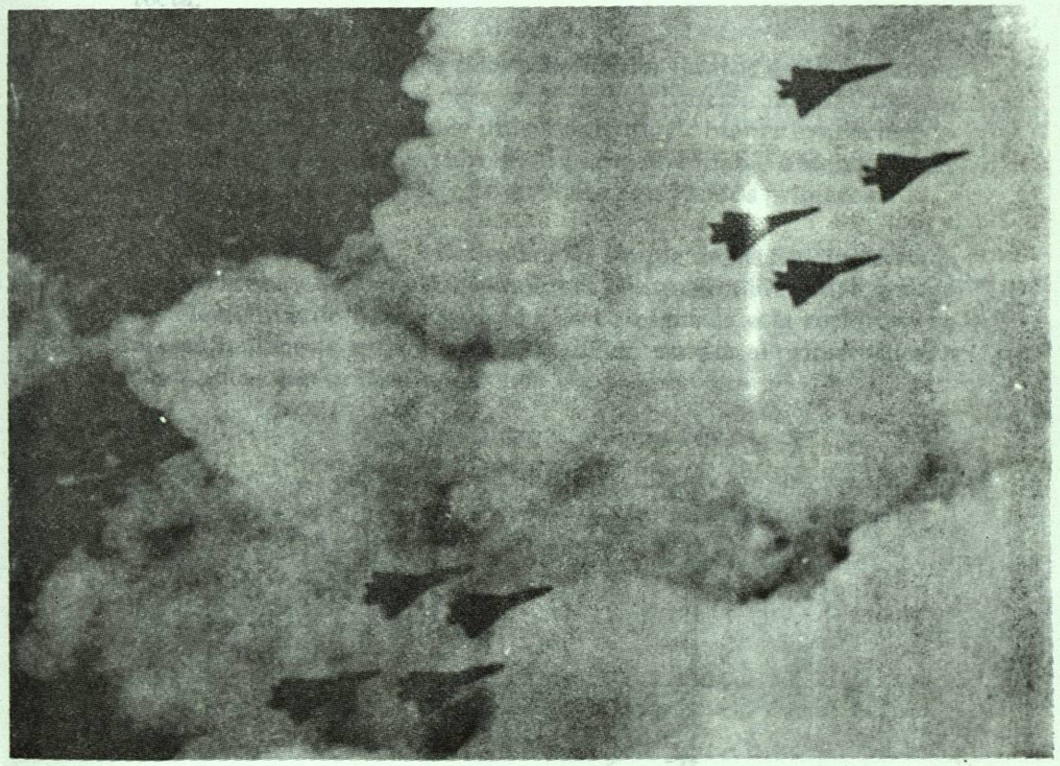
Capítulo III

FUNCIONES LINEALES



En la aerodinámica moderna, la base del diseño de los motores a reacción es la matemática.

CAPITULO III

FUNCIONES LINEALES

3.1 DEFINICION

Una función lineal es aquella función biunívoca que se caracteriza, analíticamente, en que el exponente de la variable independiente es unitario y geométricamente, por representar una línea recta.

Por geometría plana sabemos que dos puntos definen una recta y sólo una, entonces para graficar una función lineal, basta con dar dos valores a la variable independiente y obtener los correspondientes valores de la función, pero es recomendable obtener un tercer punto y observar que esté alineado con los dos primeros.

La función f (x) = x es la más simple de las funciones lineales, por ser y = x recibe el nombre de función identidad, ya que los elementos de cada par ordenado son iguales y la recta que representa tiene la característica de dividir en dos al primer y tercer cuadrantes. Su gráfica se da en la Fig. 3.1.

Ejemplo 3.1 **Graficar la función f (x) = x**

Solución:

$f(x) = x$
$f(-1) = -1$
$f(0) = 0$
$f(1) = 1$

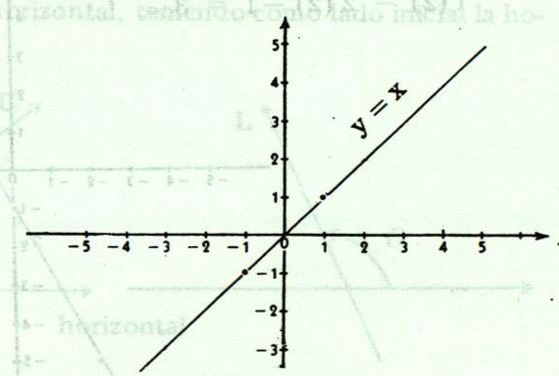


Figura 3.1

Ejemplo 3.2 Graficar la función $f(x) = x + 3$

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 3 \\ f(1) &= 1 + 3 = 4 \\ f(2) &= 2 + 3 = 5 \\ f(3) &= 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

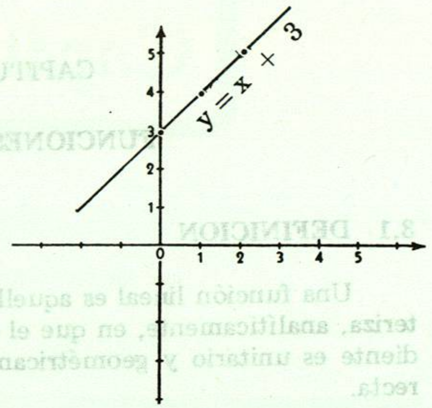


Figura 3.2

Ejemplo 3.3 Encontrar la gráfica de $f(x) = 2x - 1$

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 1 \\ f(-2) &= 2(-2) - 1 = -5 \\ f(0) &= 2(0) - 1 = -1 \\ f(2) &= 2(2) - 1 = 3 \end{aligned}$$

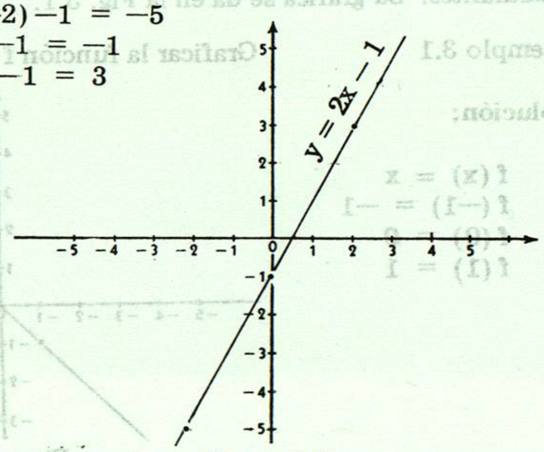


Figura 3.3

EJERCICIO 3.1

Graficar las siguientes funciones lineales, dando tres valores a la variable independiente.

1. $f(x) = 4 - x$	2. $f(x) = \frac{x}{2}$
3. $f(x) = -x$	4. $f(x) = 5x + 2$
5. $f(x) = 3x$	6. $f(x) = k$
7. $f(x) = 6 - 2x$	8. $f(x) = 0$
9. $y = \frac{2 - x}{2}$	10. $y = \frac{x - 1}{3}$
11. $y = \frac{9x}{2} - 1$	12. $8x + 4 - y = 0$

3.2 INCLINACION Y PENDIENTE DE LA RECTA

Toda línea recta tiene determinada posición en el plano, posición que se analiza, por lo que en geometría llamamos ángulo de inclinación de la recta.

Definición

Se llama ángulo de inclinación de una recta L, al ángulo que forma la recta con la horizontal, teniendo como lado inicial la horizontal. Fig. 3.4

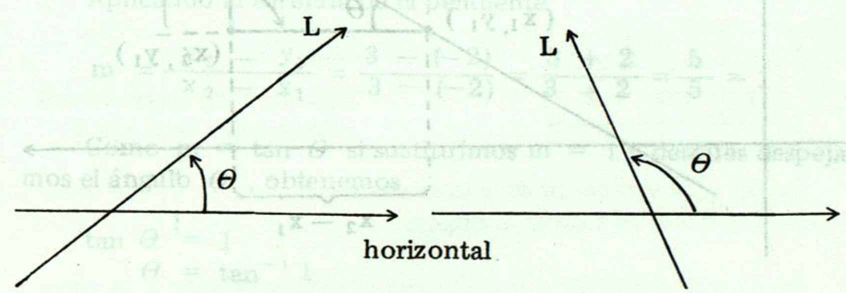


Figura 3.4

La tangente trigonométrica de un ángulo agudo, en un triángulo rectángulo, se define como la relación que hay entre el cateto opuesto y el adyacente. Ver Fig. 3.5

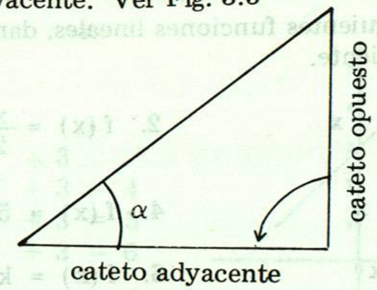


Figura 3.5

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

La tangente trigonométrica del ángulo de inclinación, se llama pendiente de la recta y se representa por la letra m.

Si θ (theta) representa el ángulo de inclinación entonces $m = \tan \theta$

Conociendo dos puntos sobre la recta

$P_1 \; (x_1, \; y_1)$, $P_2 \; (x_2, \; y_2)$

podemos expresar la pendiente como la diferencia de ordenadas entre la diferencia de abscisas como se indica en la Fig. 3.6

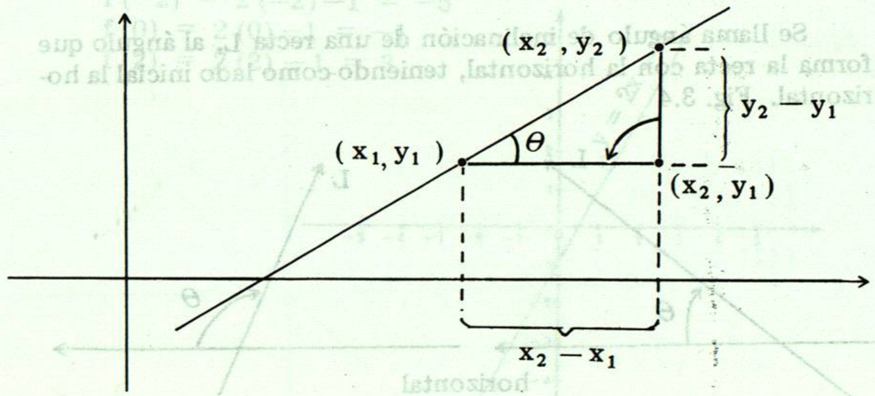


Figura 3.6

$$m = \frac{\text{diferencia de ordenadas}}{\text{diferencia de abscisas}}$$

$$m = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 3.4

Encontrar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (—2, —2) y (3, 3)

Solución:

Localizando los puntos dados en coordenadas cartesianas, tenemos:

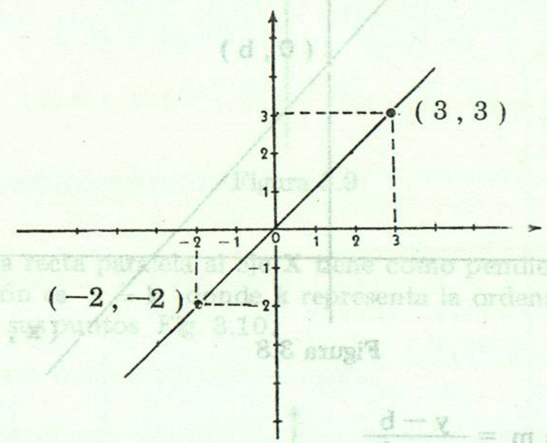


Figura 3.7

Aplicando la fórmula de la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{3 + 2}{3 + 2} = \frac{5}{5} = 1$$

Como $m = \tan \theta$ si sustituímos $m = 1$ y despues despejamos el ángulo θ , obtenemos

$\tan \theta = 1$
$\theta = \tan^{-1} 1$
$\theta = 45^{o}$

Este último valor lo puedes obtener consultando las tablas trigonométricas para la función tangente o bien usar una calculadora con funciones trigonométricas.

La expresión $\theta = \tan^{-1} 1$ significa que θ es el ángulo cuya tangente vale o es la unidad, también se puede escribir $\theta =$ arctan 1 que se lee θ es igual al arco cuya tangente es 1.

Si una recta corta el eje Y en un punto (0, b) y tiene como pendiente m, podemos utilizar la igualdad con la que se calcula la pendiente para encontrar la ecuación de la recta, haciendo intervenir el punto conocido (0, b) y otro desconocido (x, y) que esté sobre la recta Fig. 3.8

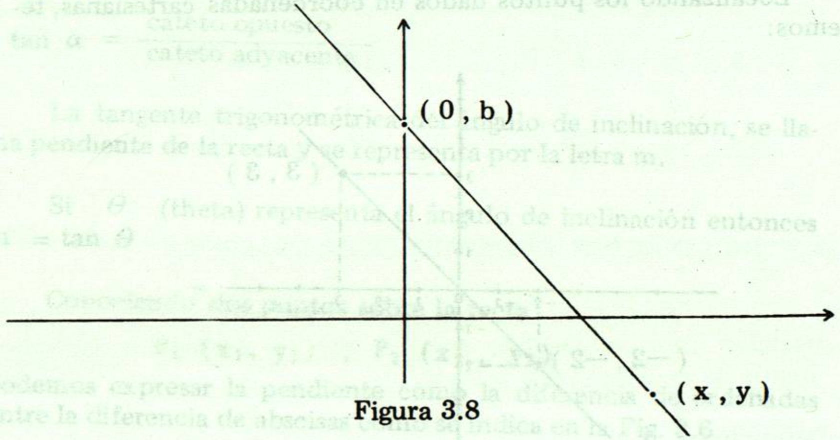


Figura 3.8

Entonces $m = \dfrac{y - b}{x - 0}$

Despejando la variable "y", tenemos:

$$y - b = m(x - 0)$$

$$\boxed{y = mx + b}$$ **Ecuación de la recta con intersección en el eje Y.**

Como el punto (o, b) es la intersección con el eje Y, a la ordenada b se le llama **ordenada al origen.**

Si $b = 0$ entonces la ordenada al origen es cero y la recta pasa por el origen, su ecuación es $y = mx$ que representa la ecuación de toda recta a través del origen, donde el valor de la pendiente m define su posición.

Si la pendiente es igual a cero, la ecuación $y = mx$ se convierte en $y = 0$ que es la ecuación del eje de las X, indicando el hecho de que todo punto sobre el eje horizontal, tiene como ordenada el valor cero. Fig. 3.9

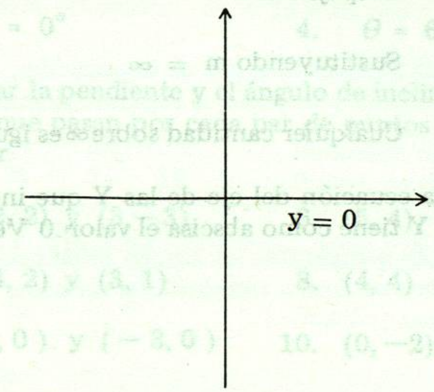


Figura 3.9

Toda recta paralela al eje X tiene como pendiente $m = 0$ y su ecuación es $y = k$ donde k representa la ordenada de cualesquiera de sus puntos Fig. 3.10.

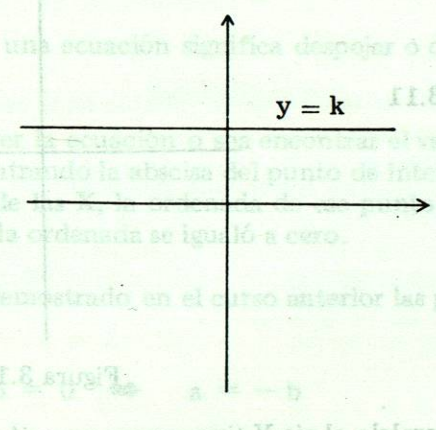


Figura 3.10

Como sabemos, el eje vertical o eje de las Y forma un ángulo recto o de 90^o con el horizontal y su pendiente es $m = \tan 90^o = \frac{1}{0} = \infty$. Si sustituímos este valor en la fórmula $y = mx$ puesto que el eje Y también pasa por el origen, obtenemos:

$y = mx$ Ecuación inicial

$x = \frac{y}{m}$ Despejando x

$x = \frac{y}{\infty}$ Sustituyendo $m = \infty$

$x = 0$ Cualquier cantidad sobre ∞ es igual a 0

$x = 0$ es la ecuación del eje de las Y que indica que todo punto sobre el eje Y tiene como abscisa el valor 0 Ver Fig. 3.11.

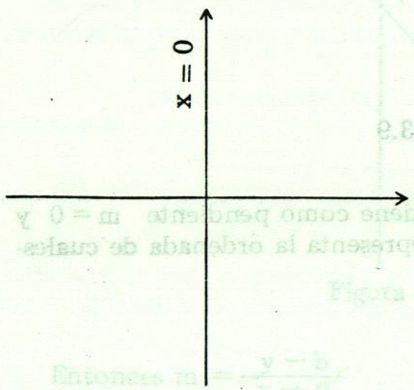


Figura 3.11

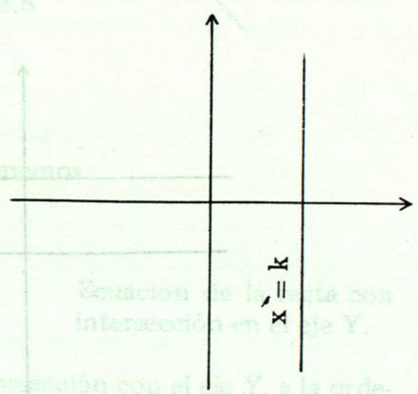


Figura 3.12

Toda recta paralela al eje Y tiene como ecuación $x = k$ donde k representa la abscisa de cualesquiera de sus puntos fig. 3.12

EJERCICIO 3.2

Obtener la pendiente de cada una de las rectas cuya inclinación es el ángulo

1. $\theta = 45°$ 2. $\theta = 30°$

3. $\theta = 0°$ 4. $\theta = 60°$

Encontrar la pendiente y el ángulo de inclinación de cada una de las rectas que pasan por cada par de puntos dados a continuación y graficar

5. (–2, 2) y (3, –3) 6. (5, 4) y (–2, –3)

7. (–4, 2) y (3, 1) 8. (4, 4) y (6, 6)

9. (1, 0) y (– 3, 0) 10. (0, –2) y (3, 0)

3.3 ECUACIONES DE LA FORMA $ax + b = 0$

Cuando una función lineal $f(x) = ax+b$ (donde $a = m$) se iguala a cero, se obtiene una ecuación lineal en una sola variable de la forma $ax + b = 0$, donde a y b actúan como constantes,"x" es la variable llamada incógnita.

Resolver una ecuación significa despejar o dejar sola la incógnita.

Al resolver la ecuación o sea encontrar el valor de la variable, estamos encontrando la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje de las X, la ordenada de ese punto es cero ya que la función o sea la ordenada se igualó a cero.

Hemos demostrado en el curso anterior las proposiciones que nos dicen:

Si $a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

Si $ab = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b}$

O sea, en toda igualdad al cambiar de miembro un sumando, cambia su signo y un factor al cambiar de miembro, pasa como divisor conservando su signo.

Aplicando estos teoremas, podemos resolver ecuaciones en forma directa, siguiendo los pasos dados a continuación.

Primero

Se dejan o se pasan al primer miembro de la ecuación, los términos que contengan la variable y se pasan al segundo miembro los términos independientes.

Segundo

Se suman los términos semejantes en ambos miembros, quedando en el primer miembro un único término con variable.

Tercero

El coeficiente del término que contiene la variable, pasa como divisor con el mismo signo al segundo miembro, quedando sola la variable.

Cuarto

Se efectúan operaciones en el segundo miembro.

Quinto

Si sustituímos el valor obtenido de la variable en la ecuación original y después de efectuar operaciones llegamos a una identidad, significa que la ecuación se resolvió correctamente.

Ejemplo 3.5

Resolver la ecuación $4x - 8 = 0$

Solución:

$4x - 8 = 0$ Ecuación dada

$4x = 0 + 8$ Primer paso

$4x = 8$ Segundo paso

$x = \frac{8}{4}$ Tercer paso

$x = 2$ Cuarto paso

Ejemplo 3.6

Resolver la ecuación $5x + 16 = 3x + 2$

Solución:

$5x + 16 = 3x + 2$ Ecuación dada

$5x - 3x = 2 - 16$ Primer paso

$2x = -14$ Segundo paso

$x = \frac{-14}{2}$ Tercer paso

$x = -7$ Cuarto paso

Comprobación

$5x + 16 = 3x + 2 \quad ; \quad x = -7$

Sustitución

$5(-7) + 16 = 3(-7) + 2$

$-35 + 16 = -21 + 2$

$-19 = -19$

EJERCICIO 3.3

Resolver las siguientes ecuaciones lineales y comprobar el resultado.

1. $8x - 16 = 0$
2. $7x - 14 = 0$
3. $3x - 18 = 2 - 2x$
4. $7x + 36 = 3x - 4$
5. $8x - 2x - 42 = 0$
6. $3x + 8 = 10 - x$
7. $60 - 10 = 3x + 2x$
8. $-8x - 35 = 2x + 15$