Capítulo II

FUNCIONES Y RELACIONES

René Descartes científico, filósofo y matemático francés; fué el iniciador del sistema de coordenadas cartesianas.

CAPITULO II

FUNCIONES Y RELACIONES

2.1 INTRODUCCION

René Descartes (1596—1650) filósofo y matemático francés, fué quien primeramente concibió la idea de coordenadas y representó una pareja de números por un punto en el plano. Idea que fucionó el algebra con la geometría y dió origen a la Geometría Analítica.

2.2 COORDENADAS RECTANGULARES

El sistema ideado por Descartes, para localizar un punto en el plano, tiene como referencia dos líneas que se cortan en ángulo recto, una en posición horizontal y la otra vertical, líneas que reciben el nombre de ejes, el horizontal, se conoce también como eje de las "X" o de las abscisas y el vertical, como eje de las "Y" o de las ordenadas. Estos ejes, dividen el plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, los cuales se enumeran siguiendo un giro en contra de las manecillas del reloj, considerando como primer cuadrante el superior derecho.

El punto de intersección de las dos líneas se llama origen, el cual marca el cero al asociar los números reales con cada uno de los ejes.

En esta asociación, se cumple el principio de correspondencia biunívoca o uno a uno, entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de cada uno de los ejes. (Recuérdese la definición de conjuntos equivalentes.)

Los números positivos quedan localizados a la derecha del eje de las Y y arriba del eje de las X y los números negativos se localizan a la izquierda del eje de las Y y abajo del eje de las X.

En los extremos positivos de ambos ejes, se suelen dibujar puntas de flechas. Fig. 2.1

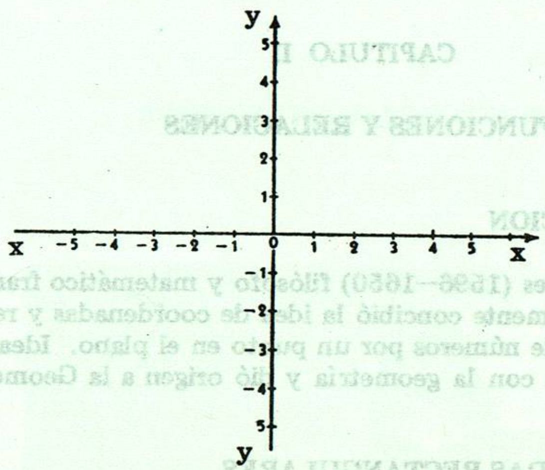


Figura 2.1

El principio de correspondencia biunívoca también se cumple al relacionar pares ordenados de números reales y puntos en el plano, o sea que cada par ordenado representa un punto en el plano y a cada punto del plano, se le asocia un par ordenado y sólo uno.

A los elementos de un par ordenado se les identifica con los nombres de abscisa y ordenada, en el orden primero y segundo respedtivamente, también se conocen como caoordenadas del punto. Un par ordenado cualesquiera se representa en la forma (x, y), donde x representa la abscisa y y la ordenada del punto. Todo punto sobre el eje X tiene como ardenada el número cero, cuya pareja ordenada es (x, 0) y un punto sobre el eje Y tiene como abscisa el número cero, asociado con la pareja (0, y), el origen tiene como coordenadas (0, 0).

Con lo expuesto anteriormente y aplicando el concepto de producto cartesiano de dos conjuntos, el plano bidimensional se define como el producto cartesiano

$$R \times R = \left\{ (x, y) \mid x \in R, y \in R \right\}$$

Localización de puntos en el plano

La localización de puntos en el plano, dada una pareja ordenada de números, se realiza de la manera siguiente:

Primero

Marcar sobre el eje de las X la distancia que representa el primer elemento de la pareja ordenada, a la derecha del origen si es positivo y hacia la izquierda del origen si es nagativo, utilizando una escala apropiada.

Segundo

Marcar sobre el eje de las Y la distancia representada por el segundo elemento de la pareja ordenada, hacia arriba del origen si es positivo y hacia abajo del origen si es negativo.

Tercero

Levantar perpendiculares a ambos ejes en los puntos marcados.

Cuarto

El punto de intersección de estas líneas perpendiculares, representa el punto del plano, asociado con el par ordenado dado. Fig. 2.2

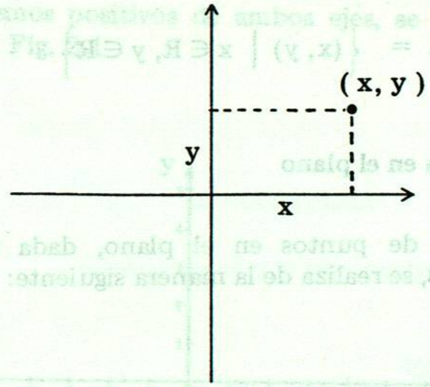


Figura 2.2

Los signos de las coordenadas en los diferentes cuadrantes son como se indican en la Fig. 2.3

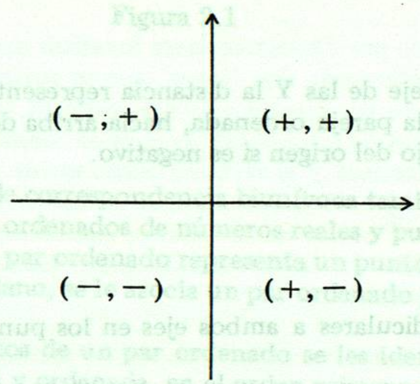


Figura 2.3

Ejemplo 2.1

Localizar en el sistema de coordenadas rectangulares los puntos (4 , 2) y (− 3 , − 5). Fig 2.4

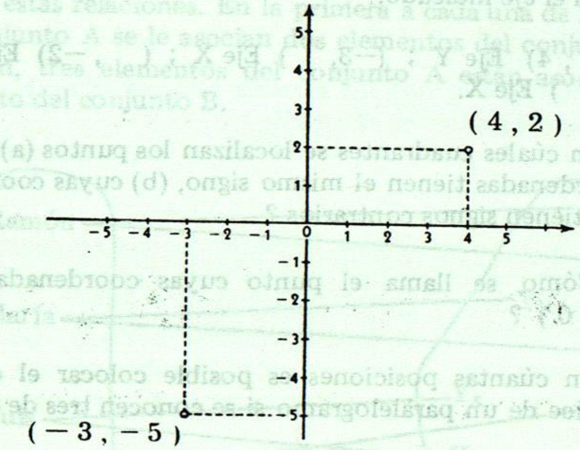


Figura 2.4

EJERCICIO 2.1

1. Localizar en el sistema cartesiano los puntos (5 , 7) , (5 , − 7) , (− 5 , 7) y (− 5 , − 7)

2. Localizar en el sistema cartesiano los puntos (3 , 0) , (− 3 , 0) , (0 , 3) , (0 , − 3) y (0 , 0) .

3. En los siguientes pares ordenados, escribir la coordenada faltante, para que el punto se localice en el cuadrante indicado.

   (−5,) III cuadrante, (4,) I cuadrante,
   (, 2) II cuadrante, (7,) IV cuadrante.

4. ¿ Qué valor tiene la ordenada de un punto situado en el eje de las Y ?

5. ¿ Qué valor tiene la abscisa de un punto situado en el eje de las X ?

6. En los siguientes pares ordenados, decir que valor debe tener la coordenada faltante, para que el punto se localice en el eje indicado.

(, 4) Eje Y ; (−3,) Eje X ; (, −2) Eje Y ; (8,) Eje X.

7. ¿ En cúales cuadrantes se localizan los puntos (a) cuyas coordenadas tienen el mismo signo, (b) cuyas coordenadas tienen signos contrarios ?

8. ¿ Cómo se llama el punto cuyas coordenadas son (0 , 0) ?

9. ¿ En cúantas posiciones es posible colocar el cuarto vértice de un paralelogramo si se conocen tres de ellos ?

10. Un paralelogramo tiene tres de sus vértices localizados en los puntos (2, 2), (3 , 5) y (6 , 2) . Encontrar las coordenadas del cuarto vértice en sus tres posiciones posibles y dibujar los tres paralelogramos.

11. Localizar los puntos cuyas coordenadas se dan a continuación y dar alguna característica de la recta que representan, al unirlos.

a) (5, − 2) , (5, − 1) , (5, 0) , (5, 1) , (5, 2)

b) (−2, −2) , (−1, −2) , (0, −2) , (1, −2) , (5, −2)

c) (−2, −2) , (−1, −1) , (0, 0) (1, 1) , (2, 2)

12. Localizar los puntos dados a continuación, unirlos con líneas rectas y decir alguna característica de la figura que representa.

a) (−3, 0) , (0, 6) , (3, 0)

b) (0, 0) , (4, 0) , (4, 3)

c) (−5, −1) , (−5, −6) , (1, −1) , (1. −6)

2.3 RELACIONES

Toda relación establece una correspondencia entre dos conjuntos cualesquiera. Relación que puede representarse por medio de los diagramas de Venn. En las figuras 2.5 y 2.6 se representan dos de estas relaciones. En la primera a cada una de los elementos del conjunto A se le asocian dos elementos del conjunto B. En la degunda, tres elementos del conjunto A están asociados con el elemento del conjunto B.

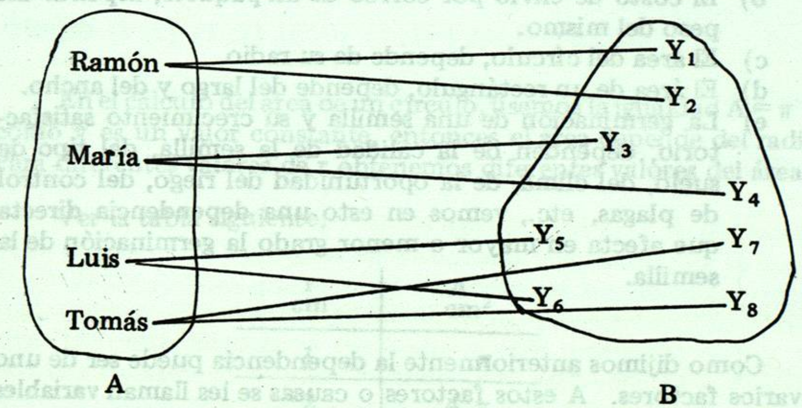


Fig. 2.5

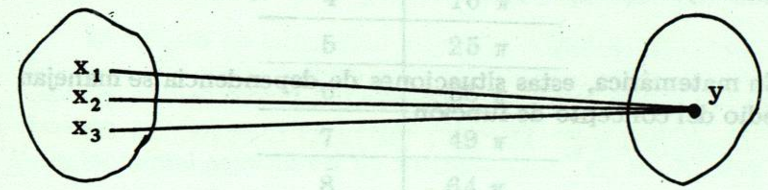


Fig. 2.6

En los números reales, una relación es un conjunto de parejas ordenadas de números.

Un tipo especial de relación, cuya importancia en matemática es básica, es conocida con el nombre de función.

2.4 FUNCIONES

Es muy frecuente encontrarnos en la vida diaria con situaciones o hechos que dependen de uno o varios factores, muy similar a lo que en física llamamos la relación causa—efecto, como ejemplos tenemos:

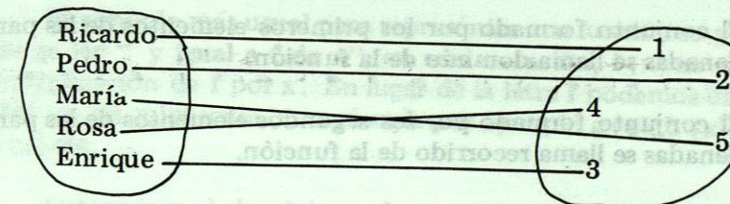
a) La calificación que un alumno obtiene en un curso, depende del interés en el estudio.
b) El costo de envío por correo de un paquete, depende del peso del mismo.
c) El área del círculo, depende de su radio.
d) El área de un rectángulo, depende del largo y del ancho.
e) La germinación de una semilla y su crecimiento satisfactorio, dependen de la calidad de la semilla, del tipo de suelo, del clima, de la oportunidad del riego, del control de plagas, etc., vemos en esto una dependencia directa que afecta en mayor o menor grado la germinación de la semilla.

Como dijimos anteriormente la dependencia puede ser de uno o varios factores. A estos factores o causas se les llaman **variables independientes** y los hechos o efectos, reciben el nombre de **variables dependientes**. Aquí se analizan hechos que dependen de una sola variable, los demás se estudian en cursos superiores.

En matemática, estas situaciones de dependencia se manejan por medio del concepto de función.

Una función también establece una correspondencia entre dos conjuntos, tal correspondencia se puede dar con diagramas, gráficas, tablas y fórmulas.

Así si relacionamos el conjunto de maestros de una escuela y el conjunto de grupos de la misma, podemos formar parejas, haciendo corresponder un grupo a cada maestro. Si representamos estos dos conjuntos por medio de los diagramas de Venn, tenemos la ilustración en la Fig. 2.7



Conjunto de maestros.

Conjunto de grupos.

Fig. 2.7

En el cálculo del área de un círculo, usamos la igualdad $A = \pi r^2$ como π es un valor constante, entonces el área depende del radio. Para diferentes valores de r obtenemos diferentes valores del área.

Ver la tabla siguiente.

r cm	A cm²
1	π
2	4π
3	9π
4	16π
5	25π
6	36π
7	49π
8	64π
9	81π
10	100π

Definición de Función

Una función es una relación, o sea un conjunto de pares ordenados, en el cual dos pares ordenados no tienen el mismo primer elemento.