PASATIEMPO MATEMATICO

1) *Una señora fue en una ocasión al mercado a vender una canasta de huevos. El primer comprador se llevó "la mitad más medio huevo". Al segundo le vendió "la mitad de los que le quedaban más medio huevo". Y al tercero le dio "la mitad de lo que entonces le quedaba más medio huevo". Se quedó con tres. Si la señora jamás rompió ningún huevo en sus ventas, ¿cuántos tenía al principio?*
Solución: 31 huevos

2) *Truco para adivinar el pensamiento:*
El adivinador de pensamiento (M) le pide a un amigo (A) que piense un número, lo multiplique por 5, que sume 6, que multiplique por 4, que sume 9, que multiplique por 5, y que le diga el resultado.
(A) piensa, por ejemplo, el número 12, y calcula sucesivamente: 60, 66, 264, 273 y 1365, y dice en voz alta este último número.
(M) resta 165 de este resultado, le quedan 1200, quite los dos ceros y le dice a (A) que el número que pensó era el 12.

El truco se ve fácilmente si traducimos con símbolos las operaciones efectuadas. Si el número que (A) elige es x, las operaciones sucesivas darán (5x), (5x+6), (20x+24), (20x+33) y (100x+165). Cuando le comunican a (M) este número, es evidente que puede determinar el valor de x, si le resta 165 y divide por 100.

5

Permutaciones y Combinaciones

QUINTA UNIDAD
PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

I. PERMUTACIONES Y COMBINACIONES.

1. Aplicará los conceptos de permutación y combinación, en la solución de problemas.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error en el tema:

I. PERMUTACIONES Y COMBINACIONES.

1.1 Utilizará el principio fundamental de conteo, en la solución de problemas.

1.2 Definirá el concepto de permutación.

1.3 Usará la fórmula para obtener el número de permutaciones de un conjunto de elementos diferentes, tomados "n" a un tiempo, en la solución de problemas sencillos.

1.4 Empleará la fórmula para obtener el número de permutaciones cuando algunos de los elementos del conjunto están repetidos.

1.5 Definirá el concepto de combinación.

1.6 Diferenciará entre permutaciones y combinaciones.

1.7 Utilizará el teorema concerniente a las combinaciones de "n" objetos, tomados en grupos de "r" a un tiempo, en la solución de problemas sencillos.

INTRODUCCION

En la industria, en la administración gubernamental y en la investigación científica ocurren con frecuencia los problemas que requieren "el cálculo del número de todos los subconjuntos que pueden formarse con un conjunto dado de símbolos, objetos o sucesos".

Por ejemplo, una compañía telefónica debe proporcionar a cada suscriptor un número único, irrepetible; el departamento de tránsito debe asignar placas de identificación, todas diferentes, para los vehículos. Ambos deben tener la suficiente amplitud para cubrir el número de elementos previsto.

El problema es, entonces:

Calcular cuántos subconjuntos distintos se pueden formar con un conjunto dado de símbolos.

En esta unidad, estudiaremos:

Colecciones y ordenaciones de símbolos, objetos o sucesos.

Desarrollaremos los principios fundamentales que permiten calcular el número deseado de subconjuntos sin necesidad de enumerar sus elementos.

I. PERMUTACIONES Y COMBINACIONES.

A. Principio Fundamental de Conteo.

Supongamos que hay dos carreteras que van de Monterrey a México y tres carreteras de México a Acapulco. ¿De cuántos modos distintos se puede viajar de Monterrey a Acapulco por carretera?

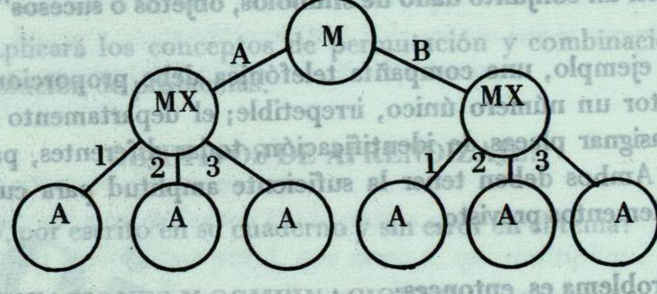

DIAGRAMA DE ARBOL

Podremos viajar por la carretera A para llegar a México y continuar por 1 hasta Acapulco, A – 1; o bien continuar por 2, A – 2; y también por 3, A – 3. Esto hace 3 modos distintos iniciando el viaje por la carretera A. Por la carretera B, tendremos también otras 3 alternativas diferentes: B – 1, B – 2 y B – 3.

Tenemos entonces que podemos viajar de Monterrey a Acapulco de 2 x 3 modos diferentes.

Esto es:

$$\underbrace{(A-1)+(A-2)+(A-3)}_{\text{3 alternativas}} \quad + \quad \underbrace{(B-1)+(B-2)+(B-3)}_{\text{3 alternativas}}$$

2 x 3 = 6 modos diferentes

Principio fundamental:

Si un evento puede producirse de h_1 modos, y después de ello, un segundo evento puede producirse de h_2 modos distintos, los dos eventos pueden producirse juntos en, $h_1 \times h_2$ modos diferentes.

Ejemplo: ¿De cuántas maneras diferentes pueden seleccionarse parejas de entre 4 muchachas y 3 varones?

Consideremos:

muchachas	*varones*
1,2,3,4	*a,b,c*

$$1\left[\begin{array}{l}1-a\\1-b\\1-c\end{array}\right. \quad 2\left[\begin{array}{l}2-a\\2-b\\2-c\end{array}\right. \quad 3\left[\begin{array}{l}3-a\\3-b\\3-c\end{array}\right. \quad 4\left[\begin{array}{l}4-a\\4-b\\4-c\end{array}\right.$$

Cada muchacha puede ser seleccionada de 4 modos diferentes, luego, cada varón puede ser seleccionado de 3 modos; por tanto, cada pareja puede seleccionarse de 4 x 3 = 12 modos diferentes.

Cuando ocurren más de dos sucesos, se puede ampliar el principio fundamental del modo siguiente:

Si después de haber ocurrido los dos primeros sucesos, ocurre un tercero de h_3 modos diferentes, un cuarto de h_4 modos diferentes, y por último, un enésimo de h_n modos diferentes, entonces, los n sucesos pueden ocurrir en el orden indicado de:

$$h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot h_4 \ldots h_n \text{ módos.}$$

EJEMPLO 1. ¿Cuántas placas de identificación de automóviles pueden fabricarse usando en cada placa 2 letras y 4 dígitos?

SOLUCION. En este problema, se pueden usar cualesquier letra o cualesquier dígito más de una vez en cada placa, ejemplo: AA–1111.

Se considerará que el primer dígito puede ser cero.

El primer suceso es la elección de la letra que ocupe el primer lugar en la placa, puesto que hay 27 letras para escoger, $h_1 = 27$. De manera análoga $h_2 = 27$. Puesto que cualquiera de los números 0,1,2,3,....9, se pueden usar en cualquiera de los otros cuatro lugares de la placa, entonces $h_3 = 10$, $h_4 = 10$, $h_5 = 10$, $h_6 = 10$.

Por lo tanto, el número total de placas es:

$$27 \times 27 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 7'290,000$$

Si consideramos ahora, que ninguna letra y ningún dígito deben repetirse en la placa, el número de placas posibles será: $h_1 = 27$, $h_2 = 26$ (puesto que para el segundo lugar sólo quedan 26 letras disponibles), $h_3 = 10$, $h_4 = 9$, $h_5 = 8$, $h_6 = 7$. Por lo tanto, el númerototal de placas sin repetir letras, ni dígito alguno será:

$$27 \times 26 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 3'538,000$$

EJEMPLO 2. ¿Cuántos números impares menores que 1000 pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4,5,6?

SOLUCION. Puesto que los números menores que 1000 pueden tener 1,2 ó 3 dígitos, consideraremos cada caso en forma separada:

No. de 1 dígito		No. de 2 dígitos		No. de 3 dígitos
U.		D. U.		C. D. U.
3	+	5 3	+	4 5 3

Llenamos el lugar de las unidades con un dígito impar, y después llenamos los lugares restantes.

$$3 + 15 + 60 = 78 \text{ números impares}$$

EJEMPLO 3. Tres muchachas se suben a un camión urbano de transporte colectivo, en el que hay 5 asientos vacíos. ¿En cuántas formas diferentes pueden sentarse?

SOLUCION. La primera muchacha puede seleccionar su asiento de 5 formas diferentes, la segunda lo puede hacer de 4 formas y la tercera muchacha de 3.

Por tanto, las tres muchachas pueden sentarse de:

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ formas distintas}$$

EJEMPLO 4. ¿En cuántas formas diferentes podemos colocar 5 cartas en 4 buzones?

SOLUCION. La primera carta puede depositarse en cualquiera de los 4 buzones: esto es en 4 formas diferentes. La segunda carta puede depositarse también en cualquiera de los 4 buzones, es decir, también en 4 formas distintas; y lo mismo sucede con cada una de las cartas restantes.

Entonces:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1,024 \text{ formas diferentes.}$$

EJERCICIO V – 1

Resolver los ejercicios siguientes aplicando el Principio Fundamental de Conteo.

1. ¿Cuántos números pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4, a) de dos cifras diferentes, b) de tres cifras diferentes?. Enuméralos.

2. ¿Cuántos números distintos de dos cifras pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4,5, si: a) cada cifra puede usarse sólo una vez en cada número, y b) cada cifra puede usarse más de una vez en cada número?.

3. ¿Cuántos números diferentes de dos cifras pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4,5,6, a) de a lo más tres cifras distintas y b) de a lo menos tres cifras diferentes?.

4. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes menores de 500 pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4,5,6,7, a) sin repetir cifra en cada número y b) si se permite la repetición de cifras en cada número?.

5. ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con los cinco dígitos 3,4,5,6,7, a) sin utilizar los dígitos más de una vez, b) cuántos son menores que 500, c) cuántos son impares y d) cuántos son múltiplos de cinco?.

6. ¿Cuántos números de tres cifras, siendo la primera diferente de cero, pueden formarse con los dígitos 0,1,2,3,4, si: a) si se permiten repeticiones, b) no se permiten repeticiones?.

7. ¿Cuántos números de 4 cifras podemos escribir en nuestro sistema decimal?.

8. Si una persona tiene 4 chamarras deportivas y 5 pants. ¿Cuántas combinaciones pueden formarse, cada una de ellas con una chamarra y un pantalón?.

9. ¿De cuántas formas diferentes puede escogerse un cuarteto, de entre 3 bajos, 4 tenores, 2 barítonos y 4 sopranos?.

10. En una escuela se van a hacer elecciones para mesa directiva. Hay 3 candidatos para presidente, 2 para vice-presidente, 4 para secretario, y dos para tesorero. ¿De cuántas formas diferentes puede quedar integrada la mesa directiva?.

11. Tres vendedores competidores llegan a un pueblo en que hay 5 hoteles. ¿En cuántas formas distintas pueden alojarse de tal modo que no queden dos en el mismo hotel?.

12. ¿De cuántas formas diferentes podemos colocar 4 lápices en tres bolsas distintas, considerando que cada bolsa es suficientemente grande para guardar los cuatro lápices?.

13. Si lanzamos 4 monedas al aire, ¿en cuántas formas diferentes pueden caer?.

14. Si tenemos 3 dados, de distintos colores, ¿de cuántas maneras diferentes pueden caer si lanzamos los tres dados?.

15. ¿De cuántas formas diferentes podrá contestarse completamente un cuestionario de 5 preguntas, si debe responderse solamente sí o no a cada una de ellas?.

16. Un estudiante tiene que elegir un idioma y una materia, de entre 5 idiomas y 4 materias. Hallar el número de formas distintas en que puede hacerlo.

17. ¿De cuántas formas se pueden repartir dos premios entre 10 personas, sabiendo que ambos premios, a) no se pueden conceder a una misma persona y b) si se pueden conceder a la misma persona?.

18. Un estadio tiene 8 puertas de acceso. ¿De cuántas maneras puede

una persona entrar por una puerta y, a) salir por otra distinta, b)salir por una puerta cualquiera?.

19. ¿Cuántas placas diferentes de identificación de automóviles pueden hacerse si cada una tiene 5 símbolos, los dos primeros son letras y el resto son dígitos?. Podemos incluir el cero, pero las letras "I" y "O" no pueden ser usadas.

20. Un teléfono tiene 10 botones, numerados del 0 al 9. Para obtener línea directa se debe marcar el 1 ó el 0, a continuación, un código zonal de tres dígitos, y finalmente, un número de siete dígitos. ¿Cuántos números telefónicos pueden marcarse?.

B. Permutaciones.

Nos hemos interesado por el número de modos en que puede disponerse una colección de objetos en un orden dado.

A cada una de esas ordenaciones diferentes de un conjunto de n elementos se le llama permutación del conjunto.

Ejemplo: ¿De cuántas formas diferentes podemos ordenar los elementos del conjunto {A,B,C} ?

Podemos ordenarlas en 6 diferentes formas, veamos:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Cada una de estas ordenaciones es una permutación. Aun constan de los mismos elementos, no hay ninguno igual si consideramos el orden en que están colocados.

Una Permutación es cada una de las maneras posibles en que pueden ser ordenados los elementos de un conjunto finito.

El símbolo nPn representa el número de permutaciones de n objetos distintos, tomados a razón de n cada vez.

Las permutaciones de un conjunto de n elementos, pueden también efectuarse considerando sólo una parte (r) de los elementos del conjunto.

Ejemplo: Las permutaciones de los elementos del conjunto {A,B,C} considerados en grupos de 2, son:

AB, BA, BC, CB, AC, CA.

1. Fórmula para obtener el número de permutaciones de elementos diferentes de un conjunto.

Consideramos que el símbolo nPr represente el número de permutaciones de n elementos tomados en grupos de r elementos a la vez.

Entonces, tendremos:

$$\underbrace{\boxed{n} \times \boxed{n-1} \times \boxed{n-2} \times \ldots \times \boxed{n-(r-1)}}_{r\ factores}$$

Es decir:

El primer lugar de la ordenación, se puede ocupar de n modos distintos, después de que se ha ocupado esta primera posición, nos quedan (n – 1) modos para ocupar el segundo lugar; luego nos quedará (n – 2) que es el resto de los elementos del conjunto para la tercera posición, y así sucesivamente, hasta el r-ésimo término que será $[\,n-(n-1)]$.

Cuando tenemos un conjunto de n elementos y disponemos r de ellos ($r \leqslant n$) en un orden determinado, llamamos a esta disposición "una permutación de n elementos tomados de r en r", y su fórmula es:

$$nPr = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-r+1)$$

siendo $n > r$

Para obtener el número de permutaciones de un conjunto de n elementos cuando disponemos de todos a la vez, hacemos en la fórmula anterior, r = n.

De este modo se obtiene:

$$nPn = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1$$

$$nPn = n!$$

Ejemplo 1. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 6 personas en una fila de 6 asientos?

Solución:

$$nPn = n!$$

$$_6P_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$_6P_6 = 720 \text{ maneras distintas}$$

Ejemplo 2. ¿De cuántas maneras distintas pueden tomar asiento tres personas en un salón donde hay 7 asientos?

Solución:

$$nPr = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-r+1)$$

$$_7P_3 = 7 \times 6 \times 5$$

$$_7P_3 = 210 \text{ maneras distintas}$$

2. Permutaciones cuando algunos de los elementos estan repetidos.

No se aplican, las fórmulas anteriores, si alguno de los objetos son iguales, ya que se obtuvieron bajo la suposición de que el conjunto de n objetos son todos distintos entre sí.

Por ejemplo, la palabra GALAXIA, tiene siete letras pero no podemos hacer 7! permutaciones usando las siete letras a la vez, ya que tres de ellas son iguales.

Asignemos sub-índices a las tres A, para ayudarnos a encontrar el número de permutaciones distintas: G A_1 L A_2 X I A_3, tenemos ahora, siete objetos distintos. Habiendo distinguido las A tendremos 7! permutaciones distintas.

Dejando a G, L, e I en posiciones fijas permutamos las A entre sí, esto puede hacerse de 3! maneras distintas:

G A_1 L A_2 X I A_3	G A_1 L A_3 X I A_2
G A_2 L A_1 X I A_3	G A_2 L A_3 X I A_1
G A_3 L A_1 X I A_2	G A_3 L A_2 X I A_1

No podríamos distinguir entre sí estos seis arreglos si se removiesen los índices.

A cada permutación de las siete letras corresponden 3! permutaciones si se considera a las A distintas, entonces el número de permutaciones P de siete objetos de los cuales tres son iguales multiplicado por 3! nos da el número de permutaciones de 7 objetos diferentes:

$$3!\,P = 7!$$

$$P = \frac{7!}{3\,!} = 840$$

Este razonamiento puede ser aplicado a los casos en que haya dos, tres o más grupos de objetos idénticos entre los n objetos.

Por tanto: "El número de permutaciones P de n objetos tomados todos a un tiempo, donde $n_1, n_2, n_3, \ldots$ de los objetos son iguales y los demás distintos, es":

$$P = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots}$$

Ejemplo: ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las 11 letras de la palabra MISSISSIPPI?

Solución: Tenemos 4 I, 4 S y 2 P, por tanto:

$$P = \frac{11!}{4!\,4!\,2!} = 34{,}650$$

3. **Permutaciones cuando los elementos estan ordenados en forma circular.**

Hasta este momento hemos supuesto que una permutación se forma colocando un objeto tras de otro en una línea. Hay, por tanto, un primero

un último objetos. Si los objetos se arreglan en un círculo, sin embargo, no hay primero o último objeto, y las fórmulas anteriores no se aplican directamente. Un arreglo circular nos presenta un nuevo aspecto, ya que una simple rotación no cambiaría la posición relativa de los objetos entre sí. Una rotación no constituye una permutación diferente.

Para encontrar el número de maneras en que se pueden arreglar n objetos diferentes en un círculo, elegimos primeramente una posición para uno de los objetos. Después pueden colocarse los demás en sus posiciones de $(n-1)!$ diferentes maneras.

Ejemplo: ¿De cuántas maneras pueden sentarse 6 personas alrededor de una mesa circular?

$$P\ \text{circ} = (n-1)!$$

$$P\ \text{circ} = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ maneras.}$$

EJERCICIO V – 2

1. Evalúa las expresiones:

a) ${}_5P_0 =$

e) ${}_5P_4 =$

b) ${}_5P_1 =$

f) ${}_5P_5 =$

c) ${}_5P_2 =$

g) ${}_5P_4 = {}_5P_5$

d) ${}_5P_3 =$

h) ${}_nP_2 = 90, n = ?$

2. ¿Cuántos números pueden formarse con los dígitos 0,1,2,3,..., 9 a) de tres cifras, b) de tres cifras y menores que 700 y c) que tengan a lo más tres cifras?.