EJEMPLO 1.—

Obtener el desarrollo binomial de $(2a+1)^6$.

número de término	$= n + 1 = 7$	observación No. 1
1er. término del desarrollo	$= (2a)^6$	observación 2 y 5
2o. término del desarrollo	$= 6(2a)^5\,(1)$	observación 2,3,4, y 5
3o. término del desarrollo	$= \frac{6 \times 5}{2}\,(2a)^4(1)^2$	observación 2,3,4,5 y 6

y así sucesivamente, tendremos entonces:

$$(2a+1)^6 = (2a)^6 + 6(2a)^5(1) + 15(2a)^4(1)^2 + 20(2a)^3(1)^3 + 15(2a)^2(1)^4 + 6(2a)(1)^5 + (1)^6$$

$$= 64a^6 + 192a^5 + 240a^4 + 160a^3 + 60a^2 + 12a + 1$$

EJEMPLO 2.—

Obtener el desarrollo binomial de:

$$(x-1)^5 = [x+(-1)]^5 = x^5 + 5(x)^4(-1) + 10(x)^3(-1)^2 + 10(x)^2(-1)^3 + 5(x)(-1)^4 + (-1)^5$$

$$= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

Obsérvese que cuando el binomio es substractivo, puede expresarse como una suma, considerando negativo el segundo término. Los signos de los términos del desarrollo binomial + y − se van alternando.

Otra manera de calcular los coeficientes.—

El Triángulo de Pascal.— Blaise Pascal (1623 - 1662). Pensador, matemático y científico francés, estudioso también de este teorema, escribió El Traité du triangle arithmetique, donde muestra la importancia del triángulo en el cálculo de los coeficientes de las potencias de un binomio.

Observemos el siguiente arreglo triangular:

1	$= (x+y)^0$	= 1
1 1	$= (x+y)^1$	= 1 1
1 2 1	$= (x+y)^2$	= 1 2 1
1 3 3 1	$= (x+y)^3$	= 1 3 3 1
1 4 6 4 1	$= (x+y)^4$	= 1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1	$= (x+y)^5$	= 1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1	$= (x+y)^6$	= 1 6 15 20 15 6 1

TRIANGULO ISOSCELES, UN TERMINO CUALQUIERA (EXCEPTO EXTREMOS) ES LA SUMA DE LOS TERMINOS DEL RENGLON INMEDIATO ANTERIOR ENTRE LOS CUALES ESTA ESCRITO

TRIANGULO RECTANGULO, UN TERMINO CUALQUIERA (EXCEPTO EXTREMOS) ES LA SUMA DEL TERMINO SITUADO INMEDIATAMENTE ARRIBA Y EL QUE PRECEDE A ESTE.

Sin embargo, el método de Pascal, requiere de la elaboración previa de este arreglo numérico para consultar los coeficientes del desarrollo binomial de que se trate.

Es poco práctico, comparado con el método propuesto por Newton. (observación No. 6).

EJERCICIO IV - 4

Obtener el desarrollo binomial y simplificar.

a) $(a+b)^7 =$

b) $(2a-b)^5 =$

c) $(x - \frac{2}{y})^4 =$

d) $(x - \frac{1}{2})^5 =$

e) $(\frac{x}{3} - \frac{y}{2})^4 =$

f) $(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})^6 =$

g) $(a + \frac{1}{a^2})^6 =$ n) $(x^{-2} - y^2)^5 =$

h) $(x - \frac{1}{x})^5 =$ o) $(x^{1/2} + y)^6 =$

i) $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2})^6 =$ p) $(x - y^{1/2})^6 =$

j) $(\frac{x}{2} + \frac{2}{x})^5 =$ q) $(2x - y^{-2})^6 =$

k) $(2x - \frac{y}{2})^6 =$ r) $(\sqrt{x^3} - 1)^4 =$

l) $(x^2 - \frac{3}{x})^4 =$ s) $(1 - \sqrt{x})^4 =$

m) $(2x - \frac{1}{3x})^4 =$ t) $(a + \frac{b}{2})^{10} =$

LA FORMULA GENERAL DEL BINOMIO.–

Consideremos el binomio $(a + b)^n$, $n \in N$:

1er. término $= a^n$

2o. término $= na^{n-1} b$

3o. término $= \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2$

4o. término $= \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-3} b^3$

5o. término $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4$

FACTORIAL n: Con este nombre se conoce la forma abreviada de escribir los factores sucesivos de números positivos y se representa por *n!*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots . n$$

o bien

$$n! = n \cdot (n-1)(n-2) \ldots . 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por definición: $0! = 1$

$$(r-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1)$$

Ejemplos:

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \cdot 3!$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times (2 \times 1) = 3 \cdot 2!$

$2! = 2 \times 1 = 2 \times (1) = 2 \cdot 1!$

$1! = 1 = 1 \times 0!$

$0! = 1$

Considerando esta simplificación, la fórmula general del binomio es:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} a^{n-4} b^4 + \ldots + b^n$$

El Teorema del Binomio $(a+b)^n$, también es válido para valores negativos y fraccionarios de n, convirtiéndose en estos casos en una serie infinita.

El r-ésimo término de la Fórmula del Binomio:

Puede obtenerse una regla fácil para calcular, sin desarrollar, el término de orden r en la expansión binomial.

Observemos en el Teorema del Binomio, un término cualesquiera, el quinto $(r=5)$, por ejemplo, notaremos que:

El numerador del coeficiente: Se forma con la multiplicación sucesiva de $n(n-1)(n-2)(n-3)$ y cuenta con 4 factores, es decir, $(r-1)$ factores.

El denominador del coeficiente: Es $(r-1)!$, o bien $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

El exponente de a: Es $n-4$ o bien $n-(r-1)$.

El exponente de b: Es 4 o bien $(r-1)$

El grado del término: Es n

Por lo tanto:

$$\text{r-ésimo término} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\text{ hasta }(r-1)\text{ factores}}{(r-1)!}\, a^{n-(r-1)}\, b^{r-1}$$

Obsérvese que el coeficiente numérico, tiene el mismo número de factores $(r-1)$ tanto en el numerador como en el denominador.

EJEMPLO 1.–

Encuentre el 6o. término de $(a+\frac{1}{a})^8$

$n = 8$
$r = 6$
$r-1 = 5$

$$\text{6o. término} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4}}{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{4} \times \cancel{5}}(a)^{8-5}\left(\frac{1}{a}\right)^5$$

$$= 56\,a^3 \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{56}{a^2}$$

EJEMPLO 2.–

En qué término son iguales los exponentes de a y b en el desarrollo de $(a+b)^{12}$:

$n = 12$
$r = ?$

$$\text{r-ésimo término} = C \cdot a^{n-(r-1)}\, b^{r-1}$$

Como los exponentes de a y b deben ser iguales, entonces

$$\begin{aligned} n-(r-1) &= r-1 \\ 12-r+1 &= r-1 \\ 13+1 &= 2r \\ r &= \frac{14}{2} \\ r &= 7 \end{aligned}$$

COMPROBACION

$$\text{7o. término} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}\, a^{12-(7-1)}\, b^{7-1}$$

$$= 924\, a^6\, b^6$$

EJERCICIO IV - 5

Determine, sin desarrollar, el término que se solicita:

a) 5o. término de $\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right)^8$

b) 4o. término de $(2x + 3y)^9$

c) 9o. término de $(a + 1)^{11}$

d) 6o. término de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$

e) 7o. término de $(a^{-2} + a^2)^{10}$

f) 9o. término de $(x^2 - y^2)^{12}$

g) 6o. término de $\left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{x^2}\right)^7$

h) 8o. término de $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{12}$

i) término medio de $\left(2a - \frac{1}{2a}\right)^{10}$

j) término medio de $(2x + 3y)^8$

k) término medio de $\left(2a - \frac{b}{2}\right)^{12}$

l) término medio de $(2x - y)^6$

m) Hallar el término libre de literales de $\left(a - \frac{1}{a}\right)^8$

n) Hallar el término libre de literales de $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$

o) ¿En qué término son iguales los exponentes de a y b en el desarrollo de $\left(a + \frac{b}{2}\right)^{10}$?

p) ¿En qué término son iguales los exponentes de a y b en el desarrollo de $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^6$?

RESUMEN

SUCESIONES: Una sucesión es un conjunto de elementos dispuestos en un orden definido y que guardan una determinada ley de formación.

También se le define como un tipo especial de función, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3 \ldots\}$ o un sub-conjunto propio de él. $[\, n, f(n)]$

Las sucesiones pueden ser finitas o infinitas, según el número de términos.

Una sucesión se representa por:

$$\{a_n\} = \{(1, a_1),\ (2, a_2),\ (3, a_3) \ldots\}$$

o bien

$$\{a_n\} = a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots a_n, \ldots$$

La gráfica de las sucesiones, se puede representar en un Sistema Coordenado Rectangular, y la forman un conjunto de puntos aislados.

Los términos de una sucesión se determinan, sustituyendo adecuadamente en la expresión para el n-ésimo término el número natural que se asocie con el orden que ocupa dicho término.

También podemos encontrar los términos de una sucesión, si se nos da una fórmula o regla de formación y el valor del primer término.

SERIES: Una serie es la suma indicada de los términos de una sucesión.

Las series pueden ser finitas o infinitas, según su número de términos.

Las series se representan mediante el símbolo: Σ, seguido de una fórmula para el n-ésimo término, y se ponen numerales arriba y abajo del símbolo para indicar cuáles términos se han de sumar.

Una serie se representa por:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_k}_{\text{serie finita}}$$

o bien:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}_{\text{serie infinita}}$$

PROGRESIONES ARITMETICAS: La sucesión $\{a_n\}$, en la que $a_n - a_{n-1} = d$ para $n > 1$, es llamada sucesión aritmética o progresión aritmética.

Los componentes de una progresión aritmética son:

a_1 = primer término

a_n = último término

d = diferencia común

n = número de términos

S_n = suma de n términos.

Las fórmulas aplicables en las progresiones aritméticas son:

1) Para el cálculo del n-ésimo término:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$