b) **SISTEMAS MULTIPLICATIVOS.** En los sistemas multiplicativos hay 2 conjuntos de símbolos: uno para las unidades simples 1, 2, 3, ... $(b-1)$ y el otro para las unidades de orden $b, b^2, b^3, \ldots, b^n, \ldots$

Los números que contienen conjunto de unidades de diferentes órdenes, se representan agrupando parejas formadas por un símbolo del primer conjunto con otro del segundo conjunto en orden descendente de las potenciales de b, cuyo valor es la multiplicación de los numerales de cada pareja y el número es la suma de estos productos. Consideremos un ejemplo de un sistema de esta clase:

SISTEMA CHINO-JAPONES. Es un sistema multiplicativo de base 10 con los siguientes numerales:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千

ejemplos :

1979 = 千 九 百 七 十 九

204 = 二 百 四

En el primer ejemplo hay una sola unidad de millar por lo que no se requiere formar la pareja del 1 con el 1000 y el número se obtiene de arriba a abajo como 1(1000) + 9(100) + 7(10) + 9 = 1979.

En el segundo ejemplo se observa que en estos sistemas tampoco se requiere el cero pues el número queda perfectamente expresado como 2(100) + 4 = 204.

c) **SISTEMAS POSICIONALES.** En los sistemas posicionales se utilizan numerales para los números menores que la base b incluyendo el cero, aún

cuando los primeros sistemas de este tipo no tenían símbolo para el cero, estos resultaban deficientes y complicados en las operaciones. Entonces, se requieren símbolos para 0, 1, 2, 3, ..., $(b-1)$.

Cada número natural es una sucesión ordenada de estos símbolos, permitiendo repeticiones, donde el primer símbolo de derecha a izquierda, representa unidades simples; el segundo, unidades de primer orden, es decir, es un múltiplo de b; El 3° es múltiplo de b^2; de manera que la representación de un número por la sucesión: $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ corresponde a la suma: $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0$, es decir, es un polinomio de potencias de la base $\underline{b}$ Esta representación es similar a la de los sistemas multiplicativos, pero en un sistema posicional no se requieren símbolos para las potencias de la base y la identificación de las unidades de diferentes órdenes la proporciona la posición de cada numeral en la sucesión ordenada. Además, en un sistema posicional es necesario el símbolo para el cero, para indicar la ausencia de unidades de determinado orden y conservar el valor posicional de los demás símbolos de la sucesión ordenada. Para los números fraccionarios se utiliza un punto que separa la parte entera de la parte fraccionaria en la sucesión ordenada, de manera que a la derecha del punto el primer símbolo corresponde a unidades de orden -1, es decir un múltiplo de la fracción unitaria $b^{-1} = \frac{1}{b}$, el segundo es un multiplo de $b^{-2} = \frac{1}{b}2$ etc.. En general se tiene lo siguiente:

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \ldots = a^n b^n + \ldots + a_1 b + a_0 + a_{-1} b^{-1} + \ldots$$

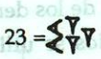
Para los negativos se antepone el signo - completando el sistema posicional de base b.

Consideremos algunos ejemplos:

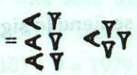
1.- **SISTEMA CUNEIFORME BABILONIO.** La antigua civilización Babilonia, alrededor del año 3000 A.C., empezó a registrar por medio de su escritura con caracteres en forma de cuñas, lo que consideraban importante. Desde la segunda mitad del siglo pasado hasta la fecha se han desenterrado más de 500,000 tabletas de arcilla cocida grabadas, de las cuales 300 son exclusivamente matemáticas. De acuerdo con esta fuente de información, inventaron un sistema de numeración posicional base 60 sin cero, combinado con agrupación simple base 10 para los numerales necesarios. Los símbolos para los numerales del 1 al 59 eran los siguientes:

1 10

Además, utilizaban el símbolo para indicar resta y simplificar sus numerales. Por ejemplo:

23 =  49 =

Para números mayores que 59, el sistema es posicional, base 60. Por ejemplo:

1993 = (33) (60) + 13 =  = $(33,13)_{60}$

El sistema base 10 de agrupación simple para los numerales y la falta del cero dificulta la expresión escrita de los números y las operaciones aritméticas.

2.- **SISTEMA MAYA.** Los Mayas inventaron un sistema de numeración posicional base 20, combinado con agrupación simple, base 5, para los numerales. Este sistema es similar al de los Babilonios pero tiene la importante diferencia de que incluye al cero en sus numerales. Los símbolos para obtener los numerales del 1 al 19 por agrupación simple, base 5, son los siguientes: 1 = . ; 5 = –. Por ejemplo:

12 = ⁚; 6 = ∸ ; 18 = ⁙

El símbolo para el cero es ⬭. Para los números mayores que 19 el sistema es posicional base 20, aunque en algunos registros aparecen las unidades de segundo orden como múltiplos de 18 (20). Por ejemplo, en el sistema puramente vigesimal:

$$1993 = 4(20^2) + 19(20) + 13 = \ldots\ldots ⁙ \; ⁚ = (4,19,13)_{20}$$

$$806 = 2(20^2) + 0(20) + 6 = \ldots ⬭ \; ∸ = (2,0,6)_{20}$$

3.- **SISTEMA CHINO.** Los chinos desarrollaron también un sistema de numeración posicional, base 10, con agrupación simple base 5 para los numerales del 1 al 9 sin el cero y con 2 símbolos para cada numeral que utilizaban según que el numeral ocupara posición par ó impar en la sucesión ordenada. Este sistema se llama Chino-Científico y no se sabe cuando lo empezaron a usar porque en la civilización China antigua como en la India, los Mayas y otras, las fuentes de información son escasas y no están debidamente ubicadas en el tiempo.

Posiciones impares :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨	0

Posiciones pares :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	–	=	≡	≣	≣̄	⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥	0

4.- **SISTEMA HINDU-ARABIGO.** Es nuestro actual sistema de números, posicional base 10. El registro más antiguo que se conoce es una inscripción de sus numerales, sin incluir el cero, en las columnas del palacio del Rey Asoka, en la India, alrededor del año 250 A.C. De acuerdo con algunos historiadores, el símbolo para el cero fue introducido por los Hindúes aproximadamente 100 años antes de nuestra era. Sin embargo, el primer registro escrito del cero aparece hasta el siglo IX, época en que se difundió este sistema de números en Europa a través de una traducción al latín del libro del árabe,Al-Khöwarizmi ,en el que se proponen procesos sistemáticos para realizar las operaciones aritméticas. Los numerales originales de los hindúes evolucionaron a través del tiempo hasta tomar su forma actual al inicio del Renacimiento. Como en todos los sistemas posicionales, en este sistema cada número se expresa como una sucesión ordenada de sus numerales 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, permitiendo repeticiones. Por ejemplo:

$$1992 = 1(10^3) + 9(10^2) + 9(10) + 2 = 1000 + 9(100) + 9(10) + 2$$

$$21.32 = 2(10) + 1 + 3(10^{-1}) + 2(10^{-2}) = 2(10^{+1}) + 1 + 3\left(\frac{1}{10}\right) + 2\left(\frac{1}{100}\right)$$

En el primer ejemplo se tiene un millar, 9 centenas, 9 decenas y 2 unidades. En el segundo hay 2 decenas, 1 unidad, 3 décimas y 2 centésimas.

A partir del sistema Hindú-Arábigo decimal posicional, que ha sido adoptado casi universalmente, existen actualmente una gran variedad de sistemas de pesas y medidas de longitudes, áreas, volúmenes y hasta en los sistemas monetarios, con diferentes bases para las unidades de agrupación, a pesar de los esfuerzos que se han realizado para establecer sistemas universales

que faciliten la comunicación internacional en todo lo que se relaciona con números. Sin embargo, el hombre ha logrado considerables éxitos hasta la fecha, a partir de los números como instrumentos de cuantificación y medición de los fenómenos naturales y artificiales que permite, en algunos casos, expresarlos matemáticamente para su explicación y análisis y para su aprovechamiento en la obtención de objetivos determinados.

1.7 CAMBIO DE BASE. Para obtener un número de nuestro sistema decimal posicional en otra base $\underline{b}$ cualquiera, se puede proceder como sigue:

Sea N el número en base 10 que queremos expresar en base b diferente de 10:

1. Dividir N entre b para obtener: $N = q_1 b + \upsilon_1$; $0 \le \upsilon_1 < b$ ①
si $q_1 < b$, entonces N en base $\underline{b} = (q_1 \upsilon_1)_b$

2. Si $q_1 \ge b$, dividir q_1, entre b para obtener :
$q_1 = q_2 b + \upsilon_2$ ②
$0 \le \upsilon_2 < b$
Sustituyendo ② en ① :
$N = (q_2 b + \upsilon_2) b + \upsilon_1 = q_2 b^2 + \upsilon_2 b + \upsilon_1$

Si $q_2 < b \Rightarrow N = (q_2 \upsilon_2 \upsilon_1)_b$

3. Si $q_2 > b$, se repite el proceso 2, hasta obtener un cociente $< b$.

Ejemplo: Expresar 198 en base 4:

$$\begin{array}{r|l} & 49 \\ 4 & 198 \\ & 38 \\ & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 12 \\ 4 & 49 \\ & 09 \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 3 \\ 4 & 12 \\ & 0 \end{array} \qquad 4$$

$\Rightarrow 198 \quad (3012)_4$

<u>Cambio de base b_1 a base b_2</u>

Es conveniente primeramente pasar de la base b_1 a la base 10 y después a la base b_2

Ejemplo: $(132)_4 = 1(4^2) + 3(4) + 2$

$= 16 + 12 + 2$

30

$$\begin{array}{r|l} & 4 < 7 \\ 7 & 30 \\ & 2 \end{array}$$

Ahora expresamos 30 en otra base, digamos 7

$(132)_4 = 30 = (42)_7$

De esta manera cambiamos el número

$(134)_4$, de la base 4 a la base 7, obteniendo

$(134)_4 = (42)_7$

<u>Operaciones en una base cualquiera *b*</u>

Para operar con numeros en base *b* es útil tener tablas de suma y multiplicación en esa base Por ejemplo, las tablas de multiplicación y suma en base 7 son

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	12
4	4	5	6	10	11	12	13
5	5	6	10	11	12	13	14
6	6	10	11	12	13	14	15

x	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	12	15	21	24
4	0	4	11	15	21	26	33
5	0	5	13	21	26	34	42
6	0	6	15	24	33	41	51

Ejemplo Sumar y multiplicar

$(325)_7$ y $(164)_7$

Verificar transformándolos a base 10, hacer la operación y volver el resultado a base 7.

$$\begin{array}{r} (325)_7 \\ +\ (164)_7 \\ \hline (522)_7 \end{array}$$

$166 + 95 = 261 \longrightarrow = (522)_7$

$(325)_7 = 3\,(7^2) + 2\,(7) + 5 = 166 \quad = 147+14+5=166.$

$(164)_7 = (7^2) + 6\,(7) + 4 = 95 \quad =49+42+4=95.$

$$\begin{array}{r} (325)_7 \\ \times\ (164)_7 \\ \hline 1636 \\ 2622 \\ 325 \\ \hline (63656)_7 \end{array} \qquad (166)(95) = 15770$$

$(63656)_7 = 6\,(7^4) + 3\,(7^3) + 6\,(7^2) + 5(7) + 6 = 15{,}770$

Otro ejemplo: Tablas de Suma y multiplicación para base 4.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Sumar y multiplicar: $(123)_4$ y $(201)_4$

$$\begin{array}{r} 123 \\ +\ 201 \\ \hline (330)_4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 201 \\ \times\ 123 \\ \hline 1203 \\ 1002 \\ 201 \\ \hline (31323)_4 \end{array}$$

Comprobación:

$$\begin{array}{r} (123)_4 = (1(4^2)+2(4)+3 = 16+8+3 = 27 \\ (201)_4 = 2\,(4^2)+1 = 32+1 = 33 \\ \hline 60 \end{array} +$$

Ahora:

$60 = (330)_4$

$(31323)_4 = 891 = (33)(27)$

L.C.D.C.

1.8 **COMPUTACION PRIMITIVA.** Los cálculos numéricos en los sistemas de numeración previos al sistema hindú-arábigo que utilizamos actualmente, enfrentaban dificultades derivadas de las siguientes limitaciones:

a) Limitaciones mentales, por los idiomas deficientes, sin alfabeto y reglas gramaticales que ordenaran el lenguaje. Además, los sistemas de numeración también eran deficientes, aunque algunos consideran que es cuestión de práctica y familiaridad para computar eficientemente en cualquier sistema.

b) Limitaciones físicas. Los medios para expresarse por escrito eran escasos y difíciles de producir manualmente. Algunos de los principales recursos en las primeras civilizaciones, son los siguientes:

TABLETAS DE ARCILLA COCIDA. Los Babilonios escribían sobre moldes de arcilla humeda y suave que luego sometían al fuego.

PAPIROS. Los egipcios obtuvieron este material de la caña pappus cortada en tiras longitudinales que acomodaban horizontalmente, cruzadas con trozos de 20 a 40 cms., presionándolas piedra sobre piedra, se ponían a secar pegándose con la goma que soltaban. Después se pulían con piedra.

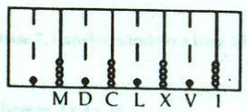
VITELA. Tela obtenida limpiando y secando piel de vaca, especialmente de fetos de becerros.

PERGAMINOS. Obtenidos de la piel de animales, especialmente ovejas.

PIZARRONES. "Pizarrones" de arena fueron usados desde la época de los griegos (700-200 A.C.) para cálculos numéricos y figuras geométricas. Tabletas de piedra se usaban para grabar registros importantes, desde las épocas prehistóricas. Hace unos 2000 años, los romanos utilizaron pequeños pizarrones con una delgada capa de cera, donde escribían con un estilete.

ABACOS. Para superar estas dificultades físicas y mentales, se inventaron los ábacos, empezando por el ábaco griego de arena, de piedra y de barro. Los ábacos aparecieron de diversas formas durante la edad media y constituyeron el primer dispositivo mecánico para cálculos numéricos utilizado por el hombre desde el período griego.

Abaco Romano :



Ejemplo: Sumar:

2534 + 1837 = MMDXXXIV+MDCCCXXXVII

= MMMMCCCLXXI = 4,371

PAPEL. Por medios manuales fue producido primeramente por los chinos de las cortezas de los árboles. Por medios mecánicos, se logró producirlo hasta 1850 y la imprenta fue inventada por Gütemberg en 1457. En China y Corea se realizaban impresiones mecánicas con linotipos de madera, desde el año 900. Los coreanos aseguran haber empleado moldes metálicos desde 1240, pero casi no los usaron hasta alrededor de 1450 cuando en Europa el alemán Gütemberg perfeccionaba la imprenta de caracteres móviles hechos de metal.

HISTORIA DE LAS MATEMATICAS

EJERCICIO 1. Sistemas de Numeración:

1.- Escribir los números **375** y **1642** en jeroglíficos egipcios, numerales griegos, numerales romanos, cuneiformes babilonios y numerales mayas.

2.- Sumar y multiplicar los números **28** y **63** en jeroglíficos egipcios y en numerales romanos.

3.- Expresar en numerales mayas y sumar los siguientes números:

a) 45 y 318

b) 1800 y 9531

4.- Probar que para multiplicar x por y, ambos entre 5 y 10, podemos levantar **(x-5)** y **(y - 5)** dedos en cada mano, sumar los dedos levantados para las decenas y multiplicar los dedos cerrados para las unidades.

Observación: Los dedos que quedan cerrados son : **(10-x)** y **(10-y)**.

5.- Construir tablas de suma y multiplicación para un sistema de números de base **5**. Expresar en esta base los números **1782** y **485**.

6.- Sumar y multiplicar $(1332)_5$ y $(342)_5$.

Verificar, transformando a base **10**, efectuando las operaciones y volviendo a base **5**.

7.- Expresar $(31102)_4$ en base **7**, transformándolo a base **10** y después a base **7**.

8.- Determinar para que base es 2 x 3 = 10.

En que base es 3 x 3 = 12.

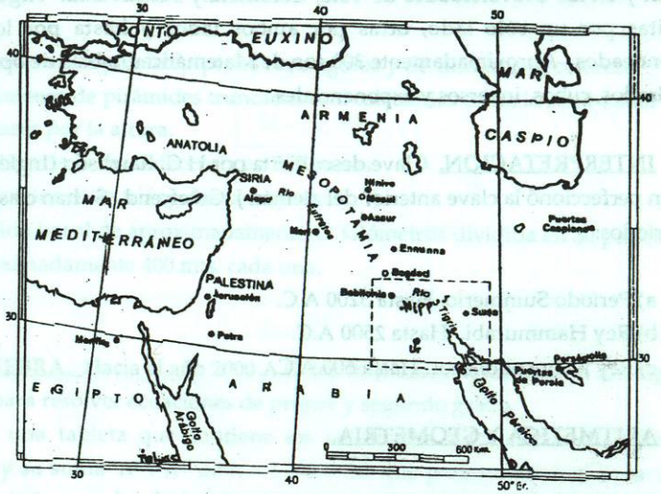
9.- Demostrar que se puede pesar en una balanza simple de brazos iguales cualquier número entero w de kilos, disponiendo de pesas de $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\ldots$ kilos.

10.- Demostrar que se puede pesar en una balanza simple de brazos iguales cualquier número entero w de kilos disponiendo de pesas de $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots\ldots$ kilos. Sug: $2(3)^n = 3^{n+1} - 3^n$

11.- Si a alquien se le pide que piense un número de 2 dígitos, que multiplique el dígito de las decenas por 5, que le agregue 7, que lo multiplique por 2 y que le agregue el dígito de las unidades, probar que, restando 14 del resultado final, se obtiene el número original.

CAPITULO 2

MATEMATICAS DE LAS CIVILIZACIONES ANTIGUAS.



2.1 INTRODUCCION. Como ya hemos observado, las civilizaciones antiguas que dejaron registros perdurables son Babilonia y Egipto. De estos registros históricos, se han seleccionado aquellos que corresponden a Matemáticas, es decir, que contienen números y figuras geométricas y que plantean y resuelven problemas. Durante el cuarto milenio antes de nuestra era, aparecen casi simultáneamente en ambas civilizaciones, la escritura, el uso de la rueda y los metales, propiciando la necesidad de los números y las figuras geométricas para contar y medir. Es conveniente enfatizar que las Matemáticas de esta primera etapa son básicamente intuitivas y son impulsadas por necesidades prácticas. No se ha encontrado evidencia de demostraciones en las Matemáticas de estas civilizaciones, aún cuando encontraremos algunas fórmulas correctas ó aproximadas para resolver problemas.