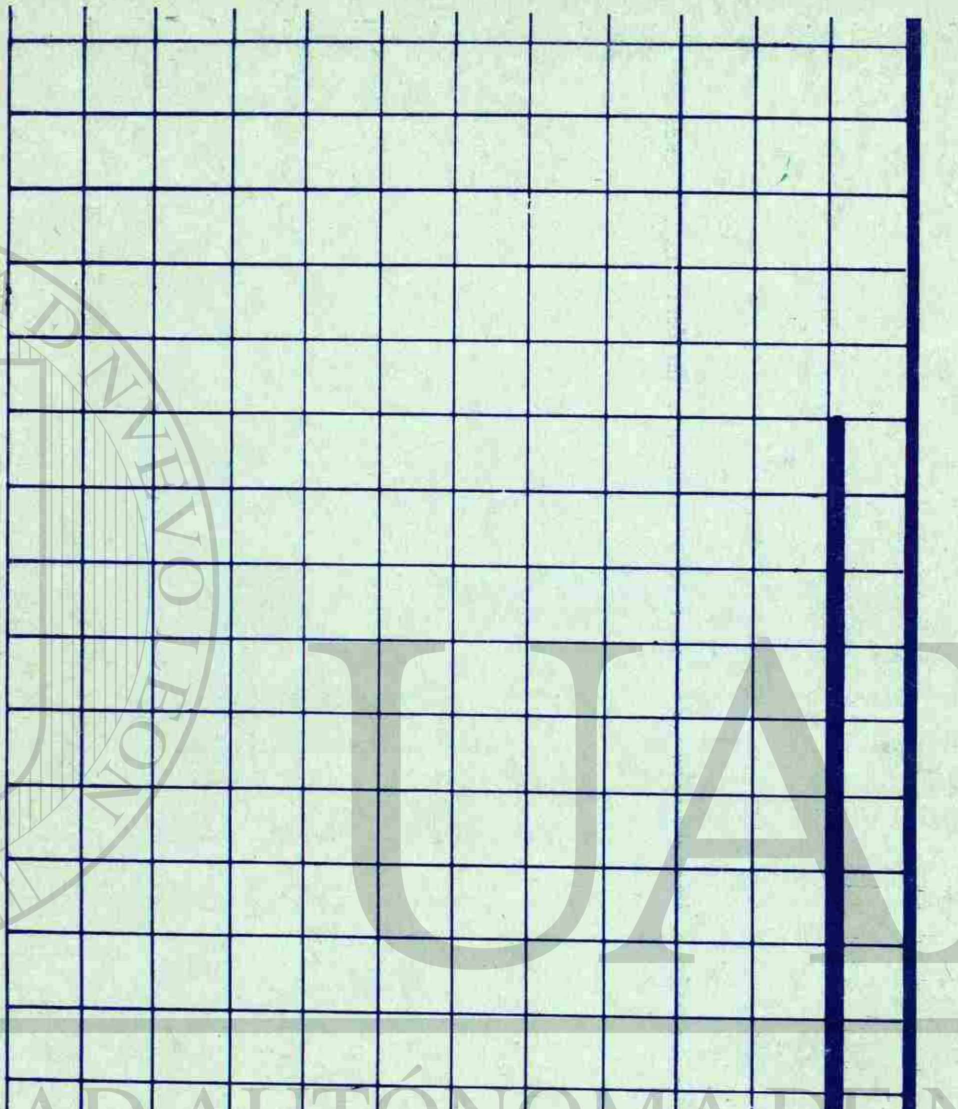
matemáticas 3



nancy gonzz. de flores

JOVEN ESTUDIANTE

El contenido de este trabajo se ha hecho, tratando de presentarte las matemáticas en una forma sencilla y práctica. Espero despertar en tí, el entusiasmo por la disciplina matemática, y darle el lugar que en justicia le corresponde dentro de la profesión que hayas elegido o estés por elegir.

¡Adelante!

U. A. N. L
Escuela Preparatoria No. 1
Monterrey, N. L

OBJETIVOS GENERALES

Al termino de este curso el alumno será capaz de:

- Aplicar las leyes de los exponentes y de los radicales en la simplificación de expresiones algebráicas.
- Simplificar operaciones aritméticas aplicando las propiedades de los logaritmos.
- Efectuar operaciones fundamentales con números complejos.
- Aplicar los diferentes métodos en la simplificación de ecuaciones cuadráticas.
- Resolver un sistema de ecuaciones cuadráticas por diferentes métodos.

CONTENIDO

UNIDAD II

LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES

UNIDAD III

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS

UNIDAD IV

SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS

UNIDAD V

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS

UNIDAD I

"Lo que se aprende de matemáticas en la escuela primaria corresponde al alfabeto; lo que se enseña en el bachillerato corresponde a las pequeñas frases del abecedario, lo que se enseña en los cursos elementales de las universidades corresponde a pequeños cuentos; solamente los sabios tienen conocimiento de lo que corresponde a la literatura".

Carl Stoermer.

UNIDAD V

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS

UNIDAD I

"Lo que se aprende de matemáticas en la escuela primaria corresponde al alfabeto; lo que se enseña en el bachillerato corresponde a las pequeñas frases del abecedario, lo que se enseña en los cursos elementales de las universidades corresponde a pequeños cuentos; solamente los sabios tienen conocimiento de lo que corresponde a la literatura".

Carl Stoermer.

UNIDAD I

EXPONENTES Y RADICALES

– **Las diferentes áreas en donde encuentra aplicación las Matemáticas, requiere del conocimiento de diversos conceptos que trataremos en esta Unidad.**

EXPONENTE

Se llama exponente a un pequeño número o letra que se escribe arriba y a la derecha de un número para indicar cuántas veces se usa ese número como factor.

Ejemplo: En b^3 el exponente 3 indica que "b" se toma tres veces como factor.

$$b^3 = b \times b \times b$$

BASE

Es aquel número o letra usado varias veces como factor.

Ejemplo: En b^3; la base es "b" que se va a tomar 3 veces como factor.

POTENCIA

Es un producto en el que todos los factores son iguales.

Ejemplo: Así, b^3 es la tercera potencia de la base "b", e igual a: b x b x b

LEYES DE LOS EXPONENTES

Para resolver expresiones que contengan exponentes enteros positivos, será necesario enunciar diversas leyes que nos ayudarán a su simplificación.

Ley No. 1: Producto de potencias de una literal o número.

El producto de potencias de una literal o número es igual a esa literal o número con un exponente igual a la suma de los exponentes de los factores.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo a): $b^4 \cdot b^5 = b^{4+5}$

$$= b^9$$

b): $X^3 \cdot X^2 = X^{3+2}$

$$= X^5$$

Ley No. 2: Cociente de potencias de una literal o número.
El cociente de potencias de una litera o número es igual a esa literal o número con un exponente igual al exponente del dividendo menos el exponente del divisor.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ cuando } m > n$$

Ejemplo a): $a^5 \div a^3 = a^{5-3}$

$$= a^2$$

b): $4b^6 \div 2b^3 = 2b^{6-3}$

$$= 2b^3$$

Ley No. 3: Potencia de potencias de una literal o número.
La potencia de potencias de una literal o número es igual a esa literal o número con un exponente igual al producto de los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Ejemplo a): $(a^2)^3 = a^{2 \times 3}$

$$= a^6$$

b): $(2b^2)^2 = 2^{1 \times 2} \quad b^{2 \times 2}$

$$= 2^2 \; b^4$$

$$= 4b^4$$

Ley No. 4: Potencia de un producto de una literal o numero.
La potencia de un producto, es igual al producto de cada uno de los factores elevados a esa potencia.

$$(a^x b^y)^n = a^{xn} \; b^{yn}$$

Ejemplo a): $(a^2b^3)^3 = a^{2 \times 3} \; b^{3 \times 3}$

$$= a^6 \, b^9$$

b): $(5a^2 \, b^3 \, c^5)^3 = 5^{1 \times 3} \; a^{2 \times 3} \; b^{3 \times 3} \; c^{5 \times 3}$

$$= 5^3 \, a^6 \, b^9 \, c^{15}$$

$$= 125a^6 \, b^9 \, c^{15}$$

Ley No. 5: Potencia de un cociente de una literal o número.
La potencia de un cociente es el cociente de la misma potencia del numerador y del denominador.

$$\left(\frac{a^x}{b^y}\right)^n = \frac{a^{xn}}{b^{yn}}$$

Ejemplo a): $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^3 = \frac{a^{2 \times 3}}{b^{3 \times 3}}$

$$= \frac{a^6}{b^9} \quad \text{cuando } b \neq o$$

Ley No. 6: Exponente cero

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n}$$

$$= a^0$$

$$= 1$$

Al efectuar las operaciones $a^3 \div a^3$; se obtiene

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3}$$

$$= a^0$$

entonces se deduce que:

a) En el producto de dos potencias de misma literal o literales, si el exponente de uno de los factores es cero no cambia el otro factor.

$$a^2 \times a^0 = a^{2+0}$$

$$= a^2$$

b) En el cociente de dos potencias de misma literal o literales, si el exponente del divisor es cero no cambia el dividendo.

$$a^2 \div a^0 = a^{2-0}$$

$$= a^2$$

c) En la potencia de una potencia cuyos exponentes sean cero no cambia dicha potencia.

$$(a^0)^5 = a^{0 \times 5}$$

$$= a^0$$

Por lo tanto el número que tiene la propiedad de dejar idénticas las cantidades a las que multiplica o divide y de permanecer invariable cuando se eleva a cualquier potencia es uno y lo mismo sucede con cualquier cantidad con exponente cero.

Toda cantidad con exponente cero es igual a uno.

$$a^0 = 1$$

EJERCICIO 1.1

Ejecute las operaciones indicadas en los siguientes problemas.

1.- $3^2\ 3^3$

2.- $4^4\ 4^5$

3.- $2^3\ 2^6$

4.- $a^2\ a^3$

5.- $b^3\ b^4$

6.- X^4X

7.- $3^3 / 3^2$

8.- $7^2 / 7$

9.- $4^4 / 4^3$

10.- a^5 / a^3

11.- b^6 / b^4

12.- X^3 / X^2

13.- $(3^2)^3$

14.- $(6^2)^2$

15.- $(5^3)^4$

16.- $(C^6)^3$

17.- $(X^4)^5$

18.- $(2b^3)\ (4b^2)$

19.- $(3a^2)\ (5a)$

20.- $(6a^4)\ (2a^2)$

21.- $10a^3 / 5a$

22.- $4b^5 / 2b^2$

23.- $6x^9 / 3x^6$

24.- $9c^4 / 3c^2$

25.- $(X^4\ Y^2)^3$

26.- $(a^4)^3$

27.- $(b^3c^5)^4$

28.- $(a^4 / a^2)^2$

29.- $(X^5 / X^2)^4$

30.- $(X^2Y^3 / XY^2)^3$

EJERCICIO 1.2

Simplifique a su mínima expresión aplicando los métodos expuestos.

1.- $\dfrac{32a^7b^3c^2}{12a^5bc}$

2.- $\dfrac{45x^3y^4z^2}{9xy^2z^2}$

3.- $\dfrac{36a^5b^2c^4}{6a^3bc^3}$

4.- $(3x^3y^2z)(2x^2y^3z^3)$

5.- $(6x^4y^5z^3)(7x^2yz^4)$

6.- $(-2m^4n^2p)(4m^3n^3p^2)$

7.- $\left(\dfrac{15x^4y^3z^6}{6xyz^3}\right)\left(\dfrac{18xyz}{5x^2y^2z^2}\right)$

8.- $\left(\dfrac{4a^4b^2c}{9a^2b^3c^2}\right)\left(\dfrac{3a^2b^3c^3}{8abc^2}\right)$

9.- $\left(\dfrac{12t^4h^3}{8s^2}\right)\left(\dfrac{16s^4h}{3t^2}\right)$

10.- $(5a^3b^2)^3\ (2ab^4)^2$

11.- $\left(\dfrac{28a^4}{6b^2}\right)^3\left(\dfrac{3b^4c^2}{14a^2c}\right)^3$

12.- $\left(\dfrac{14b^5d^3}{6a^4}\right)^4\left(\dfrac{12a^5}{7b^3d}\right)^4$

13.- $b^{2x+1}\quad b^{2x+1}$

14.- $\dfrac{c^{5-a}}{c^{4+a}}$

15.- $(a^{3x-2})^2$

16.- $(a^{3-x}\,b^{2-y})^3$

17.- $\dfrac{(X^{a+1}\ Y^{b-2})^2}{(X^{2a-1}\ Y^{b+3})^3}$

18.- $\dfrac{(a^{2+t}\ b^{t+1})^3}{(a^{t+1}\ b^{t-3})^2}$

19.- $\dfrac{(a^{n-2}\ b^{n+1})^4}{a^{n-8}\ b^{3n-1}}$

20.- $\left[\left(\dfrac{2a^2}{3b}\right)^2\ \left(\dfrac{6b^2}{4a}\right)^3\right]^2$

21.- $(4x^2yz)^4\ (xy^2z)^3$

22.- $(3m^2np^2)^2\ (2mn^3p)^3$

23.- $\left(\dfrac{35x^9y^7}{21x^6y^4}\right)^2$

24.- $\left(\dfrac{42a^6b^8c^5}{49a^4b^5c^4}\right)^3$

25.- $\left(\dfrac{36a^4c^5d^3}{12a^2d}\right)^2$

26.- $\left[\left(\dfrac{4x^4}{5y^5}\right)^4\ \left(\dfrac{15y^6}{8x^3}\right)^4\right]^3$

27.- $\left[\left(\dfrac{4m^5}{3n^3}\right)^4\ \left(\dfrac{9n^9}{16m^9}\right)^2\right]^5$

28.- $\left[\left(\dfrac{3x^4}{4a^3}\right)^4\ \left(\dfrac{8a^6}{9x^5}\right)^2\right]^4$

29.- $\left[\left(\dfrac{2a^6}{3b^2}\right)^2\ \left(\dfrac{3b^2}{2a^3}\right)^3\right]^5$

30.- $\left[\left(\dfrac{5y^2}{2z}\right)^2\ \left(\dfrac{4z^3}{10y}\right)^3\right]^2$

EXPONENTES ENTEROS NEGATIVOS

Hasta ahora hemos definido los exponentes enteros positivos y establecido cinco leyes que se aplican a ellos.

A continuación ampliaremos estas leyes incluyendo la que se aplica a los exponentes enteros negativos.

Consideremos que a^{-n}, cuando $a \neq o$, representa un número entero y que:

$$a^{-n} = a^{-n}\left(\frac{a^n}{a^n}\right)$$

$$= \frac{a^{-n+n}}{a^n}$$

$$= \frac{a^o}{a^n}$$

$$= \frac{1}{a^n}$$

Por lo tanto la ley se define como sigue:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Cualquier factor de un miembro de una fracción se puede trasladar al otro miembro, si se cambia el signo del exponente del factor.

Ejemplo a): $\dfrac{2x^{-3}}{3y^{-4}} = \dfrac{2y^4}{3x^3}$

b): $\dfrac{a^{-4}\,b^{-2}}{a^{-6}\,b^{-3}} = \dfrac{a^6\,b^3}{a^4\,b^2}$

$= a^{6-4}\,b^{3-2}$

$= a^2b$

EJERCICIO 1.3

Simplifique y exprese los resultados de los siguientes problemas, libres de exponentes negativos.

1.- $4^2 \cdot 4^{-3}$

2.- $2^{-3} \cdot 2^{-2}$

3.- $(3^{-2})^2$

4.- $\left(\dfrac{10x^2\,y^3}{5xy^2}\right)^{-4}$

5.- $\dfrac{2^{-1} + 3^{-1}}{2^{-1}}$

6.- $\dfrac{X^{-2}\,Y^{-2}}{X^{-1} + Y^{-1}}$

7.- $(a^{-2}b)^{-3}$

8.- $(2^{-1}\,a^{-3}\,b^{-1})^{-4}$

9.- $\dfrac{a^{-3}\,b^{-2}}{a^{-4}\,b^{-1}}$

10.- $\dfrac{2^{-2}\,m^{-3}\,n^4}{3^{-3}m^{-4}\,n^{-2}}$

11.- $\dfrac{4a^{-3}b^{-5}}{8a^2\,b^3}$

12.- $\left(\dfrac{2a^{-1}\,b^0}{3a^2\,b^{-3}}\right)^{-2}$

13.- $\left(\dfrac{4^{-1}\,a^2\,b^{-2}}{2^{-2}\,a^{-3}\,b^{-1}}\right)^3$

14.- $\dfrac{Y^{-2}}{X^2 - Y^{-2}}$

15.- $\dfrac{X^2 + Y^{-2}}{(XY)^{-2}}$

16.- $\dfrac{Y^{-1} + X^{-1}}{Y^{-1} - X^{-1}}$

17.- $\dfrac{Y^{-2} + 3x^{-1}\,Y^{-1} + 2x^{-2}}{X^{-1}\,Y^{-2} - x^{-2}\,Y^{-1}}$

18.- $\dfrac{X^{-1}\,Y^{-2} + X^{-2}\,Y^{-1}}{Y^{-2} - X^{-2}}$

19.- $-3(a-1)(a+1)^{-4} + (a+1)^{-3}$

20.- $-(x+3)^2\,(X-2)^{-3} + (X-2)^{-2}\,(X+3)$

EXPONENTES FRACCIONARIOS

En esta sección estudiaremos los números con exponentes que no son enteros, pero que se simplifican aplicando las leyes de los exponentes que ya tratamos anteriormente.

Un número con exponente fraccionario puede ser expresado también como la potencia de un radical. El denominador del exponente es el índice del radical y el numerador indica la potencia a la cual se eleva el radical.

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Por lo tanto las leyes se expresarán como sigue:

Ley No. 1: $a^{1/m} \cdot a^{1/n} = a^{1/m + 1/n}$

$$= a^{\frac{n+m}{mn}}$$

Ley No. 2: $\dfrac{a^{1/m}}{a^{1/n}} = a^{1/m - 1/n}$

$$= a^{\frac{m-n}{mn}}$$

Ley No. 3: $(a^{1/m})^{1/n} = a^{1/m \cdot 1/n}$

$$= a^{1/mn}$$

Ley No. 4: $(a^{1/x}\, b^{1/y})^{1/n} = a^{1/xn}\, b^{1/yn}$

Ley No. 5: $\left(\dfrac{a^{1/x}}{b^{1/y}}\right)^{1/n} = \dfrac{a^{1/xn}}{b^{1/yn}}$

Ejemplo a): $64^{2/3} = \sqrt[3]{64^2}$

b): $\sqrt{25} = 25^{1/2}$

EJERCICIO 1.4

Expresa sin exponentes o radicales los siguientes problemas.

1.- $125^{1/3}$

2 $64^{1/2}$

3.- $16^{2/4}$

4. $\left(\frac{8}{27}\right)^{2/3}$

5. $\left(\frac{16}{81}\right)^{2/4}$

6. $\left(\frac{125}{64}\right)^{2/3}$

7.- $4^{-1/2}$

8. $8^{-1/3}$

9. $16^{-2/4}$

10.- $\sqrt{16}$

11.- $\sqrt[3]{216}$

12.- $\sqrt[4]{81}$

13.- $\sqrt[3]{8X^3Y^6}$

14.- $\sqrt{144\, a^4\, b^6}$

15.- $\sqrt{\frac{49\, a^{12}}{81\, b^6}}$

16.- $\sqrt[5]{\frac{243\, a^5}{X^{10}\, Y^{20}}}$

EJERCICIO 1.5

Simplifique las siguientes expresiones.

1.- $X^{1/2}\ X^{1/4}$

2.- $a^{2/3}\ a^{3/4}$

3. $Y^{3/4}\ Y^{5/2}$

4.- $\frac{a^{3/2}}{a^{4/3}}$

5.- $\frac{h^{1/4}}{h^{5/6}}$

6. $(3a^4b)^{1/3}$

7.- $(2x^{-2}\ y^{-1})^{1/4}$

8.- $(81a^{-4}\ b^{12})^{-4/2}$

9.- $\left(\frac{16a^{-4}\ b^{2/5}}{9^{-1}\ x^4\ b^{2/3}}\right)^{1/2}$

10.- $\left(\frac{3^{-5}\ m^{-3}\ a^5}{27^{-2}\ m^{-2}\ a^3}\right)^{-1/2}$

11.- $\left(\frac{243\ x^{1/3}\ y^{-2/3}}{32x^{-1/2}\ y}\right)^{-2/5}$

12.- $\left(\frac{5^{4/3}\ x^{5/6}\ y^{-1/3}}{16^{2/3}\ x^{1/2}\ y^{5/9}}\right)^{3/4}$

13.- $\left(\frac{16\ x^{-2/5}\ y^0}{9x^{2/5}\ y^{-2/5}}\right)^{-5/2}$

14.- $(9x^2\ y^4)^{1/2}\ (8x^3\ y^6)^{1/3}$

15.- $(16a^4\ b^{-8})^{-3/4}\ (32^{-1}\ a^5\ b^5)^{1/5}$

16.- $(x+1)\ (2x-1)^{-1/2} + (2x-1)^{1/2}$

17.- $(2x-1)\ (3x+2)^{-1/3} + (3x+12)^{2/3}$

18.- $4(x+1)\ (2x-3)^{-3/5} + 5\ (2x-3)^{2/5}$

19.- $\left(\dfrac{8a^3\ y^{3/4}}{27^{-1}\ b^6}\right)^{1/6}$

20.- $\dfrac{(20x-1)^{1/2}\ (x-2)^{-1/3} + 3\,(x-2)^{2/3}}{(2x-1)^{1/2}}$

RADICALES

Ya demostramos que toda potencia de un número está relacionado con términos radicales y que todo número con exponente fraccionario puede ser expresado como la potencia de un radical.

Una de las raíces cuadradas de 16 es + 4, expresado en otra forma $16 = +4$; y el término $4^{1/2}$ es igual a $\sqrt{4}$; podemos concluír que un número X es la raíz enésima de b si $x^n = b$.

Si existe la raíz real positiva o negativa de un número ésta se denomina RAIZ ENESIMA PRINCIPAL y la notación más usual es $\sqrt[n]{a}$.

CONCEPTOS:

RADICAL: $\sqrt{\ }$ indica que se debe extraer la raíz a determinado número.

INDICE DEL RADICAL: Se coloca en el ángulo del radical ($\sqrt[3]{\ }$) y nos indica la raíz que se debe extraer a determinado número.

RADICANDO: Es la cantidad afectada por un radical ($\sqrt[3]{8}$) y se coloca dentro de éste.

RAIZ: Es cada uno de los factores iguales en que se descompone un número.

Para simplificar expresiones que contienen radicales, es necesario conocer las leyes que mostraremos a continuación.

Ley No. 1: Raíz de un producto

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$$

Ley No. 2: Raíz de un cociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ley No. 3: Raíz de una raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Ley No. 4: $\sqrt[cn]{a^{cm}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ley No. 5: $\sqrt[n]{a^m}\ \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$

EJERCICIO 1.6

Deje fuera del radical todos los factores posibles.

1.- $\sqrt{12}$

2.- $\sqrt{32}$

3.- $\sqrt{50}$

4.- $\sqrt{128}$

5.- $\sqrt{98}$

6.- $\sqrt[3]{108}$

7.- $\sqrt[3]{24}$

8.- $\sqrt[3]{54}$

9.- $\sqrt[3]{16}$

10.- $\sqrt{10x^2y^4}$

11.- $\sqrt[3]{27a^6b^3}$

12.- $\sqrt[5]{32y^6z^7}$

13.- $\sqrt[4]{48x^6y^4}$

14.- $\sqrt[5]{64a^9y^8}$

15.- $\sqrt[4]{\dfrac{3a^7}{16y^8}}$

16.- $\sqrt{\dfrac{2y^5}{3x^3}}$

17.- $\sqrt[3]{\dfrac{2b^4}{125x^9}}$

18.- $\sqrt[5]{\dfrac{486x^6y^9}{32a^7}}$

19.- $\sqrt[3]{363}$

20.- $\sqrt[4]{32}$

21.- $\sqrt[4]{512}$

22.- $\sqrt[4]{80}$

23.- $\sqrt[4]{405}$

24.- $\sqrt[4]{3125}$

25.- $\sqrt{\dfrac{4a^3}{8b^4}}$

26.- $\sqrt[3]{\dfrac{24x^6y^7}{54c^8}}$

27.- $\sqrt{\dfrac{8x^5}{3y^7}}$

28.- $\sqrt{\dfrac{2x^6}{81a^{12}}}$

29.- $\sqrt{\dfrac{16x^9}{9z^8}}$

30.- $\sqrt{\dfrac{32a^9}{18b^7}}$

EJERCICIO 1.7

Redúzcase el orden del radical

1.- $\sqrt[4]{9}$

2.- $\sqrt[6]{8}$

3.- $\sqrt[9]{27x^6y^{12}}$

4.- $\sqrt[8]{9x^6}$

5.- $\sqrt[5]{32}$

7.- $\sqrt[6]{64a^3y^{18}}$

6.- $\sqrt[8]{16}$

8.- $\sqrt[10]{32x^5}$

EJERCICIO 1.8

Exprese en un solo radical

1.- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}}$

7.- $\sqrt[4]{8\sqrt{8}}$

2.- $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}$

8.- $\sqrt[5]{\sqrt{a^5}}$

3.- $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{16}}$

9.- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{}}}$

4.- $\sqrt{\sqrt[6]{625a^8}}$

10.- $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{2a}}}$

5.- $\sqrt[10]{\sqrt{81y^8}}$

11.- $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt{3a}}}$

6.- $\sqrt[3]{3\sqrt{5}}$

12.- $\sqrt[6]{\sqrt{\sqrt[3]{8}}}$

MULTIPLICACION DE RADICALES

DEL MISMO ORDEN

Para multiplicar radicales del mismo orden solo se efectúa el producto de los radicandos.

Ejemplo a): $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5}$

$= \sqrt{15}$

b): $\sqrt[3]{2a^2} \times \sqrt[3]{3a^3} \times \sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{2a^2 \times 3a^3 \times a^6}$

$= \sqrt[3]{6a^{12}}$

DE DIFERENTE ORDEN

Para multiplicar radicales de diferente orden primero se convierte a exponentes fraccionarios, segundo se reducen a un denominador común, tercero se expresa nuevamente en forma radical y finalmente se multiplican los radicales.

Ejemplo: $(\sqrt{2x^3y})(\sqrt[3]{4xy^4}) = (2^{1/2}\ x^{3/2}\ y^{1/2})^{3/3}\ (4^{1/3}\ x^{1/3}\ y^{4/3})^{2/2}$

$= (2^{3/6}\ x^{9/6}\ y^{3/6})\ (4^{2/6}\ x^{2/6}\ y^{8/6})$

$= \sqrt[6]{2^3\,x^9\,y^3}\ \ \sqrt[6]{4^2\,x^2\,y^8}$

$$= \sqrt[6]{(2^3)(4^2)\,x^{11}\,y^{11}}$$

$$= \sqrt[6]{(2^3)(2^4)\,x^{11}\,y^{11}}$$

$$= \sqrt[6]{2^7\,x^{11}\,y^{11}}$$

$$= \sqrt[6]{(2\,xy)^6\,2x^5\,y^5}$$

$$= 2xy\,\sqrt[6]{2x^5y^5}$$

EJERCICIO 1.9

Efectúe las siguientes multiplicaciones y redúzcas el orden del radical cuando sea necesario.

1.- $\sqrt{2}\ \sqrt{8}$

2.- $\sqrt[3]{9}\ \ \sqrt[3]{3}$

3.- $\sqrt[4]{8}\ \ \sqrt[4]{2}$

4.- $\sqrt[3]{16}\ \ \sqrt[3]{4}$

5.- $\sqrt{6x^3y}\ \ \sqrt{2xy^3}$

6.- $\sqrt{8x^5y^2}\ \ \sqrt{xy^3}$

7.- $\sqrt[3]{9x^4k^2}\ \ \sqrt[3]{6hk4}$

8.- $\sqrt[3]{16a^3c}\ \ \sqrt[3]{4ac^4}$

9.- $\sqrt{24dt^5}\ \ \sqrt{6d^3t^2}$

10.- $\sqrt{15xy^3}\ \ \sqrt{5xy^0}$

11.- $\sqrt[6]{5} \times \sqrt[3]{3}$

12.- $\sqrt[4]{2} \times \sqrt{2}$

13.- $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3}$

14.- $\sqrt[4]{5} \times \sqrt{3}$

15.- $\sqrt[4]{5a^2} \times \sqrt[3]{2a}$

16.- $\sqrt[3]{2a} \times \sqrt{5a} \times \sqrt[4]{2a^3}$

17.- $\sqrt[4]{12x^3y^5} \quad \sqrt[4]{8x^2y}$

19.- $\sqrt{5a} \times \sqrt{7a} \times \sqrt[4]{3a}$

18.- $\sqrt[3]{24x^6z^4} \quad \sqrt[3]{9y^3z}$

20.- $\sqrt[3]{x^2y} \times \sqrt[6]{2x^5y^2} \times \sqrt[9]{3x^7y^3}$

DIVISION DE RADICALES

DEL MISMO ORDEN

Para obtener el cociente de dos radicales solo se dividen los radicandos, aplicando la ley que se menciona en esta sección.

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{250x^7y^5}}{\sqrt[3]{2xy^3}} = \sqrt[3]{\frac{250x^7y^5}{2xy^3}}$$

$$= \sqrt[3]{125x^6y^2}$$

$$= \sqrt[3]{5^3(x^2)^3y^2}$$

$$= 5x^2\sqrt[3]{y^2}$$

DE DIFERENTE ORDEN

Se aplica el mismo procedimiento que estudiamos en la multiplicación; se convierte la expresión a exponente fraccionario y se obtiene un denominador común, se expresa nuevamente en radical y se desarrolla la división.

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{(3^{1/2})^{3/3}}{(9^{1/3})^{2/2}}$$

$$= \frac{3^{3/6}}{9^{2/6}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{9^2}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{27}{81}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$$

EJERCICIO 1.10

Efectúe las siguientes divisiones y reduzca el orden del radical cuando sea necesario.

1.- $\dfrac{\sqrt{27}}{3}$

2.- $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$

3.- $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$

4.- $\dfrac{\sqrt[4]{489}}{\sqrt[4]{6}}$

5.- $\dfrac{\sqrt{3a^3 b^2}}{\sqrt{2ab}}$

6.- $\dfrac{\sqrt[3]{16x^6 y^4}}{\sqrt[3]{2x^2 y}}$

9.- $\sqrt{\dfrac{3x^5}{2y^3}} \quad \sqrt{\dfrac{6y}{8x^2}}$

10.- $\sqrt{\dfrac{4a^2}{5b}} \quad \sqrt{\dfrac{2a}{9b^2}}$

11.- $\sqrt[3]{\dfrac{14a^4 b^2}{2bc^2}} \quad \sqrt[3]{\dfrac{8ab^3}{a^2 c}}$

12.- $\sqrt[3]{\dfrac{6x^3 y}{3x^2}} \quad \sqrt[3]{\dfrac{4x^2 y^2}{18y}}$

13.- $\dfrac{\sqrt{3x} \quad \sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[4]{3x^3}}$

14.- $\dfrac{\sqrt[3]{3a^2 b} \quad \sqrt[6]{9a^5 b^3}}{\sqrt{3ab}}$

7.- $\dfrac{\sqrt{24x^5 y^7}}{\sqrt{2x^2 y^3}}$

8.- $\dfrac{\sqrt[3]{128a^8 b^5 c^3}}{\sqrt[3]{2a^2 bc}}$

15.- $\dfrac{\sqrt{3xy} \quad \sqrt[4]{x^2 y^3}}{\sqrt[3]{xy^2}}$

16.- $\dfrac{\sqrt[3]{4x^2 y} \quad \sqrt[4]{8x^3 y^2}}{\sqrt{2xy}}$

SUMA Y RESTA DE RADICALES

Para sumar dos o más radicales del mismo orden, es necesario que los radicandos sean **términos semejantes y posteriormente** se suman los coeficientes de éstos.

Ejemplo a): $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2+3+1)\sqrt{2}$

$= 6\sqrt{2}$

b): $\sqrt{8a} + 2\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = \sqrt{(4)(2)a} + 2\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a}$

$= 2\sqrt{2a} + 2\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a}$

$= (2+2-3)\sqrt{2a}$

$= \sqrt{2a}$

c): $\sqrt{3a} - 5\sqrt{3a} + 6\sqrt{2a} = (3-5)\sqrt{3a} + 6\sqrt{2a}$

$= -2\sqrt{3a} + 6\sqrt{2a}$

EJERCICIO 1.11

Efectúa las siguientes operaciones, transformando, cuando sea necesario, a términos semejantes los radicandos.

1.- $7\sqrt{5} + 8\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$

2.- $8\sqrt{6} - 3\sqrt{6} - 11\sqrt{6}$

3.- $\sqrt{7a} - 9\sqrt{7a} + 3\sqrt{a}$

4.- $5\sqrt{27a} + 3\sqrt{3a} - 15\sqrt{3a}$

5.- $\sqrt{7a} - \sqrt{28a} - \sqrt{63}$

6.- $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + \sqrt{72a}$

7.- $\sqrt{27a^3} + \sqrt{48a} - \sqrt{12a^3}$

8.- $\sqrt{50a^3} - \sqrt{8a} + \sqrt{32a^3}$

9.- $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$

10.- $2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$

11.- $\sqrt{a^3} + \sqrt{8b^3} - 2\sqrt{a} + 3b\sqrt{18b}$

12.- $7\sqrt{5a} + 6\sqrt{3b} - \sqrt{45}a + \sqrt{27}b$

13.- $2\sqrt{a^4b} - a\sqrt{9a^2b} + a^2\sqrt{16b}$

14.- $\sqrt{2x^3}y^5 + \sqrt{8x^5}y - \sqrt{50x^7y^3}$

15.- $\sqrt{m^5n} - \sqrt{4m^3n^3} + \sqrt{mn^5}$

RACIONALIZACION DE FRACCIONES

Para racionalizar una fracción, se multiplican el numerador y el denominador de la fracción por una cantidad tal que desaparezcan los radicales del denominador.

Ejemplo a):

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{3 \times 5}}{\sqrt{5 \times 5}}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$$

b):

$$\frac{\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt[3]{3a^2}} = \frac{\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt[3]{3a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{9a}}{\sqrt[3]{9a}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(2a^2)(9a)}}{\sqrt[3]{(3a^2)(9a)}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{18a^3}}{\sqrt[3]{27a^3}}$$

$$= \frac{a\sqrt[3]{18}}{3a}$$

EJERCICIO 1.12

Racionalize los denominadores de las siguientes expresiones.

1.- $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}$

2.- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

3.- $\dfrac{3a}{\sqrt{6}}$

4.- $\dfrac{2}{3\sqrt{a}}$

5.- $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}}$

6.- $\dfrac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{3b}}$

7.- $\dfrac{\sqrt{16x}}{x} + \dfrac{\sqrt{9x^3}}{x^2} - \dfrac{6}{\sqrt{x}}$

8.- $\dfrac{a\sqrt{8a}}{b} - \dfrac{\sqrt{18a^3}}{b} + \dfrac{10a^2}{b\sqrt{2a}}$

9.- $5x\sqrt{\dfrac{3y^2}{2}} - 3y\sqrt{\dfrac{8x^2}{3}} + 2\sqrt{\dfrac{3x^2\,y^2}{2}}$

10.- $\dfrac{\sqrt{6a^3}}{b} - \sqrt{\dfrac{9a}{6b^2}} + \dfrac{4a}{b\sqrt{6a}}$

11.- $\dfrac{2a}{3-\sqrt{2}}$

12.- $\sqrt{\dfrac{a-3b}{a+3b}} + \sqrt{\dfrac{a+3b}{a-3b}}$

$$\frac{\sqrt[4]{3a^2}}{\sqrt[4]{2b^2}}$$

15.- $x\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + y\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} - \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$

14.- $\frac{\sqrt[4]{5b^3}}{\sqrt[4]{3a^2}}$

UNIDAD II

"El verdadero espíritu de alegría, de exaltación, el sentimiento de ser más que un hombre, que son la piedra de toque de la excelencia más elevada, se hallan en las matemáticas como en la poesía.

Bertrand Russell.

$$\frac{\sqrt[4]{3a^2}}{\sqrt[4]{2b^2}}$$

15.- $x\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + y\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} - \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$

14.- $\frac{\sqrt[4]{5b^3}}{\sqrt[4]{3a^2}}$

UNIDAD II

"El verdadero espíritu de alegría, de exaltación, el sentimiento de ser más que un hombre, que son la piedra de toque de la excelencia más elevada, se hallan en las matemáticas como en la poesía.

Bertrand Russell.

UNIDAD II

LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES

El concepto de Logaritmo se introdujo a las Matemáticas a fines del Siglo XVI, para simplificar las operaciones de división, multiplicación, potencias y raíces, se aplica también en la Química, Física y en la computación numérica.

Existen los logaritmos de Neper, inventor de éstos, y se utilizan en cálculos avanzados de matemáticas, pues contienen diferentes bases.

Existen también los logaritmos de Briggs o logaritmos comúnes que son los que utilizaremos ya que emplea únicamente la base 10, por lo tanto omitiremos el símbolo de ésta.

El logaritmo de cualquier número N con base "a" es el exponente de la potencia a la que hay que elevar "a" para obtener N, así:

$$a^x = N$$

el logaritmo de N es x cuando la base es a, su notación es:

$$\log_a N = X$$

Para obtener el logaritmo de un número, conoceremos primeramente cada una de las partes que lo forman.

CARACTERISTICA:

Es la parte entera de un logaritmo y para obtenerla en todo número decimal se resta 1 al número de cifras anteriores al punto.

Ejemplo: De 383.567 la característica es 2

De 16.75 la característica es 1

La característica de cualquier número menor que 1 es negativa y se obtiene, sumando al valor absoluto de 1 el número de ceros que hay entre el punto decimal y la primera cifra significativa.

Ejemplo: De $.05 = -(1+1) = \overline{2}$

De $.005 = -(2+1) = \overline{3}$

De $.0005 = -(3+1) = \overline{4}$

De $.00005 = -(4+1) = \overline{5}$

MANTISA:

Es la parte decimal de los logaritmos y se obtiene de las tablas logarítmicas, como los números tienen las mismas cifras, los logaritmos tienen las mismas mantisas, por lo tanto, es independiente de la posición del punto decimal.

Ejemplo:

$\log 3.56 = 0.5514$

$\log 35.6 = 1.5514$

$\log .356 = \overline{1}.5514$

$\log .0356 = \overline{2}.5514$

Para localizar en las tablas, las mantisas de los números cuyo logaritmo se desea conocer, se hará de la siguiente manera.

En la primer columna se encuentran las dos primeras cifras del número, las demás columnas están encabezadas por los números del 0 al 9 que corresponden a la tercer cifra.

La mantisa será la cifra que se encuentra en el cruce de la primer columna con el renglón que contenga la tercer cifra.

Algunas tablas tienen columnas con parte proporcionales que corresponden a la cuarta y quinta cifra. Para la quinta cifra sólo se agrega la décima parte de la parte proporcional.

EJERCICIO 2.1

Encontrar el logaritmo de los siguientes números.

1.- 125

2.- 3.51

3.- 82.651

4.- 0.593

5.- 630.34

6.- 0.0031

7.- 4.6793

8.- 0.09105

9.- 947.38

10.- 0.000498

11.- 24.003

12.- 5396

13.- 84762

14.- 12.763

15.- 0.00589

16.- 0.3709

17.- 5.36

18.- 6321

19.- 0.0015

20.- 936

ANTILOGARITMO:

Es la forma inversa del logaritmo.

Es el número que corresponde a un logaritmo dado.

Para encontrar éste número se utiliza la tabla de antilogaritmos que está formada como sigue:

Las dos primeras cifras de la mantisa se buscan en la primera columna de la tabla de antilogaritmos, se recorre el renglón que las contiene hasta la intersección con la columna que esté encabezada por la tercer cifra de la mantisa, a este número se le agrega lo correspondiente en partes proporcionales a la cuarta cifra de la mantisa. Se utiliza la característica para encontrar el número pedido.

EJERCICIO 2.2

Encontrar los antilogarítmos de los siguientes números.

1.- 3.7816	6.- $\overline{2}.6609$
2.- 0.9192	7.- 0.5765
3.- $\overline{3}.6484$	8.- 1.8406
4.- 4.3074	9.- $\overline{4}.5683$
5.- $\overline{1}.8350$	10.- $\overline{2}.7055$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Para realizar operaciones aritm[illegible] necesario enunciar las siguientes propiedades.

Propiedad 1: Logaritmo de un producto.

Para encontrar el logaritmo del producto de dos números positivos se suman los logaritmos de los números.

Así: $\log xy = \log x + \log y$

Propiedad 2: Logaritmo de un cociente.

Para encontrar el logaritmo del cociente de dos números positivos se resta al logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor.

Así: $\log. \frac{x}{y} = \log. x - \log. y$

Propiedad 3: Logaritmo de una potencia.

Para encontrar el logaritmo de una potencia de un número positivo se multiplica el exponente de la potencia por el logaritmo del número.

Así: $\log. x^n = n \log. x$

Propiedad 4: Logaritmo de una raíz.

Para encontrar el logaritmo de la raíz de una cantidad, se divide el logaritmo de la cantidad entre el índice del radical.

Así: $\log. \sqrt[n]{x} = \frac{\log. x}{n}$

Ejemplo a) Calcular (145) (23.6)

$= \log 145 + \log 23.6$

$= 2.1614 + 1.3729$

$= 3.5343$

Antilog 3.5343 = 3422

b) Calcular 53.6 ÷ 1.6

$= \log 53.6 - \log. 1.6$

$= 1.7296 - 0.2041$

$= 1.5255$

Antilog 1.5255 = 33.54

c) Calcular $\dfrac{(824)\ (1.53)}{(34.2)\ (.635)}$

$= (\log 824 + \log. 1.53) - (\log. 34.2 + \log. .635)$

$= (3.9159 + 0.1847) - (1.5340 + 9.8028 - 10)$

$= (4.1006) - (11.3368 - 10)$

$= 4.1006 - 1.3368$

$= 2.7638$

Antilog 2.7638 = 580.5

d) Calcular 923^4

$= 4 \times \log 923$

$= 4 \times 2.9652$

$= 11.8608$

Antilog 11.8608 = 725700000000

e) Calcular $\sqrt{15.3}$

$$= \frac{\log\ 15.3}{2}$$

$$= \frac{1.1847}{2}$$

$$= .59235$$

Antilog $0.59235 = 3.911$

EJERCICIO 2.3

Realice las siguientes operaciones aplicando las propiedades de los logaritmos.

1.- $.5294 \times .0721$

2.- 72.5×4708

3.- 4.025×45.72

4.- $.0000793 \times 12.5$

16.- $\sqrt{.0905}$

17.- $\sqrt[4]{878}$

18.- $\sqrt[3]{.543}$

19.- $\sqrt[5]{25.4}$

5.- $.017 \times .439$

6.- $593 \div 23$

7.- $3.75 \div 75.4$

8.- $.00194 \div 1.72$

9.- $5600 \div 3.09$

10.- $87.3 \div 1.76$

11.- 16^3

12.- 250^2

13.- $.0353^4$

14.- 13.97^2

15.- 1984^2

20.- $\sqrt[6]{.7500}$

21.- $(3.25 \times 4.36)^2$

22.- $(3.57 \div 2.96)^5$

23.- $\dfrac{(935)\ (23.6)}{(19.6)\ (.034)}$

24.- $\dfrac{5.32}{(405)\ (7.6)}$

25.- $(6.31)^3\ (1.09)^4$

26.- $(93.6)^2\ (2.36)^3$

27.- $(29.5)\ (1.56)\ (4.96)$

28.- $(.396)\ (9.34)\ (31.6)$

29.- $\sqrt[5]{86.2 \times .555}$

30.- $\sqrt{\dfrac{(2.97)^2\ (70.3)}{35.1}}$

UNIDAD III

"Nos inclinamos a creer que la literatura y las artes de nuestro tiempo nan desconocido doblemente la función civilizadora de las matemáticas. Han sacrificado el rigor, que representa la parte que desempeña la conciencia clara en toda creación y han ignorado una de las fuentes más originales del lirismo".

Le Lionnais.

UNIDAD III

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS

Un número complejo es un número de la clase $a + bi$, en donde a y b son reales e $i^2 = -1$, ó $i = \sqrt{-1}$

CONCEPTOS

NUMERO REAL.– Los números reales incluyen todos los números racionales, junto con todos los números irracionales. Todo número que puede representarse por fracciones decimales, incluyendo tanto las que se repiten como las que no terminan ni se repiten, es un número real.

NUMERO IMAGINARIO.– En la notación $a + bi$, a es la parte real y bi es la parte imaginaria, si b es diferente a cero, el número complejo se denomina número imaginario.

FORMA RECTANGULAR.– Cada número complejo (a, b) se puede escribir en la forma $a + bi$ que es llamada la forma rectangular.

Antes de entrar por completo al estudio de los números complejos, haremos una breve introducción acerca de su origen.

Hemos utilizado hasta ahora para resolver problemas algebráicos, el sistema de los números reales, que comprenden los números enteros positivos, enteros negativos, racionales e irracionales, pero existen dentro de este sistema un tipo de números que se dan como resultado de las ecuaciones cuadráticas principalmente y que son los números imaginarios o complejos, aunque se ha extendido su uso en la Física e Ingeniería.

Sabemos que una ecuación cuadrática que se expresa como $ax^2 + c = 0$ en donde a y b son constantes, tiene como conjunto de soluciones o raíces, dos valores para x, puesto que se obtienen de una raíz cuadrada:

Ejemplo 1. Las raíces de $x^2 - 16 = 0$

son $x = \pm 4$

Ejemplo 2. Las raíces de $x^2 + 9 = 0$

son $x = \pm \sqrt{-9} = \pm 3i$

Al llegar a esta última solución fué necesario introducir el término de número complejo o imaginario, pues ningún número negativo elevado a una potencia par nos da como resultado otro número negativo, por lo tanto la raíz cuadrada de un número siempre será imaginaria.

Para emplear el término $a + bi$, que de ahora en adelante lo reconoceremos como número complejo, y con los cuales realizaremos las cuatro operaciones básicas, es necesario tomar como base el conjunto de los pares ordenados (x, y) y algunas definiciones que nos servirán para demostrar posteriormente algunos teoremas del sistema de números complejos.

Definición 1. Dos pares (x, y) y (x_2, y_2) son iguales si $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Ejemplo: $(x + 2y, 2x - y) = (4, 3)$ si y sólo si $x + 2y = 4$ y $2x - y = 3$

Definición 2. La suma de dos pares ordenados $(x_1 y_1)$ y (x_2, y_2) es el par ordenado $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ y se escribe.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ejemplo: $(2, 1) + (3, 2) = (2 + 3, 1 + 2) = (5, 3)$

Definición 3: El producto de los pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es el par ordenado.

$(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ y se escribe:

$$(x_1 y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Ejemplo: $(2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2) = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2, 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = (4, 7)$

El cociente de dos pares ordenados puede escribirse:

$$\frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \left(\frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x^2{}_2 + y^2{}_2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x^2{}_2 + y^2{}_2} \right)$$

Ejemplo: $$\frac{(4, 8)}{(3, 1)} = \left(\frac{(4 \cdot 3) + (8 \cdot 1)}{3^2 + 1^2} \quad \frac{3 \cdot 8 - 4 \cdot 1}{3^2 + 1^2} \right)$$

$$= \frac{12 + 8}{9 + 1}, \frac{24 - 4}{9 + 1}$$

$$= \frac{20}{10}, \frac{20}{10}$$

$$= 2, 2$$

$$= (2, 2)$$

Una de las interpretaciones más usuales, del algebra de pares ordenados está constituída por el álgebra de los números complejos. La expresión $a + bi$ en que a y b son números reales e i tiene la propiedad $i^2 = -1$, recibe el nombre de número complejo. Si $b = 0$, el número es real pero si $b \neq 0$ el número complejo se dice que es imaginario y si $a = 0$ y $b \neq 0$, $a + bi$ es un número imaginario puro.

Mencionaremos algunas definiciones importantes para el estudio de los números complejos.

OPERACIONES BASICAS CON NUMEROS COMPLEJOS

Definición 1. La suma, diferencia, producto y cociente de dos números complejos son definidos por las siguientes ecuaciones.

Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Diferencia: $(a + bi) - (c + d)i = (a - c) + (b - d)i$

Producto: $(a + bi)(c + d)i = (ac - bd) + (bc + ad)i$

Cociente: $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

Definición 2. Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Definición 3. Los números $a + bi$ y $a - bi$ son llamados números conjugados.

De éstas definiciones podemos deducir los siguientes Teoremas.

TEOREMA 1

El número $1 + 0 \cdot i$ es una identidad multiplicativa única dentro del sistema de los números complejos $a + bi$.

Demostración: Sea $c + di$ un número tal que

$$(a + bi)(c + di) = a + bi$$

Multiplicando:

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = a + bi$$

y

$$ac - bd = a$$

$$ab + bc = b$$

La solución a éste sistema de ecuaciones lineales es $c = 1$ y $d = 0$, por lo tanto se concluye que $1 + 0 \cdot i$ ó 1 es el elemento de identidad para la multiplicación.

TEOREMA 2

Un número complejo $a + bi$, con a ó b nulos, más no los dos nulos, tiene un inverso multiplicativo único.

Demostración: Sea $c + di$ un número tal que $(a + bi)(c + di) = 1$

por lo tanto $(ac - bd) + (ad + bc) i = 1$

y

$$ac - bd = 1$$

$$ad + bc = 0$$

La solución de éste sistema de ecuaciones en c y d es:

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Por lo tanto, el inverso multiplicativo de $a + bi$ es el número complejo.

$$\frac{a}{a^2 + b^2} \quad \frac{b}{a^2 + b^2} i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

TEOREMA 3

La ley asociativa para la multiplicación es válida para los números complejos. Así:

$$[(a + bi)(c + di)] (e + fi) = (a + bi) [(c + di)(e + fi)]$$

Demostracion: Utilizando las propiedades de cerradura, conmutativa y asociativa para la adición y multiplicación, reduciremos el miembro izquierdo al derecho.

$$= [(a + bi)(c + di)] (e + fi)$$

$$= [(ac - bd) + (ad + bc) i] (e + fi)$$

$$= (ac - bd) e - (ad + bc) f + [(ac - bd) f + (ad + bc) e] i$$

$$= a(ce - df) - b(cf + de) + [a(cf + de) i + b(ce - df) i]$$

$$= (a + bi) [(c + di)(e + fi)]$$

TEOREMA 4

Los números complejos obedecen a las leyes de cerradura y de conmutatividad para la adición y la multiplicación.

TEOREMA 5

Los números complejos obedecen a la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Así:

$$(a + bi) [(c + di) + (e + fi)] = (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi)$$

Concluímos que la suma, la diferencia y el producto de dos números complejos se obtienen llevando a cabo las operaciones como si i fuese un número real y para el producto sustituyendo i^2 por -1, para el cociente de dos números complejos puede obtenerse multiplicando el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor.

Ejemplo a): $(3+4i)+(2-7i)$

$$= 3+2+i(4-7) = 5-3i$$

b): $(3+4i)-(2-7i)$

$$= 3-2+i(4+7) = 1+11i$$

c): $(3+4i)(2-7i)$

$$= 6+i(8-21)-28i^2$$

$$= 6-13i-28i^2$$

$$= 6-13i-28(-1)$$

$$= 6-13i+28$$

$$= 34-13i$$

d): $\dfrac{3+4i}{2-7i}$

$$= \frac{(3+4i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)}$$

$$= \frac{6+i(21+8)+28i^2}{4-49i^2}$$

$$= \frac{6+29i+28i^2}{4-49i^2}$$

$$= \frac{6+29i+28(-1)}{4-49(-1)}$$

$$= \frac{-22+29i}{53}$$

EJERCICIO 3.1

Efectúe las operaciones indicadas.

1.- $(3 + 2i) + (5 + 3i)$

2.- $(2 + 5i) + (4 - i)$

3.- $(4 + 3i) + (2 + 5i)$

4.- $(2 - 3i) + (1 + 2i)$

5.- $(4 + i) - (1 + 3i)$

6.- $(9 - 3i) - (7 + i)$

7.- $(2 + i) - (3 + 2i)$

8.- $(7 - 4i) - (-6 + 4i)$

9.- $(4 - i) - (2 - 3i) - (-2 + 9i)$

10.- $(9 + 7i) - (-9 + 7i) + (-18 + i)$

11.- $(5 + 2i)(3 - 6i)$

12.- $(1 - 3i)(4 + 5i)$

13.- $(-7 + 4i)(3 - 4i)$

14.- $(2 - 3i)(3 + 5i)$

15.- $\dfrac{6 + 12i}{3i}$

16.- $\dfrac{4}{4 - 3i}$

17.- $\dfrac{3 - i}{3 + 2i}$

18.- $\dfrac{4 - 3i}{4 + 3i}$

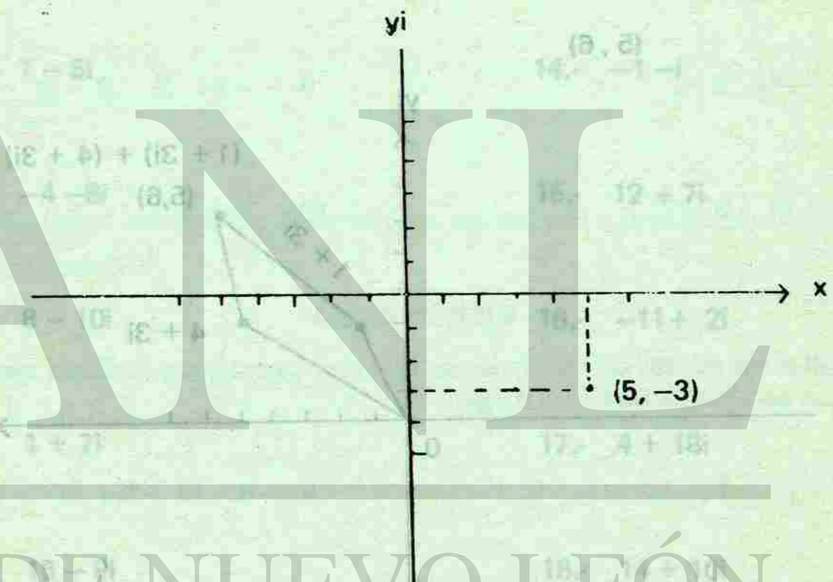
19.- $(3 + 4i)(4 + 3i)(2 - 5i)$

20.- $(3 - 2i)(2 + i)(1 - i)$

REPRESENTACION GRAFICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Para graficar números complejos, se emplea el plano coordenado rectangular. Su representación son puntos en el plano, en donde el eje "x" es el eje real y el eje "y" es el eje imaginario, por lo tanto el número complejo $a + bi$ se representa mediante un punto cuyas coordenadas son (a, b). Al plano le llamaremos el plano complejo.

Ejemplo: Representar en el plano complejo el punto $5 - 3i$.



Podemos graficar también la adición y sustracción de números complejos. Para graficar la suma ó resta de $a + bi$ y $c + di$, primeramente se representan los puntos (a, b) y (c, d), posteriormente la suma o resta de ambos, formando con el origen un paralelogramo.

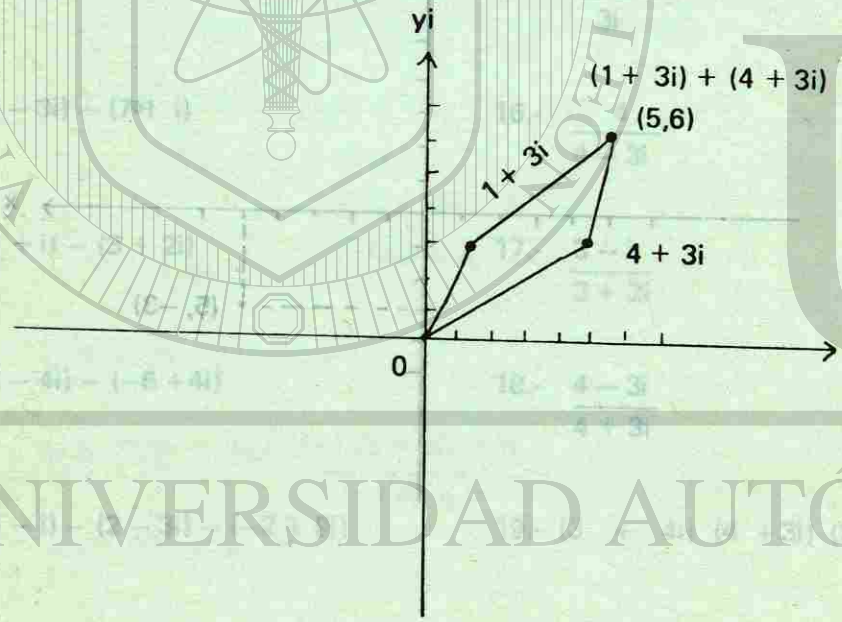
Ejemplo: Representar la suma de $1 + 3i$ y $4 + 3i$.

$(1 + 3i) + (4 + 3i)$

$(1 + 4) + (3 + 3)\,i$

$5 + 6$

$(5\,,6)$



EJERCICIO 3.2

Localice los siguientes números complejos en el plano coordenado.

1.- $6 - 3i$
2.- $-2 + 4i$
3.- $9 + 6i$
4.- $7 - 5i$
5.- $-4 - 8i$
6.- $8 - 10i$
7.- $1 + 7i$
8.- $15 - 9i$
9.- $-6 + 1i$
10.- $-3 - 2i$
11.- $12 + 8i$
12.- $3 - 3i$
13.- $5 - 2i$
14.- $-1 - i$
15.- $12 + 7i$
16.- $-11 + 2i$
17.- $4 + 18i$
18.- $14 + 10i$
19.- $6 - 2i$
20.- $-1 - 5i$

EJERCICIO 3.3

Localice los puntos correspondientes a los siguientes números complejos y su suma, luego trace el paralelogramo que se forma con los tres puntos y el origen.

1.- $1 + 3i$, $4 + 3i$

2.- $-2 + 4i$, $3 + i$

3.- $2 - 2i$, $2 + 2i$

4.- $-3 - 4i$, $5 - i$

5.- $1 + 4i$, $3 + i$

6.- $-3 - i$, $2 + 5i$

7.- $3 - 2i$, $2 + 3i$

8.- $-2 + 5i$, $3 - 4i$

9.- $-3 + 7i$, $3 + 2i$

10.- $5 + 3i$, $7 - i$

EJERCICIO 3.4

Localice los puntos de los siguientes números complejos y verifique que su resta formen un paralelogramo con el origen.

1.- $4 + 5i$, $1 + 3i$

2.- $7 + 8i$, $2 + 5i$

3.- $2 + 5i$, $1 - 2i$

4.- $1 + 4i$, $2 - 3i$

5.- $8 + 9i$, $5 + 7i$

6.- $11 + 4i$, $8 + 2i$

7.- $3 + 5i$, $2 - i$

8.- $2 - 5i$, $4 - 7i$

UNIDAD IV

"La música es un ejercicio de aritmética secreta y el que se entrega a ella ignora que maneja números".

Leibniz.

EJERCICIO 3.3

Localice los puntos correspondientes a los siguientes números complejos y su suma, luego trace el paralelogramo que se forma con los tres puntos y el origen.

1.- $1 + 3i$, $4 + 3i$

2.- $-2 + 4i$, $3 + i$

3.- $2 - 2i$, $2 + 2i$

4.- $-3 - 4i$, $5 - i$

5.- $1 + 4i$, $3 + i$

6.- $-3 - i$, $2 + 5i$

7.- $3 - 2i$, $2 + 3i$

8.- $-2 + 5i$, $3 - 4i$

9.- $-3 + 7i$, $3 + 2i$

10.- $5 + 3i$, $7 - i$

EJERCICIO 3.4

Localice los puntos de los siguientes números complejos y verifique que su resta formen un paralelogramo con el origen.

1.- $4 + 5i$, $1 + 3i$

2.- $7 + 8i$, $2 + 5i$

3.- $2 + 5i$, $1 - 2i$

4.- $1 + 4i$, $2 - 3i$

5.- $8 + 9i$, $5 + 7i$

6.- $11 + 4i$, $8 + 2i$

7.- $3 + 5i$, $2 - i$

8.- $2 - 5i$, $4 - 7i$

UNIDAD IV

"La música es un ejercicio de aritmética secreta y el que se entrega a ella ignora que maneja números".

Leibniz.

UNIDAD IV

SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS

Las ecuaciones que trataremos en ésta unidad son las llamadas ECUACIONES CUADRATICAS pues tiene como potencia máxima de la incógnita la segunda potencia, esta es una característica importante independientemente del número de incógnitas que tenga.

Toda ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ en la que $a \neq 0$ es una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática.

Existen tres formas posibles:

Ecuación cuadrática pura, cuando $b = 0$

$$ax^2 + c = 0$$

Ecuación cuadrática mixta incompleta, cuando $c = 0$

$$ax^2 + bx = 0$$

Ecuación cuadrática mixta completa, cuando $a \neq 0,\ b \neq 0$ y $c \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

GRAFICAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

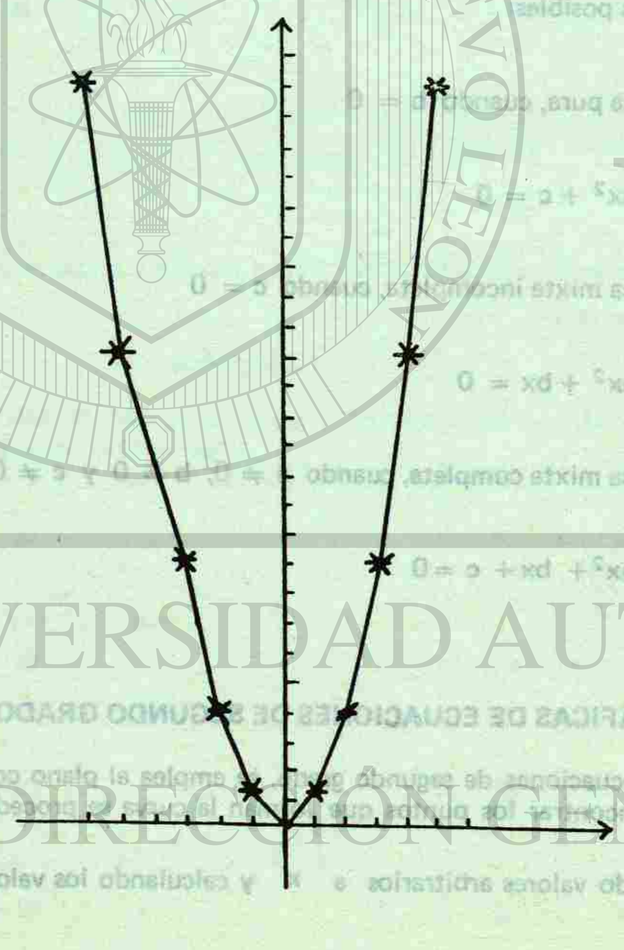
Para graficar ecuaciones de segundo grado, se emplea el plano coordenado rectangular y para encontrar los puntos que forman la curva se procede como sigue:

a) Se tabula dando valores arbitrarios a **x** y calculando los valores correspondientes a **y** .

b) Se marcan en el plano los puntos encontrados y se unen dichos puntos con un trazo continuo, para obtener la gráfica pedida.

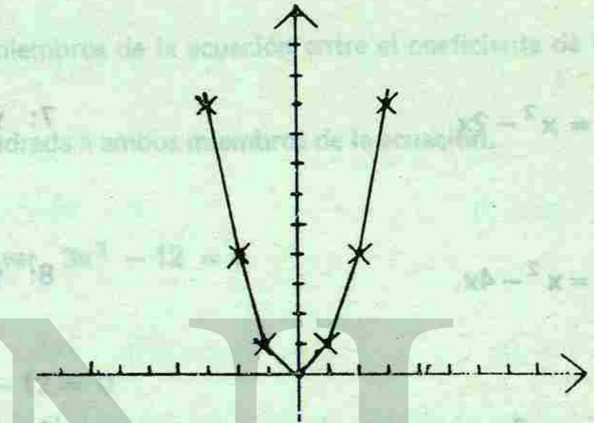
Ejemplo a): Graficar $y = x^2$

Punto	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
X	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
Y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25



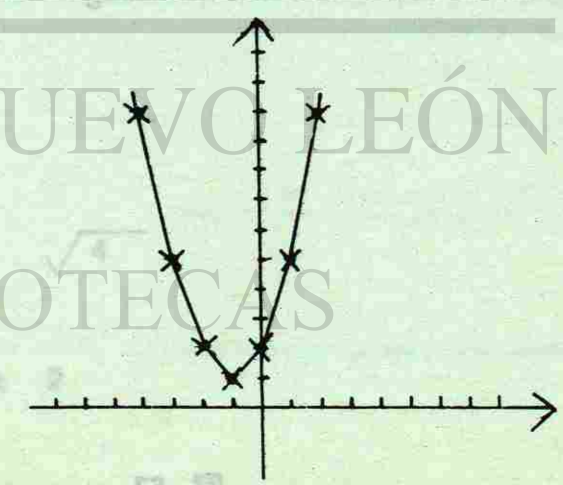
b): Graficar $y = x^2 - 4x$

Punto	A	B	C	D	E	F	G
X	–3	–2	–1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	3



c): Graficar $y = x^2 + 2x + 2$

Punto	A	B	C	D	E	F	G
X	–4	–3	–2	–1	0	1	2
Y	10	5	2	1	2	5	10



EJERCICIO 4.1

Traze la gráfica de las siguientes ecuaciones.

1: $y = 3x^2$

2: $y = x^2 - 2x$

3: $y = x^2 - 4x$

4: $y = 2x^2 - 2x$

5: $y = \frac{1}{4}x^2$

6: $y = x^2 + 2x + 5$

7: $y = x^2 + 4x - 5$

8: $y = x^2 - 5x + 6$

9: $y = 9x^2 - 16$

10: $y = x^2 - 9x + 14$

SOLUCION DE LA ECUACION CUADRATICA PURA

Para resolver analíticamente una ecuación cuadrática pura, emplearemos el siguiente método:

a) Se despeja el término de segundo grado.

b) Se dividen ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente de la incógnita.

c) Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación.

Ejemplo: Resolver $3x^2 - 12 = 0$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

EJERCICIO 4.2

Resuelva las siguientes ecuaciones, aplicando el método expuesto anteriormente.

1.- $2x^2 - 72 = 0$

2.- $6x^2 - 102 = 0$

3.- $25x^2 - 100 = 0$

4. $8x^2 - 72 = 0$

5.- $13x^2 - 39 = 0$

6.- $20x^2 - 120 = 0$

7.- $15x^2 - 75 = 0$

8.- $18x^2 - 36 = 0$

9.- $7x^2 - 7 = 0$

10.- $8x^2 - 120 = 0$

SOLUCION DE LA ECUACION CUADRATICA MIXTA INCOMPLETA

Para resolver analíticamente una ecuación cuadrática mixta incompleta, emplearemos el siguiente método:

a) Se descompone $ax^2 + bx$ en factores.

b) Se iguala a cero cada uno de los factores

c) Se resuelven las dos ecuaciones que resultan.

La ecuación cuadrática mixta incompleta siempre tiene una raiz igual a cero.

Ejemplo: Resolver $x^2 - 5x = 0$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x\ (x - 5) = 0$$

$$x = 0 \qquad x - 5 = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 5$$

EJERCICIO 4.3

Resuelva las siguientes ecuaciones, aplicando el método expuesto anteriormente.

1.- $4x^2 + 10x = 0$

2.- $8x^2 + 24x = 0$

3.- $6x^2 + 60x = 0$

4.- $4x^2 - 18 = 0$

5.- $9x^2 + 15x = 0$

6.- $7x^2 - 21x = 0$

7.- $21x^2 - 28x = 0$

8.- $15x^2 - 10x = 0$

9.- $7x^2 - 21x = 0$

10.- $2x^2 - 14x = 0$

SOLUCION DE LA ECUACION CUADRATICA MIXTA COMPLETA POR EL METODO DE FACTORIZACION

Para resolver analíticamente una ecuación cuadrática mixta completa por el método de factorización se emplean los siguientes pasos:

a) Se le da la forma general de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

b) Se descompone el trinomio $ax^2 + bx + c$ en factores.

c) Se iguala a cero cada uno de los factores.

d) Se resuleve cada una de las ecuaciones obtenidas.

Ejemplo a): Resolver $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \qquad x - 1 = 0$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$$

b): Resolver $2x^2 + 7x + 6 = 0$

$$2x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$(2x + 3)(x + 2) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \qquad x + 2 = 0$$

$$2x = -3 \qquad x = -2$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} \qquad x_2 = -2$$

EJERCICIO 4.4

Resuelva por el método de factorización los siguientes problemas.

1.- $x^2 - 10x + 21 = 0$

2.- $x^2 - x - 6 = 0$

3.- $x^2 + 6x + 5 = 0$

4.- $x^2 + 5x + 4 = 0$

5.- $x^2 - 4x - 12 = 0$

6.- $x^2 + 13x + 36 = 0$

7.- $x^2 - 5x + 4 = 0$

8.- $x^2 - 5x - 36 = 0$

9.- $x^2 - 8x + 15 = 0$

10.- $x^2 + 2x - 15 = 0$

11.- $2x^2 - 3x + 1 = 0$

12.- $3x^2 - 7x + 2 = 0$

13.- $5x^2 - 9x - 2 = 0$

14.- $4x^2 + 5x - 6 = 0$

15.- $2x^2 + 7x + 3 = 0$

16.- $16x^2 - 16x + 3 = 0$

17.- $8x^2 - 22x - 21 = 0$

18.- $2x^2 - x - 1 = 0$

19.- $15x^2 - 31x + 10 = 0$

20.- $3x^2 + 5x + 2 = 0$

21.- $x + 2 = \dfrac{x+2}{x-3}$

22.- $x + 4 = \dfrac{5}{x}$

23.- $\dfrac{x-1}{x+11} = \dfrac{2}{x-1}$

24.- $\dfrac{6x+33}{x} = 5 - x + 15$

25.- $\dfrac{2x+10}{x+11} = \dfrac{x+1}{x-1}$

SOLUCION DE LA ECUACION CUADRATICA MIXTA COMPLETA POR EL METODO DE COMPLETAR EL CUADRADO PERFECTO

Para resolver analíticamente una ecuación cuadrática mixta completa por el método de completar el cuadrado perfecto se emplean los siguientes pasos:

a) Se despeja el término independiente.

b) Se divide entre el coeficiente del término de segundo grado.

c) Se suma a ambos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad del coeficiente del término de primer grado.

d) Se descompone en factores el primer miembro de la ecuación y se reduce el segundo.

c) A ambos miembros se extrae raíz cuadrada.

d) Se despeja la incógnita.

Ejemplo a): Resolver $x^2 + 2x - 8 = 0$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x^2 + 2x = 8$$

$$x^2 + 2x + 1 = 8 + 1$$

$$(x + 1)^2 = 9$$

$$\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{9}$$

$$x + 1 = \pm\ 9$$

$$x_1 = 9 - 1 \qquad x_2 = -9 - 1$$

$$x_1 = 8 \qquad x_2 = -10$$

b): Resolver $3x^2 - 7x - 6 = 0$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$\frac{3x^2 - 7x - 6}{3} = \frac{0}{3}$$

$$x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{6}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0$$

$$x^2 - \frac{7}{3}x = 2$$

$$x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} = 2 + \frac{49}{36}$$

$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{72 + 49}{36}$$

$$x - \frac{7}{6} = \pm\sqrt{\frac{121}{36}}$$

$$x - \frac{7}{6} = \pm\ \frac{11}{6}$$

$$x_1 = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} \qquad x_2 = \frac{7}{6} - \frac{11}{6}$$

$$x_1 = \frac{18}{6} \qquad x_2 = \frac{-4}{6}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$$

EJERCICIO 4.5

Resuelva las siguientes ecuaciones, completando el cuadrado.

1.- $x^2 + 8x - 20 = 0$

2.- $x^2 + 6x + 5 = 0$

3.- $x^2 - 5x - 36 = 0$

4.- $x^2 + 3x - 18 = 0$

5.- $x^2 - 10x + 21 = 0$

6.- $3x^2 + 5x - 12 = 0$

7.- $2x^2 + 11x + 15 = 0$

8.- $4x^2 + 17x + 15 = 0$

9.- $5x^2 + 18x + 9 = 0$

10.- $7x^2 - 47 - 14 = 0$

11.- $5x^2 - 22x - 15 = 0$

12.- $2x^2 + 9x + 10 = 0$

13.- $4x^2 - 15x - 25 = 0$

14.- $3x^2 + 11x + 10 = 0$

15.- $2x^2 + x - 10 = 0$

16.- $\dfrac{4}{X - 1} = \dfrac{x - 1}{4}$

17.- $\dfrac{x + 2}{11 - 2x} = \dfrac{1}{x + 2}$

18.- $\dfrac{3 - x}{1 - 2x} = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

19.- $\dfrac{x + 6}{x + 14} = \dfrac{x}{2x - 2}$

20.- $\dfrac{3x - 4}{2x - 1} = \dfrac{2x - 1}{x - 2}$

SOLUCIONES DE LA ECUACION CUADRATICA MIXTA COMPLETA POR EL METODO DE LA FORMULA GENERAL.

Para resolver analíticamente una ecuación cuadrática mixta completa emplearemos la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta se obtiene completando el cuadrado la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La Fórmula General: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejemplo: Resolver $x^2 + 4x + 3 = 0$

$a = 1$, $b = 4$ y $c = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{2} \qquad x_2 = \frac{-4 - 2}{2}$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = -3$$

EJERCICIO 4.6

Resuelva las ecuaciones siguientes empleando la fórmula general.

1.- $x^2 + 7x + 10 = 0$

2.- $x^2 + 9x + 20 = 0$

3.- $x^2 - 9x + 8 = 0$

4.- $x^2 - 12x + 20 = 0$

5.- $x^2 - 6x + 8 = 0$

6.- $x^2 + 2x - 3 = 0$

7.- $x^2 - 9x - 36 = 0$

8.- $x^2 - 3x - 40 = 0$

9.- $x^2 - 12x - 28 = 0$

10.- $x^2 + 5x - 14 = 0$

11.- $2x^2 + 7x + 3 = 0$

12.- $3x^2 - 13x - 10 = 0$

13.- $5x^2 - 8x + 3 = 0$

14.- $6x^2 + 5x - 6 = 0$

15.- $3x^2 + 10x - 8 = 0$

16.- $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{x+1}{x+3}$

17.- $\dfrac{x+7}{x+4} = \dfrac{x+3}{x-1} + 4$

18.- $\dfrac{x+2}{x} = \dfrac{3}{3-x}$

19.- $\dfrac{3x-9}{2x-5} = \dfrac{7x-21}{5x-10}$

20.- $\dfrac{x+7}{x+4} = \dfrac{5x-1}{x-1}$

ECUACIONES DE FORMA CUADRATICA

Existen ecuaciones que no son cuadráticas pero pueden ser reducidas a éstas por sustitución con una nueva incógnita.

Ejemplo: **Resuelva la ecuación** $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

$$3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

se sustituye: $y = x^2$

$$3y^2 - 2y - 1 = 0$$

esta ecuación obtenida se resuelve por uno de los tres métodos expuestos anteriormente.

$$3y^2 - 2y - 1 = 0$$

$$(3y + 1)(y - 1) = 0$$

$$3y + 1 = 0 \qquad y - 1 = 0$$

$$y_1 = -\frac{1}{3} \qquad y_2 = 1$$

EJERCICIO 4.7

1.- $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

2.- $x^4 - x^2 - 20 = 0$

3.- $2x^4 + 4x^2 - 30 = 0$

4.- $8x^6 - 19x^2 - 27 = 0$

5.- $8x^4 + 14x^2 - 9 = 0$

6.- $2x^{-2} - x^{-1} - 3 = 0$

7.- $3x^{-2} - 4x^{-1} - 4 = 0$

8.- $6x^{-2} + 5x^{-1} - 6 = 0$

9.- $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 4 = 0$

10.- $x - x^{1/2} - 30 = 0$

ECUACIONES QUE CONTIENEN RADICALES DE SEGUNDO ORDEN

Los cuadrados de dos cantidades iguales son iguales entre sí, por lo tanto cualquier raíz de una ecuación dada puede ser también raíz de otra ecuación que se obtenga al igualar los cuadrados de los dos miembros de la ecuación propuesta.

Para resolver estas ecuaciones efectuaremos los siguientes pasos:

a) Se deja en uno de los miembros un solo radical, trasladando al otro miembro los demás términos.

b) Se elevan al cuadrado los dos miembros de la ecuación obtenida y se igualan entre sí

c) Repita los dos primeros pasos, hasta dejar los miembros sin radicales, luego resuelva para x.

d) Se sustituyen los valores encontrados en la ecuación original para probar los valores de "x" que son raíces y los que no lo son.

Ejemplo: Resuelva $\sqrt{2x^2-1}-x=0$

$$\sqrt{2x^2-1}-x=0$$

$$\sqrt{2x^2-1}=x$$

$$\left(\sqrt{2x^2-1}\right)^2=(x)^2$$

$$2x^2-1=x^2$$

$$2x^2-x^2=1$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

Verificación: **Se sustituyen en la ecuación los valores encontrados.**

$$\sqrt{2(1)^2-1}-(1)=0 \qquad \sqrt{2(1)^2-1}-(-1)=0$$

$$\sqrt{1}-1=0 \qquad \sqrt{2-1}+1=0$$

$$1-1=0 \qquad 1+1=0$$

$$0=0 \qquad 2=0$$

Por lo tanto el único valor que satisface la ecuación es x = 1, al valor x = se le llama raíz extraña.

EJERCICIO 4.8

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1.- $\sqrt{x+3} = \sqrt{3x-2}$

2.- $\sqrt{4x+1} = \sqrt{6x-3}$

3.- $\sqrt{6x-8} = x$

4.- $\sqrt{5x+6} = x+2$

5.- $\sqrt{4-x} = x-4$

6.- $\sqrt{2x+7} = \sqrt{3x-2}$

7.- $\sqrt{x+6} = \sqrt{4x-3}$

8.- $\sqrt{3x+2} = -5$

9.- $\sqrt{x^2-3x+5} = \sqrt{2x-1}$

10.- $\sqrt{x^2+4x-8} = \sqrt{3x+12}$

11.- $\sqrt{3x^2+8x+1} - 3x = 1$

12.- $\sqrt{2x^2+5x+4} - 1 = 2x$

13.- $4-3x = \sqrt{6x^2+5x-2}$

14.- $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+6} = 3$

15.- $\sqrt{3x+1} - 2 = \sqrt{2x-7}$

16.- $\sqrt{5-4x} + \sqrt{13-4x} = 4$

17.- $\sqrt{2x+13} - \sqrt{x+10} = 1$

18.- $\sqrt{10x-4} - \sqrt{3x-3} \quad \sqrt{2x+1}$

19.- $\sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{3x-2}$

20.- $\sqrt{x^2+x-5} - \sqrt{x^2-3x-1} = 2$

EJERCICIO 4.9

Resuelva los siguientes problemas.

1.- Calcular la longitud del lado de un cuadrado cuya área es 5184 m^2

2.- El área de un cuadrado es 576 m^2, calcular la longitud del lado.

3.- La suma de dos números es 21 y la suma de sus cuadrados es 281 ¿Cuales son esos números? (uno x el otro 21-x).

4.- Si al cuádruplo del cuadrado de un número se le suman dos unidades el resultado es igual a nueve veces el número.

5.- Calcular las dimensiones de un terreno rectangular de 6336 m^2 si lo largo excede en 16 m. a lo ancho.

6.- Calcular las dimensiones de los catetos de un triángulo rectángulo de 192 m^2 sabiendo que la altura es 8 m. mayor que la base.

7.- El área de un triángulo es 198 m^2. Calcular la base y altura sabiendo que la altura es 4 m. menor que la base.

8.- Calcular dos números enteros consecutivos tales que si al producto de los dos se le quita 10 veces el menor el resultado es 252.

9.- Hallar un número tal que su cuadrado disminuído de seis veces el número sea igual al mismo número.

10.- Calcular un número tal que al quitarle el cuádruplo de su recíproco resulte 3.

UNIDAD V

"Las matemáticas, cuando se las comprende bien, poseen no solamente la verdad, sino también la suprema belleza".

Bertrand Russell.

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS

En esta unidad trataremos aquellas ecuaciones cuadráticas que contienen dos variables.

Aclaremos que las gráficas de las ecuaciones de segundo grado que estudiaremos ahora no sólo son parábolas, sino que pueden ser círculos, elípses o hipérbolas, y ésto dependerá de la ecuación misma.

La gráfica de estas ecuaciones se llama sección cónica y la ecuación general para las cónicas es:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Graficar esta ecuación con todos los términos, resultaría complicado y para simplificarla se da a A, B o C el valor cero, según sea la ecuación que deseemos graficar.

Los pasos para construir una gráfica son los siguientes.

a) Se resuelve la ecuación para y en términos de x.

b) Se asignan diversos valores a x y se obtienen los de y.

c) Se localizan los puntos en el plano coordenado y se unen mediante una línea curva.

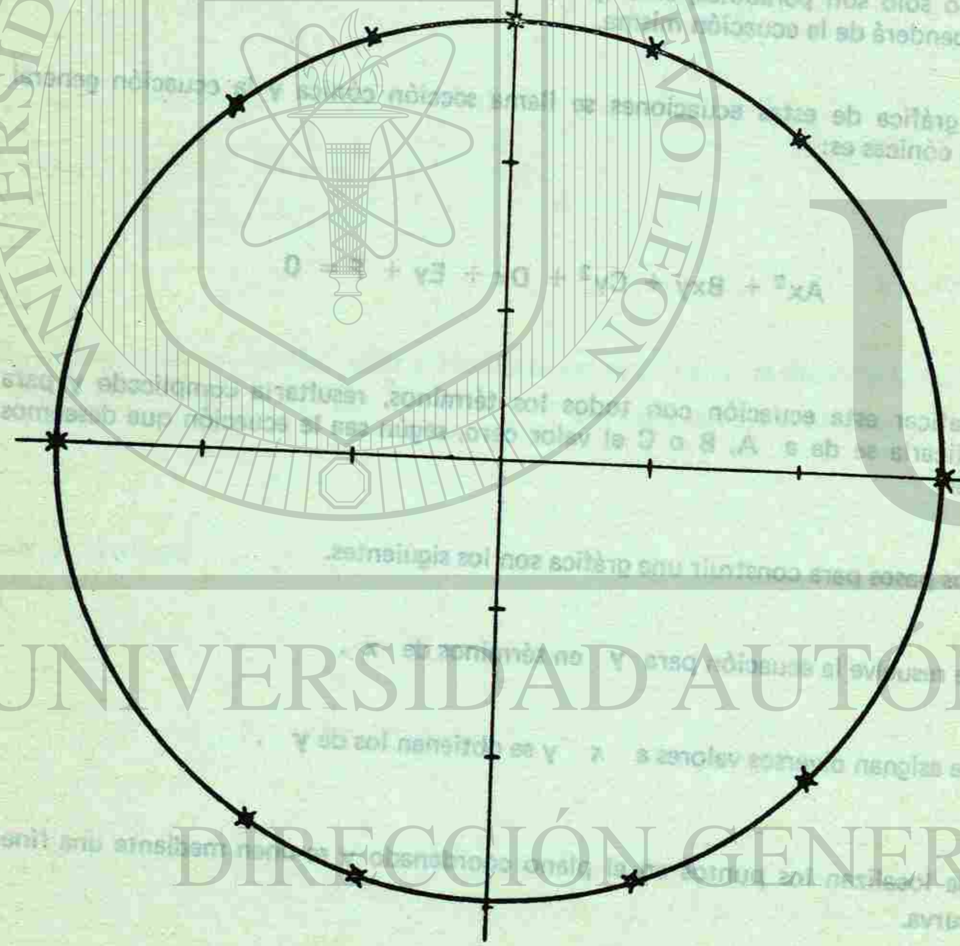
Ejemplo: Graficar $x^2 + y^2 = 9$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

X	−3	−2	−1	0	1	2	3
Y	0	± 2.2	± 2.8	± 3	± 2.8	± 2.2	0



SOLUCION GRAFICA A UN SISTEMA DE ECUACIONES CUADRATICAS.

Ejemplo a) GRAFICAR

$$x^2 - y^2 = 8$$

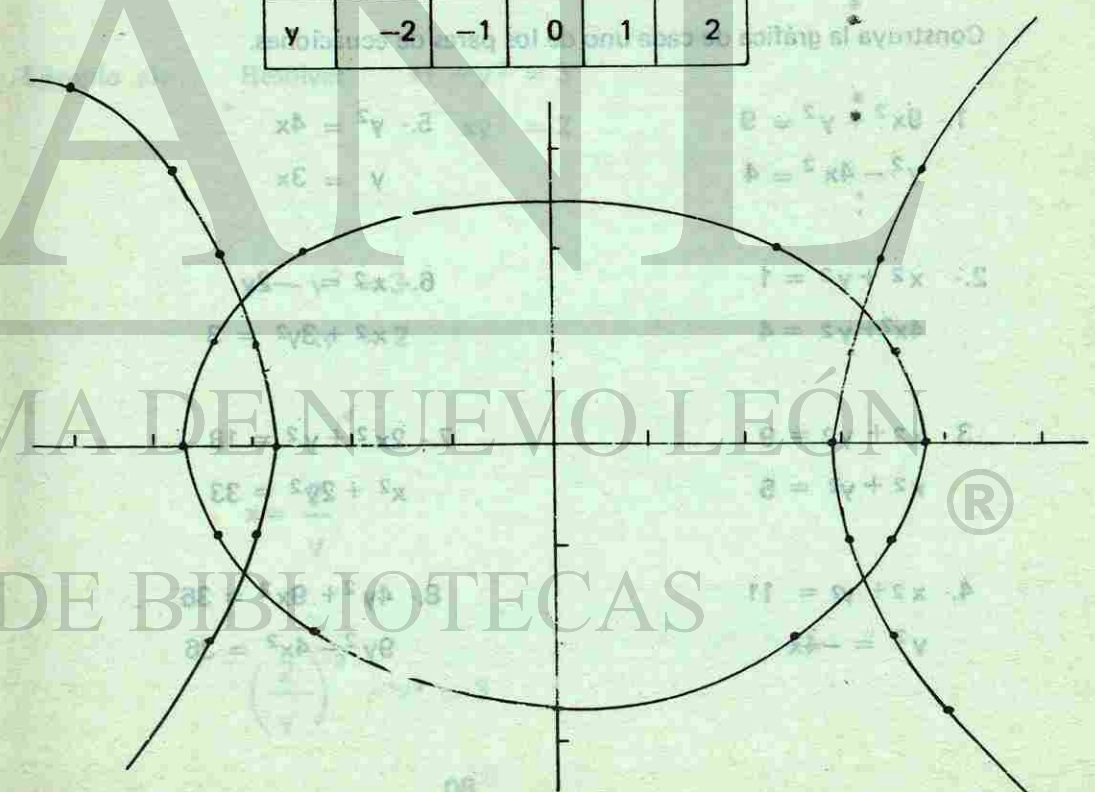
$$x^2 + 2y^2 = 14$$

$$x = \pm\sqrt{8 + y^2}$$

x	± 4.8	± 4.1	± 3.4	± 3	± 2.8	± 3	± 3.4	± 4.1	± 4.8
y	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

$$x = \pm\sqrt{14 - 2y^2}$$

x	± 2.4	± 3.5	± 3.7	± 3.5	± 2.4
y	−2	−1	0	1	2



EJERCICIO 5.1

Construya la gráfica de las siguientes ecuaciones

1.- $x^2 + y^2 = 25$

2.- $x^2 + 9y^2 = 9$

3.- $x^2 + y^2 = 16$

4.- $16x^2 + 25y^2 = 400$

5.- $y^2 = 4x$

6.- $y^2 - 2y - 4x = 3$

7.- $y^2 = -8x$

8.- $x^2 - 9y^2 = 9$

9.- $x^2 - 5y^2 = 5$

10.- $x^2 - 4y^2 = 4$

EJERCICIO 5.2

Construya la gráfica de cada uno de los pares de ecuaciones.

1.- $9x^2 + y^2 = 9$
$y^2 - 4x^2 = 4$

2.- $x^2 + y^2 = 1$
$4x^2 + y^2 = 4$

3.- $x^2 + y^2 = 9$
$x^2 + y^2 = 5$

4.- $x^2 + y^2 = 11$
$y^2 = -4x$

5.- $y^2 = 4x$
$y = 3x$

6.- $x^2 = -2y$
$x^2 + 3y^2 = 3$

7.- $2x^2 + y^2 = 18$
$x^2 + 2y^2 = 33$

8.- $4y^2 + 9x^2 = 36$
$9y^2 - 4x^2 = 36$

9.- $2x^2 + 3y^2 = 20$
$y = x^2 - 2$

10.- $x^2 - y^2 = 8$
$x^2 + 2y^2 = 14$

SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES CUADRATICAS POR EL METODO DE SUSTITUCION

Para resolver analíticamente un sistema de ecuaciones, existen diversos métodos, el que nosotros estudiaremos es el de sustitución.

Los pasos para resolver un sistema de ecuaciones por sustitución, depende de cada ecuación; unas se resuelven fácilmente para una variable en término de la otra, o bien, después de haber eliminado uno o más términos por adición o sustracción, se obtiene una ecuación que posteriormente se resuelve para una variable en términos de la otra.

Ejemplo a): Resolver $x^2 - y^2 = 3$
$xy = 2$

$$x^2 - y^2 = 3$$
$$xy = 2$$

$$x = \frac{2}{y}$$

$$\left(\frac{2}{y}\right)^2 - y^2 = 3$$

$$\frac{4}{y^2} - y^2 = 3$$

$$y^4 + 3y^2 - 4 = 0$$

$$(y^2 + 4)(y^2 - 1) + 0$$

$$y^2 + 4 = 0 \qquad y^2 - 1 = 0$$

$$y = 4i \qquad y = \pm 1$$

$$x^2 - y^2 = 3$$

$$x^2 - (1)^2 = 3$$

$$x = \pm 2$$

$$x^2 - (-1)^2 = 3$$

$$x = \pm 2$$

Las soluciones son.

$$x = 2, \; y = 1$$

$$x = -2, \; y = 1$$

$$x = 2, \; y = -1$$

$$x = -2, \; y = -1$$

b) Resolver $x^2 + 6xy = 28$

$xy + 8y^2 = 4$

$$x^2 + 6xy = 28$$

$$xy + 8y^2 = 4$$

$$x = \frac{4 - 8y^2}{y}$$

Sustituyendo en la primera ecuación.

$$\left(\frac{4 - 8y^2}{y}\right)^2 + 6y\left(\frac{4 - 8y^2}{y}\right) = 28$$

$$\frac{16 - 64y^2 + 64y^4}{y^2} + 24 - 48y^2 = 28$$

$$16 - 64y^2 + 64y^4 + 24y^2 - 48y^4 - 28y^2 = 0$$

$$16y^4 - 68y^2 + 16$$

DIVIDIENDO ENTRE 4

$$4y^4 - 17y^2 + 4 = 0$$

$$(4y^2 - 1)(y^2 - 4) = 0$$

$$y^2 = \frac{1}{4} \qquad y^2 = 4$$

$$y = \pm \frac{1}{2} \qquad y = \pm 2$$

Sustituyendo en la ecuación ya despejada

$$x = \frac{4 - 8y^2}{y}$$

$$x = \frac{4 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$x = \frac{4 - 8\left(\frac{-1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = -4$$

$$x = \frac{4 - 8(2)^2}{2} = -14$$

$$x = \frac{4 - 8(-2)^2}{-2} = 14$$

Las soluciones son .

$$x = 4, \quad y = \frac{1}{2}$$

$$x = -4, \quad y = -\frac{1}{2}$$

$$x = -14, \quad y = 2$$

$$x = 14, \quad y = -2$$

EJERCICIO 5.3

Resuelva por sustitución las siguientes ecuaciones.

1.- $xy = 2$
$x^2 - y^2 = 3$

2.- $2x + xy = 3$
$x^2 + xy = 2$

3.- $x^2 + y = 11$
$x^2 - x - 2y = 2$

4.- $3x^2 + y = 0$
$x^2 + 2x + 2y = -3$

5.- $xy = -6$
$x^2 + y^2 = 13$

6.- $3y + xy = -6$
$y^2 - xy = 4$

7.- $x + 2y + 2xy = 3$
$3x + 4y - 2xy = 4$

8.- $x^2 + y^2 - 5x + y = -4$
$x^2 + y^2 - 3x + 2y = 1$

9.- $x^2 + y^2 + 3x - 3y = 4$
$5x^2 + 5y^2 - 4x + 4y = 1$

10.- $xy + 2x + 2y = 21$
$2xy - x - y = 12$

Logaritmos Comunes

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3463	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Logaritmos Comunes

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Respuestas a los problemas impares

Logaritmos Comunes

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8139	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9918	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Respuestas a los problemas impares

EJERCICIO 1.1

1: 3^5 3: 2^9 5: b^7 7: 3

9: 4 11: b^2 13: 3^6 15: 5^{12}

17: x^{20} 19: $15a^3$ 21: $2a^2$ 23: $2x^3$

25: $x^{12}y^6$ 27: $b^{12}c^{20}$ 29: x^{12}

EJERCICIO 1.2

1: $\frac{8a^2b^2c}{3}$ 3: $6a^2bc$ 5: $42x^6y^6z^7$ 7: $9x^2yz^2$

9: $8t^2h^4s^2$ 11: $256x^{11}y^{10}z^7$ 13: $\frac{25x^6y^6}{9}$ 15: $9a^4c^{10}d^4$

17: $256a^4b^8d^8$ 19: c^{1-2a} 21: $a^{9-3x}b^{6-3y}$ 23: $a^{4+t}b^{t+9}$

25: $\frac{3ab^4}{2}$ 27: $m^{10}n^{30}$ 29: $\frac{243a^5b^{10}}{32}$

3: $\frac{1}{81}$

5: $16a^{12}b^{4}$

7: $\frac{27mn^{6}}{4}$

9 $\frac{9a^{6}}{4b^{6}}$

11: $\frac{1}{16x^{4}y^{4}}$

13: $\frac{1}{xy^{2}+x^{2}y}$

15: $y^{2}+x^{2}$

17: $x+2y$

19: $\frac{-2a+4}{(a+1)^{4}}$

EJERCICIO 1.4

1: 5

3: 4

5: $\frac{4}{9}$

7: $\frac{1}{2}$

9: $\frac{1}{4}$

11: 6

13: $2xy^{2}$

15: $\frac{7a^{6}}{8b^{3}}$

EJERCICIO 1.5

1: $x^{3/4}$

3: $y^{13/4}$

5: $h^{-7/12}$

7: $\frac{2^{1/4}}{x^{2/4}\,y^{1/4}}$

9: $\frac{12b^{2/15}}{a^{2}x^{2}}$

11: $\frac{3^{5/2}m^{1/2}}{27a}$

13: $\frac{5}{4y^{2/3}}$

15: 6

17: $\frac{3x}{(2x-1)^{1/2}}$

19: $\frac{14x-11}{(2x-3)^{3/5}}$

EJERCICIO 1.6

1: $2\sqrt{3}$

3: $5\sqrt{2}$

5: $7\sqrt{2}$

7: $2\sqrt[3]{2}$

9: $2\sqrt[3]{2}$

11: $2\sqrt[4]{2}$

13: $2\sqrt[4]{5}$

15: $5\sqrt[4]{5}$

17: $3a^{2}b$

19: $2xy\sqrt[4]{3y^{2}}$

21: $\frac{a}{2y^{2}}\sqrt[4]{3a^{3}}$

23: $\frac{b}{5x^{3}}\sqrt[3]{2b}$

25: $\frac{a}{b^{2}}\sqrt{\frac{a}{2}}$

27: $\frac{2x}{y^{3}}\sqrt{\frac{x}{3y}}$

EJERCICIO 1.7

1: $\sqrt{3}$ 3: 2 5: $\sqrt[3]{3x^2y^4}$ 7: $\sqrt{4ay^6}$

EJERCICIO 1.8

1: $\sqrt[6]{a^2}$ 3: $\sqrt[12]{128}$ 5: $\sqrt[10]{9y^4}$ 7: $\sqrt[8]{512}$

9: $\sqrt[30]{3}$ 11: $\sqrt[40]{3a}$

EJERCICIO 1.9

1: 4 3: 2 5: $2x^2y^2\sqrt{3}$

7: $3hK^2\sqrt[3]{2h^2}$ 9: $2xy\sqrt[4]{6xy^2}$

11: $12d^2t^3\sqrt{t}$ 13: $\sqrt[6]{45}$ 15: $\sqrt[6]{108}$

17: $\sqrt[12]{\ }$ 19: $\sqrt[4]{(35^2)(3a^5)}$

EJERCICIO 1.10

1: 3 3: 3 5: $a\sqrt{\frac{3b}{2}}$ 7: $2xy^2\sqrt{3x}$

9: $\frac{3x}{4y}\sqrt{2x}$ 11: $\frac{2ab}{c}\sqrt{7b}$

13: $\sqrt[24]{3^{18}x^{10}}$ 15: $\sqrt[24]{3^{12}x^{16}y^{14}}$

EJERCICIO 1.11

1: $-5\sqrt{5} + 8\sqrt{8}$ 3: $-8\sqrt{7a} + 3\sqrt{a}$

5: $-4\sqrt{7a}$ 7: $(a+4)\sqrt{3a}$

9: $-2\sqrt{2} + 5\sqrt{5}$ 11: $(a-2)\sqrt{a} + 11b\sqrt{2b}$

13: $3a^2\sqrt{b}$ 15: $(m-n)^2\sqrt{mn}$

EJERCICIO 1.12

1: $\frac{\sqrt{3a}}{a}$ 3: $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ 5: $\frac{\sqrt[3]{180}}{6}$

7: $\frac{\sqrt[4]{24a^2 b^2}}{2b}$ 9: $\frac{\sqrt{x}}{x}$ 11: $xy\sqrt{6}$

13: $\frac{2a(3+\sqrt{2})}{7}$ 15: $\frac{-y^2\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2}$

EJERCICIO 2.1

1: 2.0969 3: 1.91731 5: 2.79953 7: 0.67013

9: 2.97648 11: 1.38025 13: 4.92821 15: $\bar{3}.7701$

17: 0.7292 19: $\bar{3}.1761$

EJERCICIO 2.2

1: 6047 3: 0.004450 5: 0.6839 7: 3.771

9: 0.0003701

EJERCICIO 2.3

1: 0.038169 3: 184.02 5: 0.007463 7: 0.04973

9: 1812 11: 256 13: 0.00000015524

15: 3938000 17: 5.444 19: 1.909 21: 200.8

23: 33112 25: 364.66 27: 228.26 29: 2.167

EJERCICIO 3.1

1: $8+5i$ 3: $6+8i$ 5: $3-2i$ 7: $-1-i$

9: $4-7i$ 11: $27-24i$ 13: $-5+40i$ 15: $-2i-4$

17: $\frac{7-9i}{13}$ 19: $50i+125$

EJERCICIO 4.2

1: $x=\pm 6$ 3: $x=\pm 2$ 5: $x=\pm\sqrt{3}$

7: $x=\pm\sqrt{5}$ 9: $x=\pm 1$

EJERCICIO 4.3

1: $x = 0, \; x = -\frac{5}{2}$

5: $x = 0, \; x = -\frac{5}{3}$

9: $x = 0, \; x = 3$

3: $x = 0, \; x = -10$

7: $x = 0, \; x = \frac{4}{3}$

EJERCICIO 4.4

1: $x = 7, \; x = 3$

5: $x = 6, \; x = -2$

9: $x = 5, \; x = 3$

13: $x = -\frac{1}{5}, \; x = 2$

17: $x = -\frac{3}{4}, \; x = \frac{7}{2}$

21: $x = 4, \; x = -2$

25: $x = 7, \; x = -3$

3: $x = -5, \; x = -1$

7. $x = 4, \; x = 1$

11: $x = \frac{1}{2}, \; x = 1$

15: $x = -\frac{1}{2}, \; x =$

19: $x = \frac{2}{5}, \; x = \frac{5}{3}$

23: $x = 7 \quad x = -3$

EJERCICIO 4.5

1: $x = 2, \; x = -10$

3: $x = -4, \; x = 9$

5: $x = 7, \; x = 3$

7: $x = \frac{-11 + \sqrt{241}}{4}, \; x = \frac{-11 - \sqrt{241}}{4}$

9: $x = \frac{-18 + \sqrt{279}}{5}, \; x = \frac{-18 - \sqrt{279}}{5}$

11: $x = \frac{22 + \sqrt{559}}{5}, \; x = \frac{22 - \sqrt{559}}{5}$

13: $x = \frac{15 + \sqrt{425}}{4}, \; x = \frac{15 - \sqrt{425}}{4}$

15: $x = 2, \; x = -\frac{5}{2}$

17: $x = -7, \; x = 1$

19: $x = 6, \; x = -2$

EJERCICIO 4.6

1: $x = -5,\ x = -2$ 3: $x = 8,\ x = 1$

5: $x = 4,\ x = 2$ 7: $x = 12,\ x = -3$

9: $x = 14,\ x = -2$ 11: $x = -\dfrac{1}{2},\ x = -3$

13: $x = \dfrac{3}{5}$ $x = 1$ 15: $x = \dfrac{2}{3},\ x = -4$

17: $x = \dfrac{-25 + \sqrt{577}}{8}$ $x = \dfrac{-25 - \sqrt{577}}{8}$

19: $x = -5,\ x = 3$

EJERCICIO 4.7

1: $x = \pm\ 2,\ x = \pm\sqrt{3}$ 3: $x = \pm\sqrt{3},\ x = \pm\sqrt{5i}$

5: $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}},\ x = \pm\ \dfrac{3}{2}$ 7: $x = \dfrac{1}{2}$ $x = -\dfrac{3}{2}$

9: $x = \pm\ 1,\ x = \pm\ 8$

EJERCICIO 4.8

1: $x = \dfrac{5}{2}$ 3: $x = 2,\ x = 4$ 5 $= 1,\ x = 9$

7: $x = 3$ 9: $x = 2,\ x = 3$ 11: $x = o,\ x = \dfrac{5}{9}$

13: $x = \dfrac{2}{3}$ 15: $x = 16,\ x = 8$ 17: $x = 6$

19: $x = \dfrac{-9 + \sqrt{641}}{14}$, $x = \dfrac{-9 - \sqrt{641}}{14}$

EJERCICIO 4.9

1: 72 3: 16,5 5: a = 72, l = 88

7: b = 22, h = 18 9: x = 5

EJERCICIO 5.3

1: (2,1), (2, −1) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{4i}},\ \sqrt{4i}\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt{4i}},\ -\sqrt{4i}\right)$

3: (3,2), $\left(-\dfrac{8}{3},\ \dfrac{35}{8}\right)$ 5: (3,−2), (−3,2), (2, −3), (−2,3)

7: $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{6}\right)$ 9: $\left(-\sqrt{7}\ \pm\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7},\ \pm\sqrt{3}\right)$