anterior al que queremos encontrar.

Esto es:

a_1 = **1er. término de la progresión geométrica.**

$a_2 = a_1 r$

$a_3 = (a_1 r)r = a_1 r^2$

$a_4 = (a_1 r^2)r = a_1 r^3$, **etc. etc.**

entonces, el n-ésimo término será:

$\underbrace{a_1}_{1o.}, \quad \underbrace{a_1 r}_{2o.}, \quad \underbrace{a_1 r^2}_{3o.}, \quad \underbrace{a_1 r^3}_{4o.}, \quad \ldots \underbrace{a_1 r^{n-1}}_{n\text{-ésimo}}$

Observemos que el exponente de r, en cada término es una unidad menor que el número de orden correspondiente al término.

Si a_n es el n-ésimo término, tenemos entonces la fórmula:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

donde:

a_1 = **1er. término de la progresión geométrica.**

r = **razón**

n = **número de términos.**

Podemos encontrar cualquier término deseado de una progresión geométrica, sustituyendo adecuadamente el entero positivo apropiado para n.

Ejemplo: Hallar el 6o. término de la progresión geométrica: 2, –6, 18, . . .

tenemos aquí que: $a_1 = 2$, $r = -3$ y $n = 6$

entonces:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$a_6 = 2(-3)^5$$
$$a_6 = 2(-243) = -486$$

LA SUMA DE n TERMINOS.

Sea S_n, la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica:

entonces:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}$$

multiplicando ambos miembros por r, tenemos:

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

restando ambas igualdades, resulta:

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$
$$S_n(1-r) = a_1(1 - r^n)$$

por lo tanto, la fórmula para la suma es:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

También podemos expresar la suma de n términos de esta otra manera:

Sabemos que:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$r a_n = a_1 r^n$$

sustituyendo este valor en la fórmula anterior, tenemos:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} = \frac{a_1 - r a_n}{1-r}$$

donde:

S_n = **Suma de n términos**
a_1 = **1er término de la progresión geométrica**
r = **razón**
a_n = **n-ésimo término**
n = **número de términos**

MEDIOS GEOMETRICOS.

Siempre es posible interpolar cualquier número de términos entre dos números dados, de tal modo que todo el conjunto forme una progresión geométrica.

Se llaman "medios geométricos" los términos intermedios entre el primero y el último de una progresión geométrica.

Si queremos insertar un cierto número de medios geométricos entre dos números dados, debemos calcular el valor de la razón, r, de las fórmulas y entonces los términos de la progresión pueden hallarse por la multiplicación repetida de este valor.

Ejemplo: Insertar cuatro medios geométricos entre 1 y 32:

Aquí tenemos: $a_1 = 1$, $a_n = 32$ y $n = 6$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$32 = 1(r)^5$$
$$2^5 = r^5$$
$$r = 5$$

entonces:

$$\underline{1},\ \underline{2},\ \underline{4},\ \underline{8},\ \underline{16},\ 32$$

Cuando tres números forman una progresión geométrica, el término central se llama "medio geométrico" entre los otros dos, también se conoce como "media proporcional" de esos dos números.

Así si a, G, b forman una progresión geométrica, el medio geométrico es G.

Y puesto que: $\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$

tendremos: $G^2 = ab$

$$G = \pm \sqrt[2]{ab}$$

Ejemplo: Calcular la media proporcional de 4 y 1:

$$4, G, 1 \qquad G = \sqrt[2]{(4)(1)}$$
$$G = \sqrt[2]{4}$$
$$G = 2$$

de tal manera que se forma una progresión geométrica con:

4, 2, 1 donde la razón es igual a $\frac{1}{2}$

A continuación veremos algunas aplicaciones de progresiones geométricas.

EJEMPLO 1.–

La población de una ciudad crece a razón del 10% anual. Si la población actual es de 1 millón de habitantes. Hallar la población esperada dentro de 10 años.

Población actual = 1'000,000 = 10^6 habitantes

Población al final del primer año $= 10^6 + 10\% \ (10^6)$
$= 10^6 + 0.1\ (10^6)$
$= 10^6\ (1 + 0.1)$
$= 1.1\ (10^6)$

$a_1 = 1.1\ (10^6)$
$r = 1.1$
$a_{10} = ?$
$n = 10$

$$a_{10} = a_1 r^{n-1}$$
$$a_{10} = 1.1\,(10^6)(1.1)^9$$
$$a_{10} = (10^6)(1.1)^{10}$$
$$a_{10} = 2'593{,}742 \text{ habit.}$$

EJEMPLO 2.–

Una persona se propone ahorrar 1 centavo el primer día del mes, 2 centavos el segundo día, cuatro centavos el tercer día, ocho centavos el cuarto día y así sucesivamente, cada día ahorrando el doble que el día anterior. ¿Cuánto habrá ahorrado al final de los 31 días del mes?

$a_1 = 0.01$
$r = 2$
$n = 31$
$a_n = ?$
$s_n = ?$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$a_{31} = (0.01)(2)^{30}$$
$$a_{31} = \$10'737{,}418.00$$

$$S_{31} = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r}$$

$$S_{31} = \frac{0.01 - 2(10'737,418)}{1-2}$$

$$S_{31} = \$\ 21'474,835.99$$

EJEMPLO 3.—

Supongamos que tenemos una hoja de papel muy fino, de una milésima de centímetro de espesor, lo cual equivale a decir que un montón de mil hojas de esas tendría una altura de 1 cm. Rompemos por la mitad esa hoja de papel y ponemos los dos trozos uno encima del otro; volvemos a partirlas por la mitad y colocamos los cuatro pedazos uno encima del otro; los volvemos a partir por la mitad y a colocar los trozos en montón, y así sucesivamente hasta 50 veces. ¿Cuál será la altura del montón que nos resulte?

1er corte = 2^1 milésimas de cm.
2o corte = 2^2 milésimas de cm.
3o corte = 2^3 milésimas de cm.

.

.

50o corte = 2^{50} milésimas de cm.

$$a_1 = 2 \qquad a_{50} = a_1 r^{n-1}$$
$$r = 2 \qquad a_{50} = 2(2)^{49}$$
$$n = 50 \qquad a_{50} = 2^{50}$$
$$a_{50} = ?$$

$$2^{50} = (2^{10})^5$$
$$= (1.024 \times 10^3)^5$$
$$= 1.1258998 \times 10^{15}$$

1 km = 1000 mt $\quad = 1.125\,899\,800\,000\,000$ *milésimas cm.*
1 km = 1000 (100) cm $\quad = 1\,125\,899\,800\,000$ *cms.*
1 km = 10^5 cm. $\quad = 11'258,998$ *kms.*

EJEMPLO 4.—

Cada una de las personas que viven hoy día, tuvo 2 padres, 4 abuelos, 8 bisabuelos, etc. Tiene dos antepasados de una generación antes; 4 o sea, 2^2 de hace dos generaciones; 8 o sea, 2^3 de hace 3 generaciones; 16 o sea, 2^4 antepasados de hace cuatro generaciones, y así sucesivamente. En general tendrá 2^n antepasados de hace n generaciones. Supongamos que cada generación viva 30 años.

Según ésto todos tenemos 2^{20} = 1'048,576 antepasados de hace 20 generaciones, es decir de hace 600 años.
Entonces, ¿podríamos concluir que hace 600 años había en la Tierra más de un millón de veces los habitantes de hoy en día? ¿Qué opina usted?

EJERCICIO IV - 3

1. Encuentre el valor de a_1, a_n, n, r y S_n que no estén dados, y escriba los términos de la progresión geométrica.

a) $a_1 = 2,\ n = 5,\ r = 2$
b) $a_1 = 1,\ n = 5,\ r = 4$
c) $a_1 = 1,\ r = -2,\ a_n = 64$
d) $a_1 = \frac{1}{2},\ r = -2,\ a_n = 32$
e) $a_1 = 243,\ n = 5,\ a_n = 3$
f) $n = 9,\ r = \frac{1}{2},\ a_n = 1$
g) $a_1 = 2,\ a_n = 32,\ S_n = 62$
h) $a_n = 64,\ r = -2,\ S_n = 43$
i) $a_1 = \frac{1}{2},\ r = -2,\ S_n = -170.5$
j) $a_n = \frac{1}{5},\ r = \frac{1}{5},\ n = 7$

2. Interpolar los medios geométricos que se solicitan y calcular el valor de su suma.

a) 3 m.g. entre 2 y 162

b) 6 m.g. entre 128 y 1

c) 4 m.g. entre $-\frac{1}{4}$ y 8

d) 4 m.g. entre $\frac{8}{9}$ y $\frac{27}{4}$

e) 5 m.g. entre 9 y 576

3. Hallar la suma de cada una de las siguientes series geométricas:

a) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 256$

b) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^7$

4. ¿Cuántos términos hay en la serie?

$$64 + 32 + 16 + \ldots + \frac{1}{64}$$

5. Hallar el valor de x en la serie.

$$2 + 2^2 + 2^2 + \ldots + 2^x = 510$$

6. Si los socios de una organización que tiene actualmente 320 miembros aumentan el número a razón del 50 % cada año ¿Cuántos socios habrá dentro de 5 años?
(Suponiendo que no muere ni se retira ningún socio).

7. La diferencia entre dos números es 48. Si su media aritmética excede a la media geométrica en 18, hallar los números.

8. El sexto y décimo término de una P.G. son respectivamente 20 y 320 Hallar el segundo término.

CUARTA UNIDAD
SUCESIONES Y SERIES, PROGRESIONES Y TEOREMA DEL BINOMIO.

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

III. TEOREMA DEL BINOMIO.

3. Aplicará la fórmula general del binomio, para desarrollar expresiones de la forma $(a \pm b)^n$, siendo n elemento del conjunto de los números naturales.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, en su cuaderno y sin error al terminar la unidad, en el tema:

III. TEOREMA DEL BINOMIO.

3.1 Indicará la regla de la expresión binomial.

3.2 Expresará la fórmula general del binomio.

3.3 Desarrollará expresiones de la forma $(a \pm b)^n$, donde n pertenece al conjunto de los números naturales.

3.4 Calculará, sin efectuar su desarrollo, al r-ésimo término de cualquier binomio de la forma $(a \pm b)^n$, siendo n elemento del conjunto de los números naturales.

III. TEOREMA DEL BINOMIO.

Sir Isaac Newton (1642 - 1727). Físico, matemático y astrónomo inglés, estudioso de la época, en cuya memoria, se ha dado su nombre al Teorema del Binomio, por haber encontrado, entre otras muchas cosas, la forma de calcular el coeficiente de cualquier término en el desarrollo binomial.

Aquí estudiaremos "el cálculo de la potencia de un binomio $(a \pm b)^n$, cuando $n \in N$".

En cursos anteriores aprendiste a encontrar el cuadrado de un binomio, mediante una "regla de desarrollo". Es: El cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo, ¿Recuerdas?

Bien, pues ahora veremos que el binomio puede ser elevado, también a otras potencias mayores, e incluso menores.

Estudiaremos la regla de formación para obtener la llamada "expansión binomial", mediante el importante Teorema del Binomio.

Desarrollo de las potencias de un binomio.—

Para todo entero positivo n, $(a + b)^n$, es el producto de n factores iguales $(a + b)$, o sea:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ factores}}$$

Por tanto, por multiplicaciones sucesivas de $(a + b)$ obtenemos:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

En estos desarrollos se observa que:

1o. En cada desarrollo, el número de términos es igual al exponente del binomio más 1. (número de términos $= n + 1$)

2o. El primer término a, del binomio, comienza en el primer término del desarrollo con exponente igual al grado del binomio, disminuye luego sucesivamente en 1 en cada término que sigue, siendo así factor en todos los términos del desarrollo, excepto en el último.

3o. El segundo término b, del binomio, comienza en el segundo término del desarrollo con exponente uno; aumenta después sucesivamente en 1 en cada uno de los términos siguientes, resultando así factor en todos los términos, excepto en el primero.

4o. El grado de cada término es igual al grado del binomio, $\underline{n}$.

5o. El coeficiente del primer término es 1, y el del segundo es igual al exponente del binomio.

6o. El coeficiente de un término cualquiera es igual "al producto del coeficiente del término inmediato anterior, por el exponente de a en ese término, dividido entre el número que indica el orden de ese mismo término en el desarrollo binomial".

7o. Los términos que equidistan de los extremos, tienen coeficientes iguales.