3. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una fila de siete asientos, 4 hombres y 3 mujeres si, a) pueden sentarse en cualquier orden y b) alternándose?.

4. ¿De cuántas maneras se pueden colocar siete cuadros diferentes en una fila sabiendo que uno de ellos debe de estar, a) en el centro, b) en uno de los extremos?.

5. Un profesor de idiomas desea mantener juntos en un estante los libros de un mismo idioma. Si tiene 12 espacios para 5 libros franceses, 4 italianos y 3 alemanes, ¿de cuántas maneras los puede colocar en el estante?.

6. ¿De cuántas maneras se pueden colocar nueve libros diferentes sobre una estantería de forma que: a) 3 de ellos estén siempre juntos y b) sin poner condición alguna.

7. Hallar los números que se pueden formar con cuatro de los 5 dígitos 1, 2, 3, 4, 5, si: a) éstos no se pueden repetir en cada número, b) sí se pueden repetir. Si los dígitos no se pueden repetir, ¿cuántos números de 4 cifras se pueden formar, c) empezando por 2 y d) terminando en 25?.

8. ¿Cuántos números comprendidos entre 3,000 y 5,000 se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 , 5, 6, si cada dígito no se puede repetir en cada número?.

9. a) Hallar los números de cinco cifras que se pueden formar con los 10 dígitos 0, 1, 2, 3, 4, . . . 9, pudiendo éstos repetirse. ¿Cuántos de estos números, b) empiezan por 40, c) son pares, d) son divisibles por 5?.

10. Hallar cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los 10 dígitos 0, 1, 2, 3, 4, ... 9, si cada uno sólo se emplea una vez. ¿Cuántos de estos números son impares?.

11. Un hombre distribuye una moneda de \$50.00, dos de \$100.00,tres de \$200.00 y cuatro de \$500.00 entre 10 niños. ¿De cuántas maneras puede repartirse este dinero entre los muchachos si cada uno ha de quedarse con una moneda?.

12. Encuentre el número de permutaciones que pueden formarse usando todas las letras de las palabras, a) Alabama, b) Arkansas, c) Mississippi.

13. a) Hallar el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra "cooperador" tomadas todas a la vez. ¿Cuántas de estas palabras, b) tienen juntas las tres "o" , y c) empiezan por las dos "r"?. (Las palabras no necesitan tener significado).

14. Se dispone de tres ejemplares de 4 libros diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una estantería?.

15. ¿De cuántas maneras pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?.

16. ¿De cuántas maneras pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda, si dos personas insisten en sentarse una al lado de la otra?.

17. ¿De cuántas maneras se pueden colocar cuatro hombres y cuatro mujeres alrededor de una mesa redonda de manera que cada mujer esté entre dos hombres?.

18. Siete niños tomados de la mano forman un círculo. ¿De cuántas maneras pueden formar un círculo?. ¿De cuántas maneras pueden formar una línea?.

19. Un brazalete de una joven tiene cinco amuletos, si los saca y los pone en su tocador formando un círculo, ¿cuántos ordenamientos distintos puede tener?.

20. Cinco niños y cinco niñas forman una línea alternando niños y niñas, a) ¿de cuántas maneras pueden formar una línea ?, y b) ¿de cuántas maneras diferentes podrían formar un círculo en el que los niños y las niñas esten alternados?.

C. Combinaciones.

A diferencia de una permutación, que es una disposición ordenada de determinados objetos, una combinación es "un conjunto de objetos distintos en el que el orden de disposición carece de importancia".

Al elegir un comité dentro de un grupo de personas lo que interesa son los individuos que constituyen el comité más que cualquier arreglo de los integrantes del mismo.

La diferencia entre permutaciones y combinaciones, es la ordenación de los objetos en cuestión.

Cuando todos los elementos de un conjunto se toman a un tiempo hay tan sólo una combinación, es decir, "las combinaciones de n elementos considerados en grupos de n elementos es igual a 1".

Ejemplo: Las combinaciones de los elementos del conjunto [A,B,C] considerados en grupos de tres es una sola.

Al considerar las combinaciones de una parte de los elementos de un conjunto, obtendremos más de una manera, veamos:

Recordemos que las permutaciones de los elementos del conjunto [A,B,C] considerados en grupos de dos son:

AB, BA, AC, CA, BC y CB

es decir, son 6 permutaciones; en cambio las combinaciones

posibles son solamente 3:

AB, AC, y BC

ya que, por ejemplo, AB y BA son dos permutaciones pero una sola combinación.

1. Fórmula para obtener el número de combinaciones de los elementos de un conjunto.

Consideremos que el símbolo:

nCr

represente el número de combinaciones de n elementos tomados en grupos de r elementos a la vez.

En cada una de las nCr combinaciones, consistentes de r objetos diferentes, estos r objetos pueden reordenarse, permutándose en r! maneras distintas. Así, por cada combinación habrá r! permutaciones.

De modo que para las nCr combinaciones habrá:

r! nCr permutaciones diferentes

Puesto que éstas constituyen todas las permutaciones posibles de los n objetos, tomados de r en r, tenemos:

$$r!\, nCr = nPr$$

$$nCr = \frac{nPr}{r!}$$

o bien:

$$nCr = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

Nota: Hay exactamente r factores tanto en el numerador como en el denominador.

Si hacemos que $r = n$, en la fórmula anterior, obtendremos:

$$nCn = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-n+1)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Lo que confirma lo dicho, de que sólo existe una combinación de n objetos considerados en grupos de n objetos.

Ejemplo 1. ¿Cuántos sub-conjuntos de 3 elementos, combinaciones de 3 diferentes elementos, pueden formarse con los elementos del conjunto $\{a, b, c, d, e\}$?

Analizando el problema, encontramos:

$\{a, b, c\}$	$\{a, c, d\}$	$\{b, c, e\}$	$\{c, d, e\}$
$\{a, b, d\}$	$\{a, c, e\}$	$\{a, d, e\}$	
$\{a, b, e\}$	$\{b, c, d\}$	$\{b, d, e\}$	

Ninguno de estos 10 sub-conjuntos contiene los mismos elementos que otro.

Cada uno de ellos permite las 3! permutaciones, de tal modo que nos darán 10 (3!), o sea, 60 permutaciones de 3 elementos escogidos entre 5 elementos.

Recordemos que: $_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ permutaciones.

Por lo anteriormente dicho, tenemos:

$$_5C_3 \,.\, (3!) = {}_5P_3$$

$$_5C_3 = \frac{_5P_3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10 \text{ combinaciones.}$$

Ejemplo 2. ¿De cuántos modos podemos seleccionar 3 folletos diferentes de viaje, de un conjunto de 12 folletos diferentes?

$$_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220 \text{ modos}$$

2. Simplificación de la fórmula nCr.-

Si n es relativamente grande y $r \leqslant n$, pero también grande, la expresión puede simplificarse, utilizando:

$$nCr = nC\,n - r$$

En efecto, el número de sub-conjuntos de r elementos seleccionados de un conjunto de n elementos, donde $n > r$, es exactamente el mismo que el número de sub-conjuntos de $(n - r)$ elementos seleccionados del mismo conjunto de n elementos. Cada vez que tomamos un conjunto de r elementos del conjunto n, nos queda otro conjunto de $(n - r)$ elementos.

Ejemplo. Evaluar la expresión:

$$_{52}C_{48} = \frac{52.51.50.49.(\cancel{48.47.46\ldots\ldots6.5})}{(\cancel{48.47.46\ldots.6.5})\,4.3.2.1}$$

$$_{52}C_{48} = {}_{52}C_{52-48} = {}_{52}C_4 = \frac{52.51.50.49}{4.3.2.1} = 270{,}725$$

La fórmula $nCr = nC\,n-r$ nos hace ver el significado de nCo, puesto que:

$$\text{Si } n = r, \text{ tenemos:}$$
$$nCn = nC\,n-n$$
$$nCn = nCo$$

y como $nCn = 1$, nos queda:

$$nCo = 1$$

Esto significa que, solamente existe un sub-conjunto de un conjunto dado que no tenga ningún elemento: el conjunto vacío ϕ .

Es decir, hay solamente una manera de no seleccionar ningún elemento de un conjunto de n elementos.

3. **Número total de combinaciones de n objetos tomando algunos o todos a la vez.**

Consideremos un conjunto de n elementos; deseamos saber el número total de sub-conjuntos que contiene uno o más, o todos, de los n elementos del conjunto.

El número total es:

$$nC_1 + nC_2 + nC_3 + \dots + nCn$$

Ejemplo: Un estudiante tiene seis textos diferentes, ¿De cuántas formas puede llevar uno, o varios, o todos, a la escuela?

Escogiendo 1 cada vez: ${}_6C_1 = 6$
Escogiendo 2 cada vez: ${}_6C_2 = 15$
Escogiendo 3 cada vez: ${}_6C_3 = 20$
Escogiendo 4 cada vez: ${}_6C_4 = 15$
Escogiendo 5 cada vez: ${}_6C_5 = 6$
Escogiendo 6 cada vez: ${}_6C_6 = 1$
Total $= 63$

Podríamos haber llegado a este mismo resultado razonando en la forma siguiente: para cada libro podemos escoger dos caminos; o tomarlo para llevarlo, o dejarlo, lo que hace:

$$2^6 = 64 \text{ combinaciones}$$

Pero esto incluye la combinación en donde todos los seis libros hubieran sido dejados en la casa; así pues, tendremos:

$$2^6 - 1 = 64 - 1 = 63 \text{ combinaciones}$$

De esto obtendremos una fórmula para determinar el número total de combinaciones de n objetos tomando algunos o todos a la vez:

$$nC_{(1,2,\dots n)} = 2^n - 1$$

EJERCICIO V – III

1. Evalúe las siguientes expresiones:

a) ${}_5C_0 =$ e) ${}_5C_4 =$

b) ${}_5C_1 =$ f) ${}_5C_5 =$

c) ${}_5C_2 =$ g) ${}_8C_5 = {}_8C_3$

d) ${}_5C_3 =$ h) $nC_2 = 15,\ n = ?$

2. En un curso de 15 muchachos y 10 señoritas, ¿de cuántas maneras puede formarse un comité de 3 muchachos y 2 señoritas?.

3. En un examen, el alumno debe contestar 8 de un total de 12 preguntas, debiendo incluir exactamente 5 de entre las 6 primeras. ¿De cuántas maneras puede hacer su examen?.

4. Si dos puntos determinan una línea recta, ¿cuál es el mayor número de líneas determinadas por diez puntos distintos en el espacio?.

5. ¿De cuántos modos distintos puede seleccionarse una comisión de dos hombres y dos mujeres de entre un grupo de 8 hombres y 6 mujeres?.

6. Si viven diez familias en un edificio de departamentos, ¿de cuántas maneras distintas podrá seleccionar un encuestador del censo a 4 familias para entrevistarlos?.

7. ¿Cuántos grupos de cuatro alumnos se pueden formar con 17 alumnos para representar a una escuela en un concurso de preguntas de matemáticas?.

8. ¿De cuántas maneras se pueden elegir cinco idiomas de entre ocho?.

9. ¿De cuántas formas se pueden repartir doce libros entre dos personas, A y B, de manera que a uno le toquen 9 y al otro 3?.

10. ¿De cuántas maneras se pueden elegir tres hombres de entre un grupo de quince, de forma que: a) uno de ellos debe figurar en cada grupo seleccionado, b) dos de ellos no deben figurar en cada grupo seleccionado, c) uno de ellos debe, y otros 2 no deben, figurar en cada grupo.

11. ¿Cuántos grupos de siete miembros se pueden formar con 6 químicos y 5 biólogos de manera que en cada uno se encuentren 4 químicos?.

12. ¿Cuántos grupos diferentes de dos hombres y una mujer se pueden formar con: a) 7 hombres y 4 mujeres, b) 5 hombres y 3 mujeres?.

13. ¿Cuántas diagonales tiene un octágono?.

14. En una reunión, después de que cada uno de los asistentes saludó una sola vez a cada uno de los restantes, se realizaron 45 salutaciones. Hallar el número de las personas que había en la reunión.

15. ¿En cuántas formas pueden seleccionarse cinco listones del mismo color de entre siete listones azules y ocho blancos?.

16. ¿Cuántos grupos de más de siete personas pueden formarse con diez personas?.

17. ¿Cuántos grupos de menos de cuatro personas pueden formarse con diez personas?.

18. ¿De cuántas maneras se puede colorear un cuadro con siete colores diferentes?.

19. ¿Cuántos grupos se pueden formar con ocho mujeres sabiendo que en cada uno de ellos debe haber por lo menos tres?.

20. ¿De cuántas maneras puede una señora invitar a merendar a: a) dos amigas, b) tres amigas, c) dos o más de sus ocho amigas?.

RESUMEN

Principio fundamental de Conteo:

Si un evento puede producirse de h_1 modos, y después de ello, un segundo evento puede producirse de h_2 modos distintos, y un tercero ocurre de h_3 modos diferentes, y por último, un n-ésimo evento ocurre de h_n modos diferentes; entonces, los n sucesos pueden ocurrir en el mismo orden indicado de:

$$h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \ldots h_n \text{ modos diferentes}$$

Permutaciones:

Una permutación es cada una de las maneras posibles diferentes en que pueden ser ordenados los elementos de un conjunto finito.

Las permutaciones de n objetos distintos de un conjunto, tomados todos a la vez son:

$${}_nP_n = n!$$

Las permutaciones de n objetos distintos de un conjunto, tomando sólo una parte (r) de los objetos son:

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \text{ siendo } n > r$$

Las permutaciones de n objetos distintos de un conjunto, cuando algunos de los objetos están repetidos:

" El número de permutaciones P de n objetos tomados todos a un tiempo, donde n_1, n_2, n_3. . . . de los objetos son iguales y los demás distintos es:"

$$P = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots}$$

Las permutaciones de n objetos distintos de un conjunto, cuando están ordenados en forma circular:

$$P \text{ circ.} = (n-1)!$$

Combinaciones:

Una combinación es un conjunto de objetos distintos considerados en cualquier orden.

La diferencia entre permutaciones y combinaciones es la ordenación de los objetos en cuestión.

Las combinaciones de n objetos distintos, tomados todos a un tiempo:

" Las combinaciones de n objetos considerados en grupos de n objetos es igual a 1 ".

$${}_nC_n = 1$$

Las combinaciones de n objetos distintos de un conjunto, tomando sólo una parte (r) de los objetos son:

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

Nota: Hay exactamente r factores tanto en el numerador como en el denominador.

Simplificación de la fórmula ${}_nC_r$:

Si n es relativamente grande y r también, la expresión puede simplificarse, utilizando:

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

Número total de combinaciones de n objetos tomando algunos o todos a la vez:

" Consideremos un conjunto de n elementos en que deseamos saber el número total de sub-conjuntos que contiene uno o más, o todos los n elementos del conjunto:"

El número total es:

$${}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \ldots + {}_nC_n$$

o también:

$${}_nC_{(1,2,3,\ldots n)} = 2^n - 1$$

AUTOEVALUACION

I. Principio fundamental de Conteo:

1. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Si lanzamos tres monedas al aire, ¿en cuántas formas diferentes pueden caer?

b) Un estudiante tiene que elegir un idioma y una materia, de entre tres idiomas y dos materias. Hallar el número de formas distintas en que puede hacerlo.

II. Permutaciones.

a) Calcular:

${}_7P_3 =$

${}_3P_3 =$

${}_3P_0 =$

b) ¿Cuántas permutaciones se pueden hacer con las letras de la palabra MARTES, si:

1) Cuatro letras son usadas a un tiempo.
2) Se usan todas las letras.
3) Se usan todas las letras eligiendo una vocal para la primera posición.

c) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra SINUSITIS?.

d) ¿Cuántos ordenamientos diferentes podemos tener cuando una familia de cinco miembros se sienta a comer en una mesa redonda?.

III. Combinaciones.

a) Calcular:

$_{3}C_{0}$ =

$_{7}C_{5}$ =

b) ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de cinco personas de entre ocho?.

c) ¿Cuántos grupos de menos de cuatro personas pueden formarse con seis personas?.

d) ¿De cuántas maneras se puede colorear un mapa con cinco colores diferentes?.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

I. **Principio fundamental de Conteo:**

a) 8 formas.

b) 6 formas.

II. **Permutaciones:**

a) 210, 6, 1

b) 1) 360 2) 720 3) 240

c) 10,080

d) 24

III. **Combinaciones:**

a) 1, 21

b) 56

c) 41

d) 31

ANEXO

SOLUCIONES

EJERCICIO I - 1

1. a) $18i$
   b) $15i\sqrt{2}$
   c) $2i\sqrt{6}$
   d) $6i\sqrt{2}$
   e) $i\sqrt{6}$
   f) $\frac{1}{6}\, i\sqrt{6}$
   g) $5i$
   h) $\frac{1}{2}\, i$

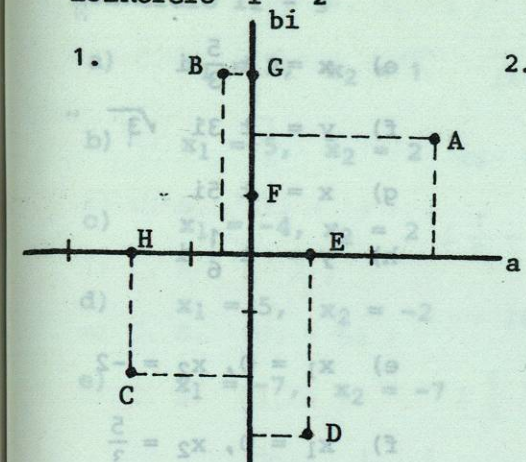
2. a) $3i\sqrt{3}$
   b) $7i\sqrt{6}$
   c) $5i$
   d) $\frac{9}{10}\, i\sqrt{5}$
   e) 0

3. a) -15
   b) -100
   c) 5
   d) -5
   e) 24

4. a) 3
   b) 2
   c) $\frac{1}{2}$
   d) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   e) $\frac{5}{3}\sqrt{15}$

EJERCICIO I - 2

1.



2. a) $11 + i$
   b) $\frac{5}{4} + \frac{7}{8}\, i$
   c) $3 + 12i$
   d) $14i$
   e) $7 + 5i$

3. a) $2 + 5i$
   b) $7 - 8i$
   c) $14i$
   d) $-4i$
   e) $-3 + 4i$

4. a) $5 + 10i$
   b) $16 + 30i$
   c) 5
   d) $14 + 5i$
   e) -34

5. a) $\frac{3}{10} - \frac{1}{10}\, i$
   b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\, i$
   c) $\frac{16}{73} + \frac{6}{73}\, i$
   d) $-\frac{2}{13} + \frac{23}{13}\, i$
   e) $\frac{1}{7} + \frac{4}{7}\, i\sqrt{3}$