CAPITULO 6

PERIODO OSCURO Y EL PRE-RENACIMIENTO

6.1 IMPERIO ARABE. Del siglo V al siglo XI desaparecen casi totalmente las escuelas griegas. La sociedad se vuelve feudalista y eclesiástica. La educación se concentra en las instituciones religiosas. Los que desean estudiar tienen que recluirse en los conventos.

En éste período se mencionan algunos maestros de matemáticas, autores de libros de aritmética y geometría para las escuelas religiosas y los conventos. Algunos de estos personajes son los siguientes :

Boethius. (475 - 524) Escribió libros elementales de aritmética y geometría que se utilizaron de texto durante varios siglos en las escuelas de los monasterios. Estos textos incluyen parte de los Elementos de Euclides.

Bede. (673 - 735) Escribió un libro de texto de aritmética para escuelas religiosas.

Alcuin. (735 - 804) Nació en Inglaterra y emigró a Francia para ayudar a Carlo magno en un proyecto educativo. Escribió un libro de paradojas y diversiones matemáticas que influyó en los textos durante varios siglos : "Problemas para la agilidad de la mente ".

Gerbert. (950 - 1003) Nació en Francia y estudió en España, de donde llevó al resto de Europa al sistema Hindú - Arábigo de numeración. Construyó ábacos, globos celestes y relojes. Fué Papa el año 999. Escribió sobre aritmética, geometría y astrología.

6.2 PERIODO DE TRANSICION

Siglo XII. Las matemáticas de los clásicos griegos empiezan a filtrarse en Europa, a través de traducciones al latín.

Adelard de Bath. (1120) Monje inglés que estudió en España y viajó por Grecia, Siria y Egipto. tradujo al latín Los Elementos de Euclides y las tablas astronómicas de Al-Khowarizmi.

Gherardo de Cremona. (1114 - 1187) Tradujo al latín alrededor de 90 trabajos árabes, además de El Almagesto de Ptolomeo, Los Elementos de Euclides y el Álgebra de Al-Khowarizmi.

Siglo XIII. Se fundan las primeras universidades en Europa y destaca de manera importante Leonardo Fibonacci.

6.3 LEONARDO FIBONACCI (1170 - 1250)

Fué el mas notable matemático de la edad media. Nació en Pisa, Italia, donde su padre era comerciante, lo que permitió a Leonardo viajar a Egipto, Sicilia, Grecia y Siria, aprendiendo las matemáticas árabes.

En 1202 escribió su obra :

Liber Abaci, de aritmética y álgebra elemental. Utiliza el sistema Hindú - Arábigo de numeración decimal posicional influyendo para la adopción de este sistema en Europa. En este libro, explica la notación y lectura de los números, métodos de cálculo para enteros y fracciones, raíces cuadradas y cúbicas y solución de ecuaciones lineales y cuadráticas por falsa posición y por método álgebraico. El álgebra es rétorica y no acepta soluciones negativas ó imaginarias. Incluye aplicaciones comerciales y geométricas y un problema que conduce a la llamada " Secuencia de Fibonacci " :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots\ldots$$

donde $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, para $n > 2$.

Esta secuencia tiene propiedades interesantes como :

1.- Cualquier dos términos consecutivos son primos entre sí. $(a_{n-1}, a_n) = 1$

2.- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, la " razón dorada "

Se aplica en Biología a ciertos procesos de crecimiento orgánico. (Floración).

En 1220 escribió su libro Practica Geometriae sobre Geometría y Trigonometría con la técnica Euclideana y su técnica personal.

En 1225 escribió su libro Liber Quadratorum, original y brillante trabajo sobre análisis indeterminado que distingue a Fibonacci como el mas notable en este campo, entre Diofanto y Fermat.

Fibonacci resolvió los 3 problemas que presentó John de Palermo, matemático de la corte de Federico II, en una competencia :

1.- Encontrar un número x tal que ($x^2 + 5$) y ($x^2 - 5$) sean cuadrados de números racionales. La respuesta de Fibonacci fué:

$$x = \frac{41}{12}; (x^2 + 5) = \left(\frac{49}{12}\right)^2; (x^2 - 5) = \left(\frac{31}{12}\right)^2$$

Este problema aparece en su Liber Quadratorum.

2.- Encontrar una solución de la ecuación cúbica :

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

Su respuesta fué :

x=1.3688081075, correcta a nueve decimales.

3.- Tres personas poseen cierta cantidad de dinero x, de la cual, al primero le corresponde la mitad, al segundo la tercera parte y al tercero la sexta parte. Cada uno de ellos toma una cantidad a, b y c de dinero que agotan la cantidad total. Después, el 1° regresa la mitad de lo que había tomado, el 2° la 3ª parte y el tercero la sexta parte de lo que habían tomado. Cuando el total regresado se divide igualmente entre ellos, cada uno tiene lo que le corresponde. ¿ Cuanto dinero había originalmente y cuanto tomó cada uno al principio ?

El 2° y 3er problemas aparecen en el libro de Fibonacci llamado Flos. (Floración).

Jordanus Nemorarius. Fué el primero en utilizar , en forma generalizada, letras para representar números. Escribió sobre aritmética, álgebra, geometría, astronomía y estática.

John de Jalifax (Sacrobosco). Maestro de matemáticas en París. Escribió sobre Asronomía y reglas de la aritmética.

6.4 UNIVERSIDADES. A principios del siglo XIII se fundaron las universidades de París en Francia, Oxford y Cambridge en Inglaterra, Padúa y Nápoles en Italia y la de Salamanca en España. El desarrollo posterior de las matemáticas esta ligado a las universidades, a traves de sus profesores é investigadores.

El Siglo XIV. La " Muerte Negra " mata mas de 1/3 de la población de Europa y la "Guerra de 100 años " envuelve a Europa en grandes cambios políticos y económicos. Hay muy poca actividad matemática. Destacan los siguientes :

Nicole Oresme. (1323 - 1382)

Escribió 5 trabajos de matemáticas. Utiliza por 1ª vez los exponentes fraccionarios y localiza puntos por coordenadas en uno de sus trabajos que fué reproducido después de 100 años y tuvo influencia en el renacimiento de las matemáticas.

Thomas Bradwardine. (1290 - 1349) Arzobizpo de Canterbury, escribió sobre aritmética, geometría y especulaciones filosóficas sobre lo contínuo, lo discreto, los infinitos y los infinitesimales.

6.5 PRE- RENACIMIENTO. EL SIGLO XV.

Sucesos fundamentales que favorecen el pre-renacimiento europeo en artes y ciencias :

1.- 1453. Termina el imperio Bizantino con la caída de Constantinopla, hoy Estambul, capital de Turquía. Se llevan a Italia los originales de los filósofos de la civilización Griega.

2.- 1457. Se perfecciona la imprenta, impulsando rápidamente la difusión de conocimientos. (Gutemberg).

3.- 1492. Colón viaja a America y Magallanes y J.S. Elcano viajan alrededor de la tierra. Américo Vespucio publica : Mundus Novus, relatos de los viajes de exploración a América, incluyendo mapas. Se generaliza el uso de la brújula y el astrolabio en la navegación. Enrique " El Navegante " y Vasco da Gama viajan a la India por el sur de Africa.

La actividad matemática se concentra en Italia, en Nuremberg, Viena y Praga de Europa Central, principalmente en aritmética , álgebra y trigonometría.

Nicholas Cusa (1401 - 1464) Hijo de un pescador, llegó a ser Cardenal y Gobernador de Roma. Trabajó en los problemas famosos y en la reforma del Calendario.

George Von Peurbach (1423 - 1461) Profesor de matemáticas en Italia y en Viena, Realizó una tabla de senos y escribió sobre aritmética y astronomía.

Johann Müller (1436 - 1476) Apodado " Regiomontano " por ser nativo de Könisberg. Estudió en Viena con Peurbach. Tradujo del griego trabajos de Arquímedes, Apolonio y Heron. En 1464 escribió su obra en 5 libros De Triangulis Omnimodis, primera exposición sistématica de trigonometría plana y esférica, independiente de la astronomía.Viajó por Italia y Alemania, estableciéndose en Nuremberg, donde construyó un observatorio y una imprenta.

Nicolas Chuquet.(? - 1500). Nació en París donde estudió medicina. En 1484 escribió su libro Triparty Dans La Science Des Nombres. La 1ª parte se refiere a cálculos con números racionales, la 2ª con irracionales y la 3ª trata de las ecuaciones. Utiliza exponentes positivos y negativos y sintetiza su álgebra.

Luca Pacioli (1445 - 1509) Escribe y edita su obra Suma, un resumen de la aritmética, álgebra y geometría de la época. En 1509 publica "De Divina Proportione" que contiene figuras de los 5 sólidos regulares.

Johann Widman (1460 - ?) En 1489 publica en Leipzig una aritmética donde utiliza a por 1ª vez los signos + y - como contracciones de las palabras latinas et (+) y minus ($\overline{m}$).

Desde la invención la imprenta hasta fines del siglo XVI se imprimieron en Europa alrededor de 300 libros de aritmética, en latín para las escuelas religiosas y en diferentes idiomas para las escuelas comerciales.

Piero Borghi Escribió en 1478 un libro de aritmética y problemas recreativos . En 1484 publicó un libro de aritmética comercial en Venecia que fué re-impreso 17 veces hasta 1557.

Jacob köbel (Aleman, 1470 - 1533) Publicó en 1514 un libro de aritmética que se re-edito 22 veces.

Robert Recorde (Ingles, 1510 - 1558) profesor de matemáticas en Oxford, publicó un libro de aritmética en 1542, del cual se hicieron 29 ediciones.

6.6 EL SIGLO XVI En este siglo se desarrolla el álgebra y se resuelven las ecuaciones polinómicas de 3° y 4° grado.

Robert Recorde Escribió en ingles 4 libros de astronomía, geometría, medicina y uno de álgebra en el cual utiliza por primera vez el simbolo actual de igualdad como = "porque las 2 líneas paralelas iguales representan ambos miembros de la igualdad".

Christoff Rudolff Escribió en 1525 un libro de álgebra, donde aparece por primera vez el signo radical $\sqrt{\ }$

Michael Stifel (1486 - 1567). Considerado el mejor algebrista aleman del siglo XVI. Escrbió un libro titulado Aritmética Integra publicado en 1544 dividido en 3 partes : Números racionales, Números irracionales y Álgebra. Incluye progresiones aritméticas y geométricas, los coeficientes binomiales hasta la diecisieteava potencia. La tercera parte trata con ecuaciones, descartando soluciones negativas y utilizando letras para las incógnitas.

Stifel fué un monje convertido por Martín Lutera al protestantismo. Asoció místicamente el número de la bestia 666 del libro de revelaciones, con LEO DECIMUS, reteniendo las letras LDCIMV, agrega la X por decimus y omite la M por mysterium para obtener DCLXVI = 666.

Posteriormente, Napier, inventor de los logaritmos, mostró que el número 666 podría asociarse con el PAPA DE ROMA y el jesuita Bongus lo asoció con Martín Lutera, numerando la primeras 10 letras del alfabeto del 1 al 10, después del 10 al 90 y del 100 al 500 , obteniendo :

MARTIN LUTERA
50 1 50 100 9 40 20 200 100 5 50 1

que da como suma 666.

Durante la 1ª guerra mundial se asoció este número con el Kaiser Wilhelm y después se usó para representar a Hitler.

6.7 ECUACIONES CUBICAS Y CUARTICAS.

El suceso mas importante en matemáticas, fué la solución de las ecuaciones polinómicas de 3° y 4° grado por los matemáticos italianos :

NICOLO DE-BRESCIA (Tartaglia) (1499 - 1557) De familia muy humilde, recibió una herida en el paladar a los 13 años , por lo que le apodaron Tartaglia (El Tartamudo). Fué profesor de matemáticas. Escribió un libro de aritmética y aplicó las matemáticas a la artillería. En 1535 resolvió las cúbicas $x^3 + p\,x^2 = n$ y $x^3 + mx = n$

GIROLAMO CARDANO (1501 - 1576) Médico, profesor de matemáticas y astrólogo pensionado por el papa. Escribió sobre aritmética, álgebra, física, astronomía y medicina. Su principal obra fue : Ars Magna en latín que incluye soluciones negativas é imaginarias de ecuaciones polinomiales hasta de 4° grado y un método aproximado para obtener una solución real de ecuaciones de cualquier grado. Escribió también un Manual del Jugador en el que aplica probabilidades. Incluye también en su Ars Magna la solución de Tartaglia para la cúbica y la solución de la cuártica general que había sido resuelta por su alumno Ludovico Ferrari.

La solución general de Cardano - Tartaglia para la cúbica consiste en lo siguiente :

La transformación $y = x - \frac{a_1}{na_0}$ convierte la ecuación general de grado n

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y + a_n = 0$$

en una ecuación en x que no tiene término de grado (n-1).

Entonces, la sustitución : $y = x - \frac{b}{3a}$, convierte la cúbica general :

$ay^3 + by^2 + cy + d = 0$,en una de la forma : $x^3 + m\,x = n$ reduciendo la cúbica general a la solución de una cúbica sin término de 2° grado .

Para resolver esta ecuación cúbica, consideremos la identidad :

$(a - b)^3 + 3ab\,(a - b) = a^3 - b^3$.

Si escogemos a y b tales que (1) $\begin{cases} 3ab = m \\ a^3 - b^3 = n \end{cases}$, entonces $x = a - b$ resuelve la ecuación. Resolviendo el sistema (1), se obtiene :

$$a = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

$$b = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$ Entonces $x = a - b$ queda determinada.

El método de Ferrari para la solución de la cuártica consiste en lo siguiente : Dividiendo entre el coeficiente de y^4 y realizando la transformación indicada en el caso anterior, la solución de la cuártica general se reduce a la forma :

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

$$\therefore x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx + p^2 - r$$

$$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx + p^2 - r$$

De donde para cualquier z :

$$(x^2 + p + z)^2 = px^2 - qx + p^2 - r + 2z(x^2 + p) + z^2$$

$$= (p + 2z)x^2 - qx + (p^2 - r + 2pz + z^2)$$

Ahora, el lado derecho será un cuadrado perfecto si $B^2 - 4AC = 0$ ó lo que es lo mismo : $4AC - B^2 = 0$ donde : $A = (p + 2z)$ $B = -q$ y

$$C = (p^2 - r + 2pz + z^2)$$

$$4AC - B^2 = 4(p + 2z)(p^2 - r + 2pz + z^2) - q^2 = 0$$

Pero esto es una cúbica en z que puede ser resuelta y este valor que se encuentre de z hace cuadrado perfecto el lado derecho de la ecuación (1) por lo que extrayendo raíz cuadrada se obtiene una cuadrática en x que se resuelve por radicales.

Otras soluciones para las cúbicas y cuárticas fueron obtenidas posteriormente por Francois Viète y René Descartes.

En 1750, Euler trato de reducir la quíntica a una cuártica y 30 años después, ésto fué intentado por Lagrange sin éxito, hasta que en 1813, el físico Italiano Paolo Rufini (1765 - 1822) demostró que las raíces de las ecuaciones polinómicas de grado mayor ó igual que 5 , no pueden expresarse por medio de radicales en términos de los coeficientes de la ecuación. Independientemente, en1824, el matemático Noruego Niels Henrik Abel (1802 - 1829) encontró la demostración de ésto mismo. Posteriormente, E. Galois (1811 - 1832) Jordan y otros desarrollaron la Teoría General de las Ecuaciones Polinomiales a traves del Álgebra Abstracta.

6.8 FRANCOIS VIÈTE (1540 -1603). Abogado miembro del Parlamento Francés, dedicó su tiempo libre a las matemáticas. Está considerado como el mejor matemático francés del siglo XVI. Resolvió una ecuación de grado 45

propuesta por A. Romanus, reconociendo una conexión trigonométrica que le permitió en pocos minutos obtener 2 raíces y después encontró 21 mas, todas positivas.

Viète descifró una clave española de varios cientos de símbolos que le permitió a Francia obtener ventaja en su guerra con España.

Escribió sobre Algebra, Geometría y Trigonometría. Sus libros fueron editados y obsequiados por su cuenta. Fué el primero en utilizar las 6 funciones trigonométricas para resolver triángulos planos y esféricos. Obtuvo expresiones para $\cos n\theta$ en función de $\cos\theta$ para n = 1, 2, 3, ..., 9.

En su libro <u>In Artem</u> introduce la práctica de usar vocales para incógnitas y consonantes para constantes. En 1637, R. Descartes utiliza las últimas letras del alfabeto para incógnitas y las primeras para constantes, como lo hacemos actualmente.

En su libro <u>De Numerosa</u> proporciona un método de aproximaciones sucesivas a la raíz de una ecuación entre **a** y **a+ 1**. Se sustituye $x = a + x_1$ ($0 < x_1 < 1$) en la ecuación y se deprecian los términos de potencias mayores que 1 de x_1, para encontrar el valor de x_1. Se repite el proceso, sustiyuyendo $x = (a + x_1) + x_2$ hasta obtener la aproximación que se desee. Por ejemplo : Encontrar una aproximación de la raíz entre 2 y 3 , de la ecuación :

$$p(x) = x^3 - x^2 - 8 = 0$$

$$p(2) = -4; p(3) = +10$$

a) Para $x = 2 + x_1$

$$(2 + x_1)^3 - (2 + x_1)^2 = 8$$

$$8 + 12x_1 - 4 - 4x_1 = 8$$

$$8x_1 = 4$$

$$x_1 = 0.5$$

(Despreciando las potencias mayores a 1 de x_1)

b) Para $X = 2.5 + X_2$:

$$(2.5 + X_2)^3 - (2.5 + X_2)^2 = 8$$

$$15.62 + 18.75X_2 - 6.25 - 5X_2 = 8$$

$$13.75X_2 = -1.37; X_2 = -0.1$$

$$\therefore X \approx 2.4$$

En un libro de Viète, publicado después de su muerte, incluye las transformaciones para aumentar, disminuir o multiplicar por una constante, las raíces de una ecuación polinomial sobre los racionales y la transformación para librar a una ecuación polinomial de grado n,de su término de grado (n-1). Además resuelve la cúbica general mónica : $x^3 + 3ax - 2b = 0$ de la siguiente manera :

$$x^3+mx=n$$

Sustituyendo : $x = \frac{a}{y} - y$, se obtiene :

$$x = \frac{\frac{1}{3}m}{y} - y$$

$$\left(\frac{a}{y} - y\right)^3 + 3a\left(\frac{a}{y} - y\right) - 2b = 0$$

$$\frac{a^3}{y^3} - \cancel{\frac{3a^2}{y}} + \cancel{3ay} - y^3 + \cancel{\frac{3a^2}{y}} - \cancel{3ay} = 2b$$

$$y^6 + 2by^3 = a^3$$

Esta ecuación es cuadrática en y^3 . Resolviendo para y^3 y extrayendo raíz cúbica, se obtiene y, de donde se obtiene x.

Viète fue un notable algebrista que aplicó el álgebra a la geometría y a la trigonometría. Demostró que la duplicación del cubo y la trisección del triángulo con las herramientas de Euclides, dependende la solución de ecuaciones cúbicas.

Calculó π correcto con 9 decimales y decubrió el producto infinito

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\ldots\ldots$$

CHRISTOPHER CLAVIUS. (1537 - 1612). Fué un gran maestro y autor de textos muy apreciados de Aritmética y álgebra. También escribió sobre astronomía y trigonometría.

PIETRO ANTONIO CATALDI. (1548 - 1626) Autor de una aritmética, un tratado de números perfectos y un tratado de álgebra, incluyendo una introducción a la teoría de las fracciones continuas.

SIMON STEVIN (1548 - 1620) General del ejército holandés, expuso la teoría de las fracciones decimales y realizó contribuciones a la estática y la hidrostática.

NICOLAS COPERNICUS. (1473 - 1543) De origen polaco, estudió astronomía en Padúa y Bologna. Escribió un tratado de Trigonometría y su Teoría del Universo en 1530, que fué publicada en 1543, año de su muerte.

GEORG I. RHOETICUS. (1514 - 1576) Discípulo de Copernicus, dedicó 12 años de su vida a la elaboración de 2 tablas de funciones trigonométricas que se utilizan hasta la fecha.

1.- Una tabla de las 6 funciones trigonométricas a 10 decimales cada 10".

2.- Una tabla de senos cada 10 " a 15 decimales.

Fué el primero en definir las funciones trigonométricas como razones de los lados de un triángulo rectángulo.

6.9 RESUMEN Durante el siglo XVI

a) Se generalizó el uso del sistema decimal posicional Hindú - Arábigo y el álgebra simbólica.

b) Se desarrollaron las fracciones decimales.

c) Se resolvieron las ecuaciones cúbicas y cuárticas por radicales.

d) Se aceptaron los números negativos.

e) Se perfeccionó la trigonometría y se elaboraron tablas de las funciones trigonométricas.

En el continente americano :

f) Se fundó la Real y Pontificia Universidad de la Ciudad de México, apadrinada por la Universidad de Salamanca en 1551 durante el primer virreinato de Antonio de Mendoza. Después, siendo virrey del Perú, fundó en Lima la Universidad de San Marcos en 1554. En 1556 se editó en México un Compendio de matemáticas comerciales de Juan Diez.

HISTORIA DE LAS MATEMATICAS
ING. ELADIO SAENZ QUIROGA

EJERCICIO 8 . Matemáticas en Europa del 500 al 1600.

1.- Resolver el siguiente problema del libro de Alcuin : Si 100 bultos de maíz se distribuyen entre 100 personas de manera que cada hombre reciba 3, cada mujer reciba 2 y cada niño reciba 1/2 bulto, encontrar cuantos hombres , mujeres y niños son .

2.- Resolver el siguiente problema de la geometría de Gerbert : Encontrar los catetos de un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa y el área.

3.- Resolver el siguiente problema de Liber Abaci de Fibonacci : Si 30 hombres plantan 1000 árboles en 9 días, ¿cuántos días tardarán 36 hombres en plantar 4400 árboles ?

4.- Verificar que los cuadrados de $a^2 - 2ab - b^2$; $a^2 + b^2$; $a^2 + 2ab - b^2$ están en progresión aritmética (Del Liber Abaci)

5.-(a) Resolver el tercer problema de la competencia de Fibonacci : Tres hombres poseen cierta cantidad de dinero de la cual al primero le corresponde la mitad, al segundo la tercera parte y al tercero la sexta parte. Cada uno de ellos toma una parte hasta agotar la cantidad total, después el primero regresa la mitad, el segundo la tercera parte y el tercero la sexta parte de lo que habían tomado. Cuando el total regresado se divide en partes iguales entre los 3, cada uno tiene lo que le corresponde. Encontrar la cantidad total y las cantidades tomadas por cada uno de ellos al principio.

(b) Demostrar que cualquier 2 términos consecutivos de la secuencia de Fibonacci son primos entre sí.

6.- Un hombre toma cierto número de manzanas de una huerta. Para salir tiene que pasar siete puertas. Al guardia de la primera puerta le deja la mitad de las manzanas, mas una. Al segundo le deja la mitad de las que le quedan , mas una y así sucesivamente hasta el séptimo guardia, saliendo con una manzana

¿Cuántas manzanas había tomado de la huerta?

7.- Demostrar que la sustitución : $x = z - \frac{a_1}{na_0}$ transforma la ecuación : $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_0$ en una ecuación en z que no tiene término de grado (n-1).

8.- Establecer la siguiente identidad trigonométrica dada por Viète :

$\text{Sen}\alpha = \text{Sen}(60° + \alpha) - \text{Sen}(60° - \alpha)$

9.- Empezando con a = 200, aproximar por el método de Viète, una solución de la ecuación :

$x^2 + 7x = 60{,}750$

10.- Resolver la ecuación cuártica : $13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$, agregando $3x^2$ a ambos lados para completar el cuadrado del lado derecho. (G. Cardano).

11.- Aplicar el método de Viète para encontrar una raíz de la ecuación cúbica : $x^3 + 63x = 316$