UNIDAD III

"Nos inclinamos a creer que la literatura y las artes de nuestro tiempo han desconocido doblemente la función civilizadora de las matemáticas. Han sacrificado el rigor, que representa la parte que desempeña la conciencia clara en toda creación y han ignorado una de las fuentes más originales del lirismo".

Le Lionnais.

UNIDAD III

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS

Un número complejo es un número de la clase $a + bi$, en donde a y b son reales e $i^2 = -1$, ó $i = \sqrt{-1}$

CONCEPTOS

NUMERO REAL.— Los números reales incluyen todos los números racionales, junto con todos los números irracionales. Todo número que puede representarse por fracciones decimales, incluyendo tanto las que se repiten como las que no terminan ni se repiten, es un número real.

NUMERO IMAGINARIO.— En la notación $a + bi$, a es la parte real y bi es la parte imaginaria, si b es diferente a cero, el número complejo se denomina número imaginario.

FORMA RECTANGULAR.— Cada número complejo (a, b) se puede escribir en la forma $a + bi$ que es llamada la forma rectangular.

Antes de entrar por completo al estudio de los números complejos, haremos una breve introducción acerca de su origen.

Hemos utilizado hasta ahora para resolver problemas algebráicos, el sistema de los números reales, que comprenden los números enteros positivos, enteros negativos, racionales e irracionales, pero existen dentro de este sistema un tipo de números que se dan como resultado de las ecuaciones cuadráticas principalmente y que son los números imaginarios o complejos, aunque se ha extendido su uso en la Física e Ingeniería.

Sabemos que una ecuación cuadrática que se expresa como $ax^2 + c = 0$ en donde a y b son constantes, tiene como conjunto de soluciones o raíces, dos valores para x, puesto que se obtienen de una raíz cuadrada:

Ejemplo 1. Las raíces de $x^2 - 16 = 0$

son $x = \pm 4$

Ejemplo 2. Las raíces de $x^2 + 9 = 0$

son $x = \pm \sqrt{-9} = \pm 3i$

Al llegar a esta última solución fué necesario introducir el término de número complejo o imaginario, pues ningún número negativo elevado a una potencia par nos da como resultado otro número negativo, por lo tanto la raíz cuadrada de un número siempre será imaginaria.

Para emplear el término $a + bi$, que de ahora en adelante lo reconoceremos como número complejo, y con los cuales realizaremos las cuatro operaciones básicas, es necesario tomar como base el conjunto de los pares ordenados (x, y) y algunas definiciones que nos servirán para demostrar posteriormente algunos teoremas del sistema de números complejos.

Definición 1. Dos pares (x, y) y (x_2, y_2) son iguales si $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Ejemplo: $(x + 2y, 2x - y) = (4, 3)$ si y sólo si $x + 2y = 4$ y $2x - y = 3$

Definición 2. La suma de dos pares ordenados $(x_1\ y_1)$ y (x_2, y_2) es el par ordenado $(x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2)$ y se escribe.

$$(x_1\ , y_1) + (x_2\ , y_2) = (x_1 + x_2\ , y_1 + y_2)$$

Ejemplo: $(2\ , 1) + (3, 2) = (2 + 3\ , 1 + 2) = (5\ , 3)$

Definición 3: El producto de los pares ordenados $(x_1\ , y_1)$ y $(x_2\ , y_2)$ es el par ordenado.

$(x_1 x_2 - y_1 y_2\ , x_1 y_2 + x_2 y_1)$ y se escribe:

$$(x_1\ y_1)\ (x_2\ , y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2\ , x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Ejemplo: $(2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2) = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2,\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = (4, 7)$

El cociente de dos pares ordenados puede escribirse:

$$\frac{(x_1\ , y_1)}{(x_2\ , y_2)} = \left(\frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x^2{}_2 + y^2{}_2}\ ,\ \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x^2{}_2 + y^2{}_2} \right)$$

Ejemplo:

$$\frac{(4\ , 8)}{(3\ , 1)} = \left(\frac{(4 \cdot 3) + (8 \cdot 1)}{3^2 + 1^2}\ \ \frac{3 \cdot 8 - 4 \cdot 1}{3^2 + 1^2} \right)$$

$$= \frac{12 + 8}{9 + 1}\ ,\ \frac{24 - 4}{9 + 1}$$

$$= \frac{20}{10}\ ,\ \frac{20}{10}$$

$$= 2\ ,\ 2$$

$$= (2\ , 2)$$

Una de las interpretaciones más usuales, del algebra de pares ordenados está constituída por el álgebra de los números complejos. La expresión $a + bi$ en que a y b son números reales e i tiene la propiedad $i^2 = -1$, recibe el nombre de número complejo. Si $b = 0$, el número es real pero si $b \neq 0$ el número complejo se dice que es imaginario y si $a = 0$ y $b \neq 0$, $a + bi$ es un número imaginario puro.

Mencionaremos algunas definiciones importantes para el estudio de los números complejos.

OPERACIONES BASICAS CON NUMEROS COMPLEJOS

Definición 1. La suma, diferencia, producto y cociente de dos números complejos son definidos por las siguientes ecuaciones.

Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$

Diferencia: $(a + bi) - (c + d)\,i = (a - c) + (b - d)\,i$

Producto: $(a + bi)(c + d)i = (ac - bd) + (bc + ad)i$

Cociente: $$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Definición 2. Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Definición 3. Los números $a + bi$ y $a - bi$ son llamados números conjugados.

De éstas definiciones podemos deducir los siguientes Teoremas.

TEOREMA 1

El número $1 + 0 \cdot i$ es una identidad multiplicativa única dentro del sistema de los números complejos $a + bi$.

Demostración: Sea $c + di$ un número tal que

$$(a + bi)(c + di) = a + bi$$

Multiplicando:

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = a + bi$$

y

$$ac - bd = a$$

$$ab + bc = b$$

La solución a éste sistema de ecuaciones lineales es $c = 1$ y $d = 0$, por lo tanto se concluye que $1 + 0 \cdot i$ ó 1 es el elemento de identidad para la multiplicación.

TEOREMA 2

Un número complejo $a + bi$, con a ó b nulos, más no los dos nulos, tiene un inverso multiplicativo único.

Demostración: Sea $c + di$ un número tal que $(a + bi)(c + di) = 1$