$$= \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}}$$ Una fracción no se altera si el numerador y el denominador se multiplican por la misma cantidad.

$$= \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1}$$ Inverso multiplicativo

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$ División entre la unidad

$$= \frac{ad}{bc}$$ Teorema de la multiplicación de fracciones.

Al dividir fracciones, debe observarse la misma recomendación que al multiplicarlas, de no efectuar la multiplicación de los polinomios para que la simplificación sea más fácil.

Ejemplo 1

Dividir $\frac{4}{5} \div \frac{8}{15}$

Solución:

$$\frac{4}{5} \div \frac{8}{15}$$ Fracciones por dividir.

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{8}$$ Invirtiendo el divisor y cambiando la operación.

$$= \frac{4\,(15)}{5\,(8)}$$ Multiplicación en forma indicada.

$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 2}$$ Factorizando

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{3}{2}$$ Conmutando y reduciendo a la unidad factores iguales.

Ejemplo 2

Dividir y simplificar $\frac{x^2 - y^2}{w^2 - z^2} \div \frac{x - y}{w^2 - 2wz + z^2}$

Solución:

$$\frac{x^2 - y^2}{w^2 - z^2} \div \frac{x - y}{w^2 - 2wz + z^2}$$ Fracciones por dividir

$$= \frac{x^2 - y^2}{w^2 - z^2} \cdot \frac{w^2 - 2wz + z^2}{x - y}$$ Inviértase el divisor y multiplíquese.

$$= \frac{(x + y)\,(x - y)\,(w - z)^2}{(w + z)\,(w - z)\,(x - y)}$$ Factorizando

$$= \frac{(x + y)\,(w - z)}{(w + z)}$$ Reduciendo a la unidad factores iguales.

EJERCICIO 1.3

Efectúe las divisiones indicadas y exprese el cociente en la forma más simple.

1. $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$

2. $\frac{5}{4} \div \frac{15}{8}$

3. $4 \div \frac{2}{7}$

4. $\frac{6}{7} \div 2$

5. $\frac{7a^2 b}{5xy^4} \div \frac{ab}{x^2 y^2}$

6. $\frac{9c^2 d^4}{w^2 z^6} \div \frac{3c^3 d^5}{w^3 z^8}$

7. $\frac{2\,(a - b)}{5\,(x - y)} \div \frac{4\,(a - b)}{10\,(x - y)}$

8. $\frac{a^2 - b^2}{x^2 - y^2} \div \frac{a - b}{x - y}$

9. $\dfrac{7x^2y^6z^3}{s^4t^2} \div \dfrac{21x^3y^4z^4}{8s^6t^4} \div \dfrac{16y^2s^2t^2}{3xz}$

10. $\dfrac{\frac{w^2}{4}-1}{1-\frac{c^2}{d^2}} \div \dfrac{\frac{w}{2}-1}{1+\frac{c}{d}} \div \dfrac{\frac{w}{2}+1}{1-\frac{c}{d}}$

11. $\dfrac{5x^2-5y^2}{3a^2-3b^2} \div \dfrac{x^2-2xy+y^2}{9a^2-9b^2}$

12 $\dfrac{1-9b^2}{4-c^2} \div \dfrac{1-6b+9b^2}{c-2}$

13. $\dfrac{1+a^3}{1+b+b^2} \div \dfrac{1-a+a^2}{1-b^3}$

14. $\dfrac{8c^3-1}{27d^3+1} \div \dfrac{4c^2+2c+1}{9d^2-3d+1}$

15. $\dfrac{5x-15}{5y-20} \div \dfrac{x^2-5x+6}{y^2-9y+20}$

16. $\dfrac{a^2+10a+24}{b^2-8b+12} \div \dfrac{a^2+4a-12}{b^2-7b+6}$

17. $\dfrac{y^2+14y+49}{x^2-20x+100} \div \dfrac{y^2+11y+28}{x^2-2x-80}$

18. $\dfrac{9c^2-48c+64}{4w^2+4wz+z^2} \div \dfrac{6c^2-4c-32}{2w^2-3wz-2z^2}$

19. $\dfrac{ax+ay+bx+by}{w+z} \div \dfrac{(a^2-b^2)(x+y)}{aw+az-bw-bz}$

20. $\dfrac{y^3-8x^3+y^2+2xy+4x^2}{y^2-4x^2} \div \dfrac{y^2+2xy+4x^2}{y^2+4xy+4x^2}$

1.6 MINIMO COMUN MULTIPLO DE NUMEROS ENTEROS

Un número $p \in N$ es múltiplo de un número $q \in N$ si p es divisible entre q

Así los múltiplos de un número $p \in N$ forman el conjunto

$$M = \{p, 2p, 3p, 4p, \ldots\}$$

Si p = 8 entonces el conjunto

$\{8, 16, 24, 32, \ldots\}$ contiene sus múltiplos. Observemos que los múltiplos de un número son infinitos.

Ahora estamos interesados en el mínimo común múltiplo de dos números.

Si consideramos los múltiplos de 6 y 15 obtenemos los conjuntos A y B respectivamente.

$$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, \ldots\}$$

$$B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, \ldots\}$$

La intersección de estos conjuntos

$$A \cap B = \{30, 60, 90, 120, \ldots\}$$

forma el conjunto de los múltiplos comunes a los números 6 y 15.

El elemento menor de este conjunto, 30, es el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los números dados.

En consecuencia, el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales, es el menor, de todos los números que son divisibles entre cada uno de los números considerados.

1.7 MINIMO COMUN MULTIPLO DE NUMEROS UTILIZANDO LOS FACTORES PRIMOS.

Si utilizamos la factorización prima, podemos obtener el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números, de una manera más rápida, siguiendo los pasos dados a continuación.

1. Expresar cada número por sus factores primos, si éstos se repiten, escribirlos en forma de potencia.

2. Formar el m.c.m. con el producto de los factores primos no comunes y de los comunes, el que esté elevado a la potencia mayor.

Ejemplo 1

Obtener el m.c.m. de 8, 9 y 12.

Solución:

Los factores primos respectivos son:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$8 = 2^3$, $\quad 9 = 3^2$, $\quad 12 = 2^2 \cdot 3$

$\Rightarrow$ el m.c.m. $= 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$

Ejemplo 2

Obtener el m.c.m. de 6, 9, y 15.

Solución:

Los factores primos respectivos son:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$6 = 2 \cdot 3$, $\quad 9 = 3^2$, $\quad 15 = 3 \cdot 5$

$\Rightarrow$ el m.c.m. $= 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

1.8 MINIMO COMUN MULTIPLO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Para obtener el mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas, es necesario aplicar la siguiente técnica.

1. **Se factorizan completamente cada una de las expresiones dadas.**
2. **Si al factorizar una expresión se obtienen factores primos iguales, éstos se expresan en forma de potencia.**
3. **Se forma el mínimo común múltiplo, por el producto de todos los factores no comunes y de los comunes se toma el que esté elevado a la potencia mayor.**
4. **El m. c. m. se deja expresado por los factores, sin efectuar la multiplicación.**

Ejemplo 1.

Obtener el mínimo común múltiplo de.

$a^3 + b^3$, $\quad a^2 - b^2$, $\quad a^2 - 2ab + b^2$

Solución:

Factorizando cada expresión.

$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $\ (a - b)(a + b)$, $\ (a - b)^2$

Formando el m.c.m.

m.c.m. $= (a + b)(a - b)^2 (a^2 - ab + b^2)$

Ejemplo 2.

Obtener el m.c.m. de

$4x - 16$, $\quad x^2 - 10x + 25$, $\quad x^2 - 9x + 20$

Solución:

Factorizando cada expresión

$$4(x-4) \quad , \quad (x-5)^2 \quad , \quad (x-5)(x-4)$$

Formando el m.c.m.

$$\text{m.c.m.} = 4(x-4)(x-5)^2$$

EJERCICIO 1.4

Obtener el m.c.m. (mínimo común múltiplo) de los números dados en cada uno de los siguientes problemas, utilizando la factorización prima.

1. 8, 18
2. 9, 21
3. 6, 14
4. 24, 15
5. 4, 30
6. 20, 16
7. 4, 5, 12
8. 3, 7, 14
9. 5, 9, 30
10. 9, 12, 16

Obtener el m.c.m. de las siguientes expresiones algebraicas.

11. $5xy^4 \quad , \quad x^2y^2 \quad , \quad 15x^2y$
12. $9a^2b^4 \quad , \quad 3a^3b^5 \quad , \quad 6ab$
13. $8-c^3 \quad , \quad 2-c \quad , \quad 4+2c+c^2$
14. $4-x^2 \quad , \quad x-2 \quad , \quad 2+x$
15. $8x-8y \quad , \quad 2x+2y \quad , \quad 5x^2-5y^2$
16. $7x-21 \quad , \quad 2x+6 \quad , \quad x^2+6x+9$
17. $10a+10b \quad , \quad 4a^2-4b^2 \quad , \quad 4a^2-8ab+4b^2$

18. $x^2-8x+15 \quad , \quad x^2-6x+9 \quad , \quad x^2-10x+25$
19. $ax+ay+bx+by \quad , \quad aw+az+bw+bz$
20. $6z^2-4z-32 \quad , \quad 9z^2-48z+64$

1.9 SUMA ALGEBRAICA DE FRACCIONES CON EL MISMO DENOMINADOR.

Para sumar fracciones que tienen el mismo denominador, se suman los numeradores y el denominador se conserva igual.

Ejemplo 1.

Sumar $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$

Solución:

$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$ Fracciones dadas.

$=\frac{1+3+5}{2}=\frac{9}{2}$ Sumando los numeradores y conservando el mismo denominador.

Ejemplo 2.

Sumar $\frac{x-1}{4}+\frac{5x}{4}-\frac{x+1}{4}$

Solución:

$\frac{x-1}{4}+\frac{5x}{4}-\frac{x+1}{4}$ Fracciones dadas.

$=\frac{x-1+5x-(x+1)}{4}$ Suma de los numeradores.

$$= \frac{x - 1 + 5x - x - 1}{4}$$ Supresión del paréntesis.

$$= \frac{5x - 2}{4}$$ Reducción de términos seme jantes.

Ejemplo 3.

Sumar las fracciones

$$\frac{5a\,(a+1)}{a-1} - \frac{3a^2}{a-1} - \frac{7a}{a-1}$$

Solución :

$$\frac{5a\,(a+1)}{a-1} - \frac{3a^2}{a-1} - \frac{7a}{a-1}$$ Fracciones dadas.

$$= \frac{5a^2 + 5a - 3a^2 - 7a}{a-1}$$ Suma de los numeradores.

$$= \frac{2a^2 - 2a}{a-1}$$ Reducción de términos semejantes.

$$= \frac{2a\,(a-1)}{a-1}$$ Factorización.

$$= 2a$$ Reducción a la unidad de factores iguales.

EJERCICIO 1.5

Sumar las siguientes fracciones que tienen el mismo denominador.

1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{7}{2}$
2. $\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 1$

3. $\frac{1}{7} + \frac{5}{7} - \frac{3}{7}$
4. $\frac{7}{4} - \frac{3}{4} + \frac{8}{4}$
5. $\frac{10}{3b} - \frac{1}{3b}$
6. $\frac{2c}{c-2} - \frac{4}{c-2}$
7. $\frac{x-1}{4} + \frac{2x}{4} + \frac{x+1}{4}$
8. $\frac{5}{a+1} - \frac{3a}{a+1} + \frac{8a}{a+1}$
9. $\frac{6x}{x-1} + \frac{2}{x-1} - \frac{2+6x}{x-1}$
10. $\frac{y^2}{y^2-4} - \frac{2}{y^2-4} - \frac{2}{y^2-4}$

1.10 SUMA ALGEBRAICA DE FRACCIONES CON DIFERENTE DENOMINADOR.

Esta suma se obtiene transformando las fracciones por sumar en equivalentes con el mismo denominador. Teniendo presente que dos fracciones son equivalentes, si una se obtiene a partir de la otra, multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador por la misma cantidad.

La transformación se lleva a cabo, realizando los siguientes pasos.

1. Obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones por sumar. Al mínimo común múltiplo de los denominadores de dos o más fracciones, se le llama mínimo común denominador (m.c.d.).
2. Dividir el m.c.d. entre el denominador de cada fracción.
3. Multiplicar el cociente obtenido en el paso anterior por el numerador y el denominador de la fracción respectiva.

4. Sumar los numeradores y conservar el mismo denominador.

5. Simplificar la fracción suma.

Ejemplo 1.

Sumar $\frac{7}{4}+\frac{8}{5}+\frac{1}{6}$ transformando a fracciones equivalentes.

Solución:

1. El m.c.m. de 4, 5 y 6 es 60.

2. Dividiendo el m.c.m. entre cada uno de los denominadores tenemos $60 \div 4 = 15$, $60 \div 5 = 12$, $60 \div 6 = 10$.

3. Multiplicando el numerador y el denominador de cada fracción por el cociente respectivo, transformamos las fracciones dadas en equivalentes con el mismo denominador.

$$\frac{7}{4} = \frac{7\,(15)}{4\,(15)} = \frac{105}{60}$$

$$\frac{8}{5} = \frac{8\,(12)}{5\,(12)} = \frac{96}{60}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1\,(10)}{6\,(10)} = \frac{10}{60}$$

4. Sumando y simplificando.

$$\frac{105}{60}+\frac{96}{60}+\frac{10}{60}$$

$$= \frac{105+96+10}{60}$$

$$= \frac{211}{60}$$

Ejemplo 2.

Sumar $\frac{2}{x-1}$, $\frac{3}{x+1}$ y $\frac{5}{x^2-1}$

Transformando a fracciones equivalentes.

Solución:

1. El mínimo común denominador es.

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

2. Al dividir el m.c.d. entre cada uno de los denominadores dados se tiene:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x^2-1} = 1$$

3. Al multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción por el cociente respectivo obtenido en el paso anterior, tenemos:

$$\frac{2}{x-1} = \frac{2\,(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+2}{x^2-1}$$

$$\frac{3}{x+1} = \frac{3\,(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x-3}{x^2-1}$$

$$\frac{5}{x^2-1} = \frac{5\,(1)}{(x^2-1)(1)} = \frac{5}{x^2-1}$$

4. La suma se reduce a sumar fracciones con el mismo denominador.

$$\frac{2x+2}{x^2-1}+\frac{3x-3}{x^2-1}+\frac{5}{x^2-1}$$

$$=\frac{2x+2+3x-3+5}{x^2-1}$$

$$=\frac{5x+4}{x^2-1}$$

El proceso para sumar fracciones se agiliza si combinamos las fracciones en una sola, siguiendo los pasos dados a continuación.

1. Factorizar completamente cada uno de los denominadores de las fracciones dadas, para obtener el mínimo común denominador.
2. Dividir el m.c.d., entre cada uno de los denominadores de las fracciones por sumar.
3. Multiplicar el cociente obtenido en el paso anterior, por el numerador de la fracción respectiva.
4. Colocar este producto como sumando de la fracción suma.
5. Reducir términos semejantes en el numerador, conservando el común denominador.
6. Simplificar la fracción a su mínima expresión.

Ejemplo 1.

Sumar y simplificar $\frac{a+4}{2a^2-2a}+\frac{-5}{2a-2}$

Solución:

$$\frac{a+4}{2a(a-1)}+\frac{-5}{2(a-1)}$$ Factorizando los denominadores.

$$=\frac{a+4+(-5)a}{2a(a-1)}$$ Realizando los pasos 2, 3 y 4 del procedimiento (Pág. 28)

$$=\frac{-4a+4}{2a(a-1)}$$ Reduciendo términos semejantes en el numerador.

$$=\frac{-4(a-1)}{2a(a-1)}$$ Factorizando el numerador.

$$=\frac{-2}{a}$$ Reduciendo a la unidad los factores iguales.

Ejemplo 2.

Sumar y simplificar $\frac{x+5}{2x^2-2}+\frac{3}{1-x}+\frac{5}{2x+2}$

Solución:

$$=\frac{x+5}{2(x^2-1)}+\frac{3}{1-x}+\frac{5}{2(x+1)}$$ Factorizando los denominadores.

$$=\frac{x+5}{2(x+1)(x-1)}-\frac{3}{x-1}+\frac{5}{2(x+1)}$$ Cambiando el signo a uno de los denominadores.

$$=\frac{1(x+5)-3\cdot 2(x+1)+5(x-1)}{2(x+1)(x-1)}$$ Pasos 2, 3 y 4 del procedimiento (Pág. 28)

$$=\frac{x+5-6x-6+5x-5}{2(x+1)(x-1)}$$ Efectuando las operaciones en el numerador.

$$= \frac{-6}{2(x+1)(x-1)}$$ Reduciendo términos semejantes.

$$= \frac{-3}{x^2-1}$$ Dividiendo ambos términos entre 2.

EJERCICIO 1.6

Sumar las siguientes fracciones que tienen diferente denominador y expresar el resultado en la forma más simple.

1. $\frac{2b-1}{10} + \frac{b+1}{4}$
2. $\frac{7x}{8} - \frac{3x}{6} + \frac{5x}{24}$
3. $\frac{4}{a^3} - \frac{8}{a^2} + \frac{4}{a}$
4. $\frac{a-1}{3a+6} - \frac{6}{12+6a}$
5. $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-1}$
6. $\frac{m^2+3}{m^2-1} + \frac{2}{m+1}$
7. $\frac{1}{y+3} + \frac{y}{y+2}$
8. $\frac{1-c}{4-c} + \frac{c-13}{3c-12}$
9. $\frac{w}{5w+1} + \frac{3w}{5w-1} - \frac{20w^2}{25w^2-1}$
10. $\frac{2}{a-b} - \frac{2}{a+b} + \frac{4a}{b^2-a^2}$
11. $\frac{8x}{y^2-x^2} + \frac{4}{x-y} - \frac{4}{x+y}$
12. $\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+4x+4}$

13. $\frac{a+6}{a} - \frac{a+7}{a+1} + \frac{6}{a^2+3a+2}$
14. $\frac{s+5}{s+4} - \frac{s+4}{s+5} + \frac{s^2+6s+7}{s^2+9s+20}$
15. $\frac{2}{x^2+7x+12} + \frac{3}{x^2-3x-18} - \frac{4}{x^2-2x-24}$

1.11 FRACCIONES COMPLEJAS.

Una fracción cuyo numerador, denominador o ambos contienen fracciones, se llama fracción compleja.

La forma más simple de una fracción compleja es aquella donde el numerador y denominador contienen una sola fracción, como se ejemplifica.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

En esta fracción, los términos a y d se llaman extremos y los términos b y c se llaman medios de la fracción.

Una fracción compleja se simplifica si la transformamos en una división.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$ Expresándola como división.

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$ Invirtiendo el divisor.

$$= \frac{ad}{bc}$$ Multiplicando las fracciones.

La simplificación de una fracción compleja de esta forma se hace directamente si aplicamos el principio que dice "Producto de extremos entre producto de medios".

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

La línea que separa las dos fracciones, se llama línea principal y se escribe más fuerte y más larga que las otras líneas.

Ejemplo 1.

Simplificar la fracción compleja

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{5}{6}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{2 + 5}{6}}{\frac{9 - 4}{9}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{9}}$$

$$= \frac{7 \cdot 9}{6 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{21}{10}$$

Ejemplo 2

Simplificar $\dfrac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x^2} - 1}$

Solución:

$$\frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{\frac{1 + x}{x}}{\frac{1 - x^2}{x^2}} = \frac{x^2 (1 + x)}{x (1 - x^2)}$$

$$= \frac{x^2 (1 + x)}{x (1 + x) (1 - x)} = \frac{x}{1 - x}$$

EJERCICIO 1.7

Simplificar las siguientes fracciones complejas.

1. $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}$

2. $\dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{4}}$

3. $\dfrac{\frac{7}{5} - 1}{\frac{3}{15}}$

4. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}$

5. $\dfrac{\frac{7}{5} - 1}{1 - \frac{4}{5}}$

6. $\dfrac{1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}}{1 + \frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{2}}}$

7. $\dfrac{x - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - x}$

8. $\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$

9. $\dfrac{\frac{x}{1-2x} + \frac{x}{1+2x}}{\frac{1}{1+2x} + 3}$

10. $\dfrac{\frac{4}{a-b} + \frac{4b}{a^2 + ab + b^2}}{\frac{5}{a^2 + ab + b^2} + \frac{5b}{a^3 - b^3}}$