Esto dió lugar a las siguientes definiciones de segmentos conmensurables, cuya longitud corresponde a nuestros números racionales y segmentos inconmensurables, cuya longitud corresponde a los números irracionales:

Definición 1.- Un segmento de recta es conmensurable si tiene una unidad común de medida $\frac{1}{b}$, $b \in N$, con el segmento unitario de longitud 1.

Definición 2.- Un segmento de recta es inconmensurable si no tiene una unidad común de medida con el segmento unitario de longitud 1.

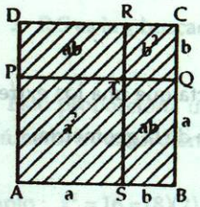
La demostración geométrica probable de que $\sqrt{2}$ es irracional fue publicada por Aristóteles (384-322 A.C.).

Se demuestra que la diagonal de un cuadrado de lado 1 es inconmensurable, suponiendo por reducción a lo absurdo, que es conmensurable, es decir que tiene una unidad común de medida con el lado del cuadrado. A partir de esta hipótesis absurda, se deduce geométricamente que esta unidad común de medida, "mide" un cuadrado cuya diagonal es menor que ella, (absurdo)!, por lo que se concluye que $\sqrt{2}$ es inconmensurable, es decir, es irracional.

La generalización de este teorema a todos los cuadrados de lado $r \in R$, nos proporciona un conjunto infinito de magnitudes inconmensurables en sus diagonales y por lo tanto una infinidad de irracionales.

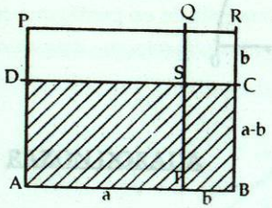
Eudoxus resolvió el problema que se presentó a los pitagóricos con la inclusión de los irracionales, en su Teoría de las Proporciones del año 370 A.C., donde trata a los irracionales de manera escencialmente similar a la exposición de Richard Dedekind sobre este tema en 1872.

3.7 ALGEBRA GEOMETRICA. Habiendo representado los números por longitudes de segmentos de recta, los griegos empezando con los pitagóricos, idearon un Algebra geométrica para resolver problemas algebráicos por procedimientos geométricos. Por ejemplo, el libro II de los Elementos de Euclides, en su teorema 4 establece el cuadrado de un binomio geométricamente por el método de disección:



$$(a+b)^2 = \underline{ABCD} \quad \text{(Area)}$$
$$= \underline{ASTP} + \underline{SBQT} + \underline{PTRD} + \underline{TQCR}$$
$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2.$$

El teorema 5 del libro II establece el producto de una suma por una diferencia de números igual a la diferencia de sus cuadrados:

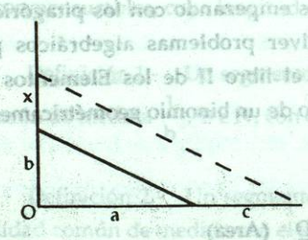


$$\underline{ABCD} = \underline{ATQP} - \underline{DSQP} + \underline{TBRQ} - \underline{SCRQ}$$
$$\therefore (a+b)(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$

ECUACIONES ALGEBRAICAS.

Los griegos aplicaron su álgebra geométrica para resolver ecuaciones simplificadas de primero y segundo grado. Así, para resolver la ecuación de primer grado en su forma simplificada $ax = k$; $a, k \in R$, se expresa k como un producto bc para tener a $x = bc$ que equivale a la proporción $x : c = b : a$ ó $\frac{x}{c} = \frac{b}{a}$.

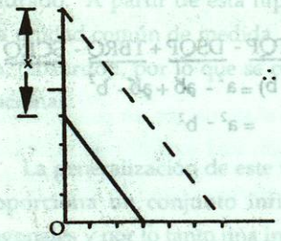
Sobre una recta y a partir de una unidad de medida, se construyen a y c en sucesión. Sobre otra recta, con el mismo origen, se construye b.



Trazando por el extremo de c una paralela a la recta que una los extremos de a y b, se obtiene x que satisface: $\frac{x}{c} = \frac{b}{a}$, por un teorema de la geometría.

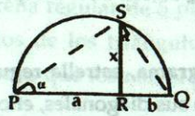
Ejemplo: Resolver la ecuación :

$$3x = 12 = (4)(3)$$
$$\frac{x}{3} = \frac{4}{3}$$
$$x = 4$$



$$\therefore \quad x = 4$$

De manera similar, para resolver la ecuación cuadrática $x^2 = k$; $k \in R$, se expresa $k = ab$; $x^2 = ab$, de donde: $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$. Sobre una recta, se construyen a y b en sucesión. Con el punto medio de a + b como centro, se traza un semi-círculo con (a + b) como diámetro.

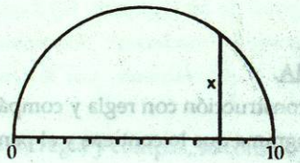


Levantando una perpendicular a P Q en R intersectará al semicírculo en S, resultando los triángulos semejantes PRS y RQS.

$\therefore$ R S es la x buscada porque : $\frac{x}{a} = \frac{b}{x} = \text{sen}\alpha$.

Esto proporciona un método geométrico para obtener la raíz cuadrada de un número k , equivalente a resolver la ecuación cuadrática simplificada $x^2 = k$.

Ejemplo : $x^2 = 16 = (8)(2)$



3.8 RAZON DORADA

Los pitagóricos consideraron la "razón dorada" ó "proporción dorada" de la siguiente manera:

Definición: Un punto P divide un segmento de recta en "proporción dorada" si el sub-segmento mas largo es la media proporcional entre el mas corto y el segmento completo.

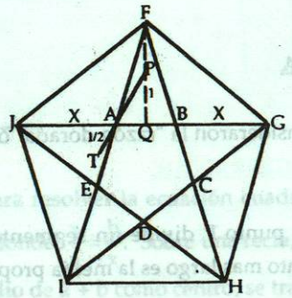
Si $\frac{PB}{AP} = \frac{AP}{AB}$, entonces P divide a AB en "proporción dorada".

Al construir un pentagrama, estrella regular de 5 puntos, a partir de un pentágono regular, trazando sus diagonales, encontraron que éstas se intersectan en puntos que las subdividen en proporciones doradas.

En esta figura hay parejas de triángulos congruentes y semejantes y se forma un nuevo pentágono regular en el centro. Sobre este pentágono se puede construír un nuevo pentagrama y el proceso puede repetirse sucesivamente.

EL PENTAGRAMA.

Consideremos la construcción con regla y compás de un pentágono regular de lado AB = 1, el pentagrama que lo contiene y el pentágono que determinan las puntas del pentagrama.



El pentagrama es la estrella regular de 5 puntas triangulares iguales. Por proporcionalidad de los lados de los triángulos en la figura, los puntos de intersección de las 5 líneas rectas que forman el pentagrama, dividen a éstas en proporción dorada.

Sean JG la diagonal del pentágono exterior que contiene a AB = 1. Puesto que B divide a JG en proporción dorada, se tiene :

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{2x+1}$$

$$2x^2 + x = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - x = 1$$

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$x - 1/2 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$$

Para encontrar x con la regla y compás, se construye el triángulo rectángulo PQA, donde Q es el punto medio de AB y PQ = AB = 1.

$$\therefore \quad PA = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{5/4}$$

$$PA = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Trasladando AQ = 1/2 con el compás hasta la prolongación de PA en T, se tiene :

$$PT = PA + AT = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}.$$

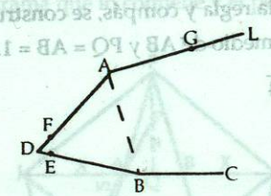
PT= x, el lado de la punta del pentagrama.

∴ PT=AJ=BG=AF=BF=etc.

Con el compás se traslada PT para encontrar J, G y F. Sobre las prolongaciones de F A y F B, se traslada AB para encontrar E y C. Después se encuentra D.

Se prolongan los lados del pentágono ABCD para tener el pentagrama que lo contiene y con las puntas del pentagrama se tiene el pentágono regular exterior.

3.9 LA REGLA Y EL COMPAS. Las herramientas originales de Euclides, que fueron previamente utilizadas por los pitagóricos, consisten en una regla, sin graduación ó escala, con la cual se puede trazar una recta a través de 2 puntos cualquiera y un compás con el cual se puede trazar un círculo con cualquier punto como centro y pasando por cualquier otro punto. Este compás "original" no puede trasladar la longitud de un segmento BC a otra recta L directamente, lo cual es permitido por el compás "moderno". Sin embargo, podemos demostrar que resuelve este problema indirectamente, por lo que el compás original y el moderno son equivalentes:



Para trasladar la longitud de BC a la recta L, a partir del punto A:

Se traza AB y se construye el triángulo equilátero ABD. Se traza el círculo con centro en B y radio BC, que intersecta a BD en E. Se traza el círculo con centro en D y radio DE que intersecta AD en F.

∴ Por construcción:

B D = A D

E D = F D

B D - E D = A D - F D

∴ B E = A F

Pero B E = B C por construcción

∴ A F = B C

Se traza un círculo con centro A y radio AF que intersecta la recta L en G, resultando AG = AF = BC

A G = B C

L.C.D.D.

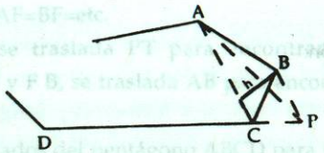
Si BC > BD, se marca E en la prolongación de BD, se procede de manera similar, prolongando AD para encontrar F y sumando segmentos se obtiene AF = BC.

AREA DE UN POLIGONO POR REDUCCION. Con regla y compás se puede: ① Trazar una ⊥ a una recta dada AC, por un punto cualquiera B.

② Trazar ∥ a una recta dada AC, por un punto cualquiera B.

Un polígono de n lados de área A puede transformarse en otro polígono equivalente en área, con un vértice menos y por lo tanto, con (n-1) lados, de la siguiente manera:

Consideremos el polígono ABCD.....



Para eliminar el vértice C, se trazan AC y BP paralela a AC.

Entonces los triángulos ABC y APC tienen la misma área por tener la misma base AC y la misma altura h Por lo tanto el área del polígono ABCD... es igual al área del polígono APD... , con un lado menos. Repitiendo el proceso, se puede obtener un triángulo de área equivalente al polígono original. ABC = APC

Entonces ACD... + ABC = ACD... + APC

∴ ABCD... = APD...

Area(polígono de n lados) = Area (Polígono de (n-1) lados)

Euclides resuelve el problema transformando el polígono de n lados en un cuadrado de área igual, aplicando los teoremas 42, 44 y 45 de su libro I y el 14 de su libro II, resultando un proceso mas complicado.

Actualmente, se resuelve obteniendo las coordenadas de los vértices, referidas a un sistema de ejes rectangulares y mediante áreas de trapecios resulta la fórmula de Simpson:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

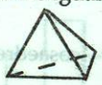
donde para $i = n$, $i + 1 = n + 1 = 1$

3.10 SOLIDOS REGULARES.

Definición: Un poliedro es regular si sus caras son polígonos regulares iguales y sus ángulos poliedrales son todos iguales.

El pitagórico Timaeus de Locri, describió los únicos 5 poliedros regulares que hay en el espacio tri-dimensional:

1.- Tetraedro: 4 caras, triángulos equiláteros iguales.



2.- Exaedro: Cubo 6 caras cuadradas.

3.- Octaedro: 8 caras triangulares.

4.- Dodecaedro: 12 caras pentagonales.

5.- Icosaedro: 20 caras triangulares.

Los pitagóricos asociaron estos únicos 5 sólidos regulares a los 4 "elementos fundamentales" de la Teoría de Empédocles sobre la naturaleza de los cuerpos materiales, y el universo de la siguiente manera:

1.- Fuego ⟶ Tetraedro (menor volumen)

2.- Agua ⟶ Icosaedro (mayor volumen)

3.- Tierra ⟶ Cubo (mayor estabilidad)

4.- Aire ⟶ Octaedro (mayor movilidad sostenido por vértices opuestos).

5.- Universo ⟶ Dodecaedro (12 signos del zodiaco).

Los 5 sólidos regulares se encuentran en la naturaleza en las siguientes formas:

Tetraedro: Cristales de Sulfantimoniato de sodio.

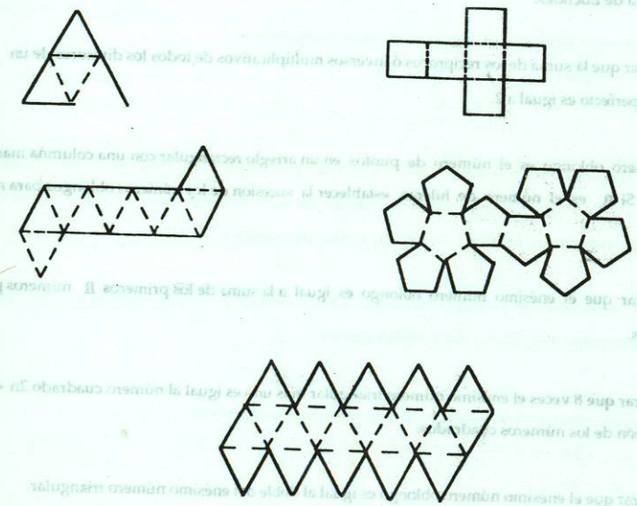
Exaedro: Cristales de cloruro de sodio.

Octaedro: Cristales de Cromo Alumbre.

Dodecaedro
Icosaedro } ⟶ Esqueletos de Radiolarias (animales marinos microscópicos).

CONSTRUCCION DE LOS POLIEDROS REGULARES :

Recortando sobre un cartón las siguientes figuras, se obtienen los 5 sólidos regulares.



EJERCICIO 4. Aritmética Pitagórica.

1.- Verificar que la pareja de números 1184 y 1210, encontrada por Nicolo Paganini en 1866, es amigable.

2.- La fórmula de Euclides para encontrar números perfectos establece que si $2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto. Demostrar que si n no es primo, entonces $2^n - 1$ no es primo.

3.- Verificar que para n = 2,3,5 y 7, $2^n - 1$ es primo y así encontrar los primeros 4 números perfectos de la fórmula de Euclides.

4.- Demostrar que la suma de los recíprocos ó inversos multiplicativos de todos los divisores de un número perfecto es igual a 2.

5.- Un número oblongo es el número de puntos en un arreglo rectangular con una columna mas que hileras. Si n es el número de hileras, establecer la sucesión de los números oblongos para n = 0, 1,2,3,.....

6.- Demostrar que el enésimo número oblongo es igual a la suma de los primeros n números pares positivos.

7.- Demostrar que 8 veces el enésimo número triangular mas uno es igual al número cuadrado 2n + 1 en la sucesión de los números cuadrados.

8.- Demostrar que el enésimo número oblongo es igual al doble del enésimo número triangular.

9.- Los pitagóricos definieron las medias aritmética, geométrica y armónica como:

$A = \frac{a+b}{2}$; $G = \sqrt{ab}$ y $H = \frac{2ab}{a+b}$. Demostrar que $A \geq G \geq H$.

donde la igualdad se satisface si y solo si a=b.

10.- Demostrar la proporción musical: a: A = H : b

11.- Verificar que 8 es la media armónica entre 12 y 6. Explicar porque los pitagóricos llamaron al cubo la armonía geométrica.

12.- Demostrar que después del 6, que es perfecto, todos los multiplos de 6 son abundantes. Es decir, que 6k es abundante para todo $k > 1 \in N$.

EJERCICIO 5. Algebra Geométrica de los Pitagóricos.

1.- Encontrar las ternas de la fórmula pitagórica para las cuales la hipotenusa no exceda a 100.

2.- Probar que la línea recta que pasa por los puntos P (0,0) y Q(I, $\sqrt{2}$), pasa únicamente por el punto (0,0) de la celosía racional rectangular.

3.- Demostrar por reducción a lo absurdo que $\sqrt{2}$ es irracional. Por el mismo método demostrar que log 2 es irracional.

4.- Establecer geométricamente las siguientes identidades álgebraicas:

A) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

B) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

5.- Dados 3 segmentos de recta desiguales, a el mayor, b el mediano y el pequeño de una unidad de longitud, construir con regla y compás segmentos de recta de longitud (a + b) y (a - b). Sumar y restar 6 y 3 con regla y compas, a partir de una unidad de medida 1.

6.- Dados los segmentos del problema anterior, construir con regla y compas segmentos de longitudes ab y $\frac{a}{b}$. Multiplicar y dividir 6 y 3 con regla y compas.

7.- Resolver geométricamente, con regla y compas, las siguientes ecuaciones:

A) $3x = 21$

B) $x^2 = 12$.

8.- Resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 6x + 8 = 0$, transformándola en $(x - a)^2 = b = b$ y aplicando el método geométrico de regla y compás.

9.- Sobre un segmento AB de recta, construir con regla y compas un triángulo equilátero, el circulo que lo circunscribe y el exágono inscrito en este círculo.