por lo tanto $(ac - bd) + (ad + bc)\,i = 1$

y

$$ac - bd = 1$$

$$ad + bc = 0$$

La solución de éste sistema de ecuaciones en c y d es:

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad y \quad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Por lo tanto, el inverso multiplicativo de $a + bi$ es el número complejo.

$$\frac{a}{a^2 + b^2} \quad \frac{b}{a^2 + b^2}\,i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

TEOREMA 3

La ley asociativa para la multiplicación es válida para los números complejos. Así:

$$[(a + bi)(c + di)]\,(e + fi) = (a + bi)\,[(c + di)(e + fi)]$$

Demostracion: Utilizando las propiedades de cerradura, conmutativa y asociativa para la adición y multiplicación, reduciremos el miembro izquierdo al derecho.

$$= [(a + bi)(c + di)]\,(e + fi)$$

$$= [(ac - bd) + (ad + bc)\,i]\,(e + fi)$$

$$= (ac - bd)\,e - (ad + bc)\,f + [(ac - bd)\,f + (ad + bc)\,e]\,i$$

$$= a(ce - df) - b(cf + de) + [a(cf + de)\,i + b(ce - df)\,i]$$

$$= (a + bi)\,[(c + di)(e + fi)]$$

TEOREMA 4

Los números complejos obedecen a las leyes de cerradura y de conmutatividad para la adición y la multiplicación.

TEOREMA 5

Los números complejos obedecen a la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Así:

$$(a + bi)\,[(c + di) + (e + fi)] = (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi)$$

Concluímos que la suma, la diferencia y el producto de dos números complejos se obtienen llevando a cabo las operaciones como si i fuese un número real y para el producto sustituyendo i^2 por -1, para el cociente de dos números complejos puede obtenerse multiplicando el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor.

Ejemplo a): $(3 + 4i) + (2 - 7i)$

$$= 3 + 2 + i(4 - 7) = 5 - 3i$$

b): $(3 + 4i) - (2 - 7i)$

$$= 3 - 2 + i(4 + 7) = 1 + 11i$$

c): $(3 + 4i)(2 - 7i)$

$$= 6 + i(8 - 21) - 28i^2$$

$$= 6 - 13i - 28i^2$$

$$= 6 - 13i - 28(-1)$$

$$= 6 - 13i + 28$$

$$= 34 - 13i$$

d): $\dfrac{3 + 4i}{2 - 7i}$

$$= \frac{(3 + 4i)(2 + 7i)}{(2 - 7i)(2 + 7i)}$$

$$= \frac{6 + i(21 + 8) + 28i^2}{4 - 49i^2}$$

$$= \frac{6 + 29i + 28i^2}{4 - 49i^2}$$

$$= \frac{6 + 29i + 28(-1)}{4 - 49(-1)}$$

$$= \frac{-22 + 29i}{53}$$

EJERCICIO 3.1

Efectúe las operaciones indicadas.

1.- $(3 + 2i) + (5 + 3i)$

2.- $(2 + 5i) + (4 - i)$

3.- $(4 + 3i) + (2 + 5i)$

4.- $(2 - 3i) + (1 + 2i)$

5.- $(4 + i) - (1 + 3i)$

6.- $(9 - 3i) - (7 + i)$

7.- $(2 + i) - (3 + 2i)$

8.- $(7 - 4i) - (-6 + 4i)$

9.- $(4 - i) - (2 - 3i) - (-2 + 9i)$

10.- $(9 + 7i) - (-9 + 7i) + (-18 + i)$

11.- $(5 + 2i)(3 - 6i)$

12.- $(1 - 3i)(4 + 5i)$

13.- $(-7 + 4i)(3 - 4i)$

14.- $(2 - 3i)(3 + 5i)$

15.- $\dfrac{6 + 12i}{3i}$

16.- $\dfrac{4}{4 - 3i}$

17.- $\dfrac{3 - i}{3 + 2i}$

18.- $\dfrac{4 - 3i}{4 + 3i}$

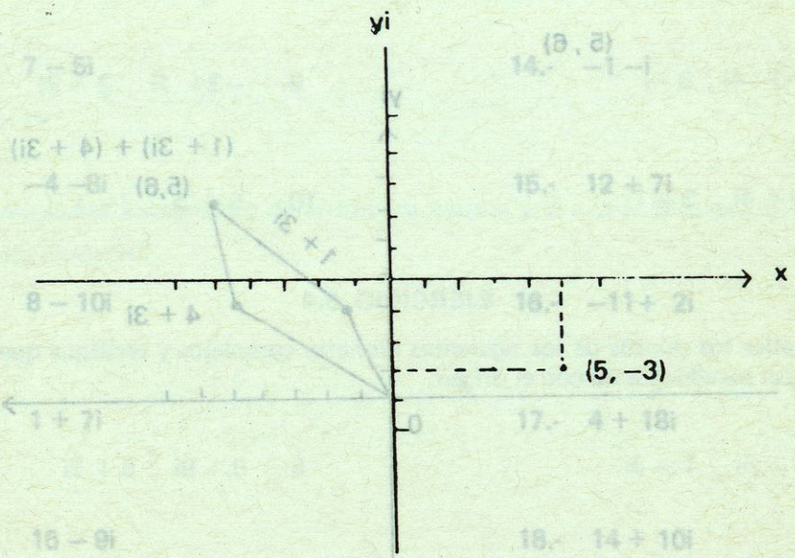
19.- $(3 + 4i)(4 + 3i)(2 - 5i)$

20.- $(3 - 2i)(2 + i)(1 - i)$

REPRESENTACION GRAFICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Para graficar números complejos, se emplea el plano coordenado rectangular. Su representación son puntos en el plano, en donde el eje "x" es el eje real y el eje "y" es el eje imaginario, por lo tanto el número complejo a + bi se representa mediante un punto cuyas coordenadas son (a, b). Al plano le llamaremos el plano complejo.

Ejemplo: Representar en el plano complejo el punto 5–3i.



Podemos graficar también la adición y sustracción de números complejos. Para graficar la suma ó resta de a + bi y c + di, primeramente se representan los

puntos (a, b) y (c, d), posteriormente la suma o resta de ambos, formando con el origen un paralelogramo.

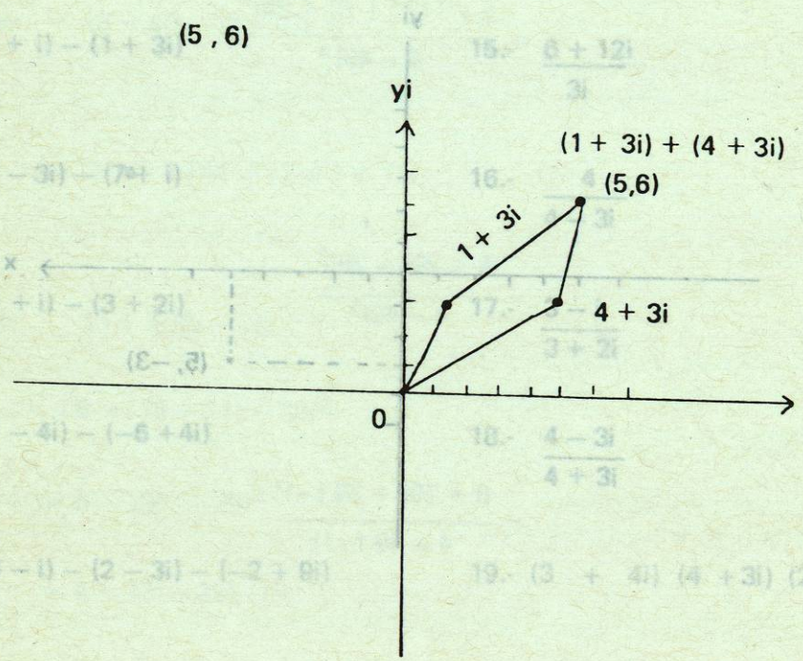
Ejemplo: Representar la suma de $1 + 3i$ y $4 + 3i$.

$(1 + 3i) + (4 + 3i)$

$(1 + 4) + (3 + 3)\,i$

$5 + 6$

$(5, 6)$



EJERCICIO 3.2

Localice los siguientes números complejos en el plano coordenado.

1.- $5 - 3i$

2.- $-2 + 4i$

3.- $9 + 6i$

4.- $7 - 5i$

5.- $-4 - 8i$

6.- $8 - 10i$

7.- $1 + 7i$

8.- $15 - 9i$

9.- $-6 + 1i$

10.- $-3 - 2i$

11.- $12 + 8i$

12.- $3 - 3i$

13.- $5 - 2i$

14.- $-1 - i$

15.- $12 + 7i$

16.- $-11 + 2i$

17.- $4 + 18i$

18.- $14 + 10i$

19.- $6 - 2i$

20.- $-1 - 5i$

1020120745

EJERCICIO 3.3

Localice los puntos correspondientes a los siguientes números complejos y su suma, luego trace el paralelogramo que se forma con los tres puntos y el origen.

1.- $1 + 3i$, $4 + 3i$

2.- $-2 + 4i$, $3 + i$

3.- $2 - 2i$, $2 + 2i$

4.- $-3 - 4i$, $5 - i$

5.- $1 + 4i$, $3 + i$

6.- $-3 - i$, $2 + 5i$

7.- $3 - 2i$, $2 + 3i$

8.- $-2 + 5i$, $3 - 4i$

9.- $-3 + 7i$, $3 + 2i$

10.- $5 + 3i$, $7 - i$

EJERCICIO 3.4

Localice los puntos de los siguientes números complejos y verifique que su resta formen un paralelogramo con el origen.

1.- $4 + 5i$, $1 + 3i$

2.- $7 + 8i$, $2 + 5i$

3.- $2 + 5i$, $1 - 2i$

4.- $1 + 4i$, $2 - 3i$

5.- $8 + 9i$, $5 + 7i$

6.- $11 + 4i$, $8 + 2i$

7.- $3 + 5i$, $2 - i$

8.- $2 - 5i$, $4 - 7i$

UNIDAD IV

"La música es un ejercicio de aritmética secreta y el que se entrega a ella ignora que maneja números".

Leibniz.