11.- Encontrar una fórmula para la constante mágica de los cuadros no-normales de orden impar mayor que 3, descritos al final de este capitulo.

12.- Construir un cuadro mágico no-normal de orden 7, con la regla dada para n impar mayor que 3, para a=1.

CAPITULO 3

GRECIA. LOS PITAGORICOS

3.1 NUEVA CIVILIZACION

Alrededor del año 800 A.C., surge una nueva civilización en la costa oeste de Asia Menor, Grecia é Italia, impulsada por los siguientes sucesos:

1.- Egipto y Babilonia pierden su poderío y surgen como nuevas potencias los Griegos, Hebreos, Fenicios y Asirios.

2.- Se inicia la Edad de Hierro, mejorando todo lo relacionado con herramientas.

*3.- Se inventa el alfabeto, permitiendo la formalización de la comunicación oral y escrita.

4.- Se establecen sistemas de monedas, facilitando el comercio interno é internacional.

5.- Se hacen descubrimientos geográficos, estimulando la navegación y el comercio.

3.2 TALES DE MILETO. Notable personaje, del Siglo VI A.C., considerado como el iniciador de la matemática demostrativa a través del método deductivo en la Geometría. También se le reconoce como el iniciador de la Física Formal.

En Geometría cambia la intuición y las verificaciones empíricas por razonamientos lógicos, estableciendo los siguientes resultados:

1.- Los círculos son bisectados por cualquiera de sus diámetros.

2.- Los ángulos base de un triángulo isóceles son iguales.

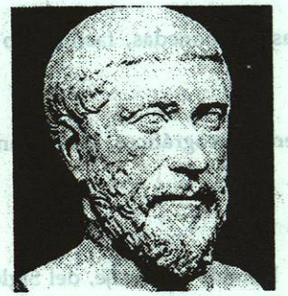
3.- Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

4.- Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente iguales.

5.- Todo ángulo inscrito en un semi círculo es recto.

Tales fue respetado como ingeniero, comerciante, maestro, filósofo, astrónomo y matemático. Está considerado como uno de los 7 sabios de la antigüedad.

3.3 PITAGORAS Y LOS PITAGORICOS.



La fuente principal de información sobre Tales y Pitágoras es el Compendio Eudemiano, historia de la Geometría Griega hasta 335 A.C., escrito por Eudemus, ampliado y analizado por Proclus el año 500 D.C.

Pitágoras nació en la isla de Samos el año 572 A.C., estudió con Tales de Mileto. Emigró al puerto griego de Crotona, en el sureste de Italia, donde fundó la Escuela Pitagórica de estudios de Filosofía, Matemáticas y Ciencias Naturales. que dió lugar a una fraternidad que practicaba ritos religiosos. La enseñanza era oral é incluía un cuadro básico de materias, llamado Cuadrivium compuesto por Aritmética, Geometría, Astronomía y Música. Otro grupo de materias llamado Trivium completaba la educación de sus miembros ó alumnos. En éste grupo se estudiaba Gramática, Lógica y Retórica.

Murió a los 80 años y se dice que la fraternidad de los pitagóricos se volvió tan elitista y aristocrática, que las fuerzas democráticas destruyeron el edificio de la escuela y dispersaron la sociedad que se había mantenido durante 2 siglos, después de la muerte de Pitágoras.

3.4 ARITMETICA PITAGORICA.

Los primeros matemáticos griegos consideraron las relaciones abstractas entre los números como Aritmética y llamaron Logística al arte de realizar cálculos numéricos.

Actualmente, las relaciones abstractas entre los números es la Teoría de Números y la logística griega es la aritmética.

Los pitagóricos consideraron los divisores de los números naturales para clasificarlos y definir las parejas de números amigables.

Definición: Dos números son amigables si la suma de los divisores propios de uno de ellos es igual al otro y visceversa.

Ellos encontraron la pareja 220 y 284 con esta propiedad y pensaron que era la única, por lo que la grabaron en talismanes que representaban una amistad perfecta 220 tiene como divisores propios 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110 que suman 284; 284 tiene como divisores propios 1, 2, 4, 71 y 142 que suman 220.

Hasta 1636 se conoce un segundo par de números amigables encontrado por Pierre de Fermat:

17,296 y 18,416

	Primos	
17,296	2	
8,648	2	Divisores propios :1, 2, 23, 47, 4, 46, 94, 8,
4,324	2	92, 188,16, 184, 376, 368,752; 1081; 2162;
2162	2	4324; 8648.
1081	23	
47	47	
1		Suma = 18,416

	Primos	
18,416	2	Divisores Propios : 1; 2; 1, 151;
9,208	2	4; 2302; 8; 4604; 16; 9208.
4,604	2	
2,302	2	
1,151	1151	Suma = 17, 296
1		

1638.- Rene Descartes encuentra el tercer par.

1747.- Leonhard Euler, Matemático Suizo anuncia una lista de 30 pares que después extendió a 60.

1866.- Nicolo Paganini, Italiano, a los 16 años encuentra el par relativamente pequeño: 1184 y 1210.

Actualmente hay mas de 900 pares conocidos.

CLASIFICACION DE LOS NUMEROS NATURALES.

Los pitagóricos clasificaron los números naturales de la siguiente manera:

a) **Perfectos:** $n \in N$ es perfecto si la suma de sus divisores propios es igual a n.

Ejemplos: $6 = 1+ 2+ 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

b) **Deficientes:** $n \in N$ es deficiente si la suma de sus divisores propios es menos que n.

Ejemplos: 8: Divisores propios: $1 + 2 + 4 = 7< 8$.
Cualquier Nº primo P : Divisores propios : $1< P$

Todos los números primos son deficientes porque si $P \in N$ es primo, su único divisor propio es $1< p$.

c) **Abundantes:** $n \in N$ es abundante si la suma de sus divisores propios es mayor que n.

Ejemplos: 12: Suma de sus divisores propios $= 1+ 2+ 3+ 4+ 6 = 16>12$

30: Suma de sus divisores propios $= 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15= 42 > 30$

Otros ejemplos:

100 : Suma de sus divisores propios $= 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 25 + 50 = 117 > 100$

∴ El 100 es abundante.

360 : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15 + 18 + 20 + 24 + 30 + 36 + 40 + 45 + 60 + 72 + 90 + 120 + 180 = 850 > 360$

∴ El 360 es abundante.

1020120804

120804

El hecho de que los primeros números perfectos sean el 6, No. de días empleados para la creación y el 28 que es el No. de días de una lunación completa, además de sus números amigables explican la tendencia mística de los pitagóricos a utilizar los números en la magia, la astrología, la religión y los horóscopos.

Hasta 1952 había 12 números perfectos conocidos, el tercero es el 496, todos ellos pares.

El último teorema del noveno libro de los Elementos de Euclides (300 A.C.) establece que si $2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto.

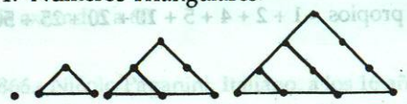
L. Euler demostró que todo número perfecto par es de ésta forma. Hasta la fecha permanece como conjetura la posibilidad de números perfectos impares.

De 1952 a 1961, las computadoras encontraron 12 números perfectos mas con la fórmula de Euclides para n= 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11,213 y 19,937.

NUMEROS FIGURALES.

Los matemáticos del período griego, posiblemente los pitagóricos, establecieron una relación entre la aritmética y la geometría a través de lo que llamaron números figurales asociados al número de puntos en sucesiones de polígonos regulares de la siguiente manera:

1.- Números Triangulares:



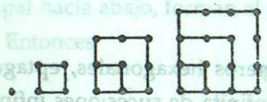
1, 3, 6, 10, ... $\frac{1}{2}n(n+1)$ . . .

A partir de n=1 que corresponde al 1, seguían con el triángulo equilátero de lado 1, al que asociaban el 3 y así sucesivamente iban agregando una unidad, punteando los extremos de cada unidad, para obtener la sucesión infinita $\left\{\sum_{i=1}^{n} i\right\} = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$ de n = 1 hasta el infinito. De esta manera se obtiene para el enésimo número triangular :

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+...+n = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$\boxed{T_n = \frac{1}{2}n(n+1)}$$

2.- Números cuadrados:



1, 4, 9, 16, ... n^2, . . .

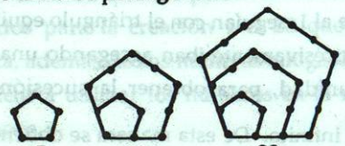
De manera similar a los triángulos, ahora con cuadrados, obtienen la sucesión $\left\{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\right\} = 1+3+...+(2n-1)$; n= 1, 2, 3,...., donde el enésimo número cuadrado es: $Cn = 1+3+5+...+(2n-1)$, la suma de los primeros n números impares.

$$Cn = \frac{1}{2}n(1+2n-1)$$

$$\boxed{Cn = n^2}$$

Sucesión de las sumas parciales de la serie de los impares positivos

3.- Números pentagonales:



$$1,\quad 5,\quad 12,\quad 22,\ \ldots\ \underbrace{1+4+7+\ldots+(3n-2),\ldots}_{\text{Serie aritmética } \begin{cases} a=1 \\ d=3 \end{cases}}$$

Entonces, el enésimo número pentagonal resulta:

Pn = 1+4+7+...+(3n-2). Progresión aritmética con a=1; d=3 cuya suma es :

$$Pn = \frac{1}{2}n(1+3n-2) = \frac{n}{2}(3n-1)$$

$$\therefore \boxed{Pn = \frac{1}{2}n(3n-1)}$$

De manera similar, siguen con los números hexagonales, eptagonales, octagonales, etc., formando así una sucesión infinita de sucesiones infinitas de números figurales.

A partir de estas asociaciones de números naturales, pueden demostrarse teoremas que relacionan a los números figurales. Por ejemplo:

Teorema 1 Todo número cuadrado es la suma del triangular correspondiente mas el triangular anterior.

$$C_n = T_n + T_{n-1}$$

Dem. : $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$T_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)(n-\cancel{1}+\cancel{1}) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$T_n + T_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+\cancel{1}+n-\cancel{1}) = \frac{1}{2}n(2n)$$

$$= n^2 = C_n \qquad \text{L.C.D.D.}$$

Teorema 2 El enésimo número pentagonal es igual a n mas 3 veces el triangular anterior. Pn = n + 3 Tn - 1

Dem. $n + 3T_{n-1} = n + 3\left(\frac{1}{2}(n-1)(n-1+1)\right)$

$$= n + 3\left(\frac{1}{2}n(n-1)\right) = n + \frac{3}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(2+3(n-1))$$

$$\therefore n + 3T_{n-1} = \frac{1}{2}n(2+3n-3)$$

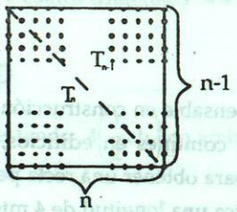
$$= \frac{1}{2}n(3n-1)$$

$$= P_n \qquad \text{L.C.D.D.}$$

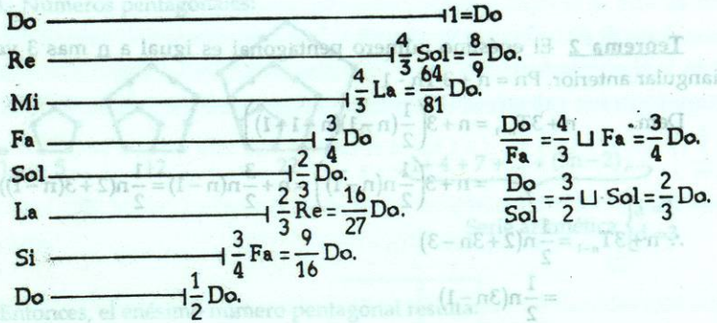
Estos teoremas pueden demostrarse geométricamente.

Por ejemplo el 1: C_n es una matriz n x n de puntos tales que de la diagonal principal hacia abajo, forman el enésimo triangular Tn y los restantes forman el Tn-1. Entonces

$$C_n = T_n + T_{n-1}$$



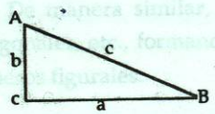
Escalas Musicales. Los pitagóricos descubrieron que los intervalos musicales dependen de proporciones numéricas. Encontraron que para cuerdas de material homogéneo sujetas a igual tensión, las longitudes de las cuerdas deben estar en proporción de 2 a 1 para la octava, de 3 a 2 para la quinta y de 4 a 3 para la cuarta. Entonces, adoptando una unidad de medida para la nota Do, el siguiente Do hacia abajo debe tener longitud 1/2 y el Do hacia arriba tendrá longitud 2. Las longitudes de las cuerdas para completar las escalas pueden obtenerse de las proporciones para la 4a. y la 5a.



$\frac{Do}{Fa} = \frac{4}{3} \sqcup Fa = \frac{3}{4}$ Do.

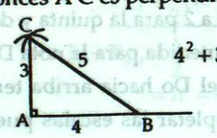
$\frac{Do}{Sol} = \frac{3}{2} \sqcup Sol = \frac{2}{3}$ Do.

3.5 TEOREMA DE PITAGORAS. Este teorema que relaciona los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo fue descubierto y usado por los babilonios y los egipcios.



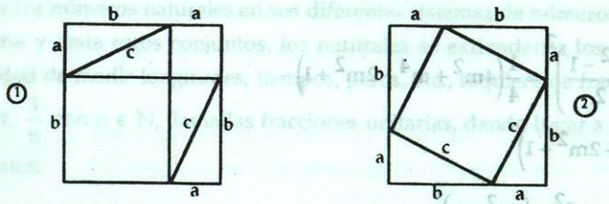
$a^2 + b^2 = c^2$

Esta relación es indispensable en construcción, hasta la fecha, para el trazo de espacios rectangulares, comunes en edificios, casas, bodegas, pirámides, tumbas, etc. Actualmente para obtener una recta perpendicular a una línea recta dada en un punto A, se marca una longitud de 4 mts., sobre la recta a partir de A hasta B. Después se marca en el terreno un arco con centro en A de radio 3 mts. y otro arco con centro en B de radio 5 mts. que se intersecta con el anterior en C. Entonces A C es perpendicular a AB por el teorema de pitágoras.



$4^2 + 3^2 = 5^2$

La primera demostración formal del teorema fue dada por Pitágoras por el método de disección (partición), probablemente de la siguiente manera:



El cuadrado de lado (a+b) de la figura ① se divide en ② cuadrados de lados a y b y cuatro triángulos rectángulos de lados a y b como se indica. Su área $(a + b)^2 = A$ es:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4\ (1/2\ ab) = A$ ①

El mismo cuadrado de lado (a + b) se divide como se indica en la figura 2 en un cuadrado de lado c y cuatro triángulos = s de lados a y b de manera que su área será:

$A = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right)$ ②

igualando ① y ② y restando $4\left(\frac{1}{2}ab\right)$ en ambos lados:

$a^2 + b^2 = c^2$

Desde la época de los pitagóricos se han dado una gran variedad de demostraciones de este teorema. E.S. Loomis en su libro El Teorema de Pitágoras presenta un colección clasificada de 370 demostraciones de este teorema tan importante en Matemáticas, Física, Ingeniería, Astronomía, etc.

El estudio de las ternas pitagóricas condujo a los pitagóricos a encontrar la fórmula siguiente para encontrar ternas pitagóricas:

$$\left(m, \frac{m^2-1}{2}, \frac{m^2+1}{2}\right)$$

Para m>1 ∈ N, impar.

$$m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(4m^2+m^4-2m^2+1\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(m^4+2m^2+1\right)$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(m^2+1\right)\right]^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$$

El año 380 A.C., Platón multiplica por 2 los elementos de ésta fórmula obteniendo:

$$\left(2m, m^2-1, m^2+1\right)$$

que proporciona ternas pitagóricas para cualquier m >1 ∈ N.

$$(2m)^2+(m^2-1)^2$$

$$=4m^2+m^4-2m^2+1$$

$$=m^4+2m^2+1$$

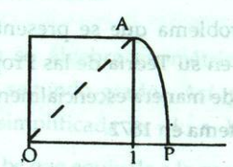
$$=\left(m^2+1\right)^2$$

Estas fórmulas no proporcionan todas las ternas pitagóricas. El problema de encontrar todas las ternas pitagóricas se resuelve en los Elementos de Euclides.

3.6 SEGMENTOS INCONMENSURABLES.

La necesidad de contar colecciones finitas de objetos obligó al hombre a utilizar los números naturales en sus diferentes sistemas de números. Al asociar en suma y resta estos conjuntos, los naturales se extienden a los enteros. La necesidad de medir longitudes, tiempos, pesos, etc., requiere de fracciones de la unidad, $\frac{1}{n}$ con n ∈ N, llamadas fracciones unitarias, dando lugar a los números racionales:

$$R^+=\left\{\frac{a}{b}=a\left(\frac{1}{b}\right) \middle| \; a,\ b \in N\right\}$$

Los pitagóricos medían magnitudes racionales $\frac{a}{b}$ a partir de un punto sobre una recta, trasladando con el compás la unidad de medida $\frac{1}{b}$, a veces y pensaron que todos los puntos de una recta determinaban magnitudes racionales a partir de un punto origen O.

Sin embargo, al trasladar con el compás la diagonal de un cuadrado, a la recta determinada por el lado base, encontraron una magnitud que no era racional, es decir, que no podía obtenerse a partir de una unidad de medida $\frac{1}{b}$ con b ∈ N.