9.- Un número real algebraico si es raíz de un polinomio con coeficientes reales. Muestre que todo número racional es algebraico y por lo tanto los números trascendentes ó no algebraico son irracionales. ¿Podemos afirmar que todo número irracional es trascendente ? ¿Porque ?

10.- Demostrar el siguiente teorema de Fermat : " Todo número primo mayor que 2, puede expresarse en forma única como una diferencia de cuadrados en N. (Sugerencia : Verificar que para todo P primo impar, $P = \left(\frac{P+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{P-1}{2}\right)^2$

11.- Inducir la regla de Leibniz para la derivada de un producto de funciones $y = f(x).g(x)$. Encontrar la 5ª derivada de $y = (x^2-3)e^{2x}$, aplicando la regla anterior.

12.- Establecer la regla de Leibniz para el cuadrado de un polinomio $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$. Encontrar $(x^2-3x+5)^2$ aplicando la regla anterior.

CAPITULO 9

LA INFLUENCIA DEL CALCULO

9.1 INTRODUCCION. A fines del siglo XVII, el cálculo ha sido realizado formalmente por Newton y Leibniz, apoyados en la geometría analítica de Descartes y el algebra simbólica del siglo XVI. Estos 3 grandes pilares, el álgebra simbólica, la geometría analítica y el cálculo, ofrecen poderosas herramientas para resolver problemas é impulsar el desarrollo de nuevas ramas de las matemáticas. Estas actividades se orientan durante el siglo XVIII hacia las ecuaciones diferenciales, la probabilidad y estadística matemática, la mecánica analítica y la astronomía. A fines del siglo XVIII y principios del XIX se revisan los conceptos fundamentales del cálculo para evitar la presencia de contradicciones y resolver las paradojas que resultan precisamente por la falta de rigor básico. Los maestros e investigadores se vuelven exigentes y rigurosos con las matemáticas, propiciando la liberación del álgebra y la geometría de sus moldes tradicionales. Así surgen las geometrías no-euclidianas y el álgebra abstracta, el análisis matemático, las álgebras lineales y la Lógica Matemática, todo esto en el siglo XIX.

En este capítulo trataremos la época de fines del siglo XVII a principios del siglo XIX, presentando en forma cronológica y sintetizada a los principales personajes y sus actividades matemáticas, académicas y de investigación.

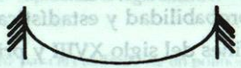
9.2 LA FAMILIA BERNOULLI. En la segunda mitad del siglo XVII, un rico comerciante y consejal suizo de nombre Nicolaus Bernoulli, procrea 2 hijos, Jakob y Johann, quienes se dedican a las matemáticas influenciados por las publicaciones de Leibniz y contribuyen al desarrollo del cálculo en sus aplicaciones y su divulgación en Europa. Posteriormente, 4 nietos y 2 biznietos de Nicolaus, 5 de ellos descendientes de Johann, se distinguen también como maestros investigadores de matemáticas, aunque sin llegar a superar la obra de sus ancestros, los hermanos Jakob y Johann Bernoulli.

Jakob Bernoulli. (1654 - 1705).

Profesor titular de Matemáticas de la Universidad Basel, en Basilea, Suiza, desde 1687 hasta su muerte en 1705. Sus principales contribuciones a las matemáticas fueron las siguientes:

1.- Coordenadas polares para el cálculo del radio de curvatura de curvas planas.

2.- Estudio de curvas catenarias de cuerdas homogéneas y de densidad variable y bajo la acción de una fuerza central.



3.- Estudio de varillas elásticas y hojas rectangulares flexibles sujetas a diversas condiciones de carga.

4.- Figuras cerradas isoperimétricas en el plano, determinando la que proporciona máxima área. (Cálculo de variaciones).

5.- Probabilidades y Estadística. Lo que ahora conocemos como el Teorema de Bernoulli y la distribución de Bernoulli aparecen en su libro Ars Conjentandi publicado Post-mortem en 1713.

6.- Ecuaciones Diferenciales. La ecuación de Bernoulli.

7.- Teoría de números. Los números y polinomios de Bernoulli que intervienen en la definición de los números primos regulares. En 1850, Kummer demostró el último teorema de Fermat para exponentes primos regulares.

8.- Curva isocrona, a lo largo de la curva de un cuerpo en caída libre, tiene componente vertical de velocidad constante. Este trabajo fué publicado en 1690 en el Acta Eruditorum de Leibniz, donde aparece por primera vez la palabra integral en el cálculo.

Johann Bernoulli. (1667 - 1748)

Maestro de matemáticas en la Universidad de Gröningen de 1697 a 1705. En 1705, a la muerte de su hermano Jakob, es nombrado Profesor titular de matemáticas de la Universidad Basel, cargo que ocupa hasta su muerte en 1748. Johann fué amigo y defensor de Leibinz y al mismo tiempo antagonista de su hermano Jakob en sus investigaciones.

Su principal contribución como maestro de matemáticas, fué la edición financiada por el Marqués G.F. de L' Hospital (1661 - 1704) de sus apuntes del curso de cálculo que enseñaba en 1696 y que fué distribuida gratuitamente por Europa, influyendo notablemente en la adopción del cálculo como materia fundamental de las matemáticas.

En investigación, escribió sobre diversidad de temas entre los cuales se mencionan los siguientes:

Fenómenos ópticos de reflexión y refracción.
Trayectorias ortogonales de familias de curvas.
Cálculo de áreas por series.
Cálculo exponencial.
Trigonometría analítica.
Curvas baquistocrona y tautocrona, correspondientes a trayectorias de velocidad máxima y tiempo uniforme de caída de partículas pesadas. La solución de estos problemas conduce a curvas cicloides y fueron aplicadas por Huygens en 1673 para la construcción de relojes de péndulo.

9.3 CALCULO DE PROBABILIDADES.

Abraham de Moivre. (1667 - 1754)

Nació en Francia, pero vivió casi toda su vida en Inglaterra donde cultivó amistad con Newton.

Sus principales publicaciones fueron las siguientes:

1.- Anualidades sobre la vida. Importante trabajo que influye en el desarrollo de las matemáticas actuariales.

2.- Cálculo de Oportunidades. Esta publicación contiene gran cantidad de material nuevo sobre el cálculo de probabilidades.

3.- Miscelánea Analítica. Contribución para el estudio de probabilidades, series y trigonometría analítica.

De Moivre estableció la fórmula de aproximación para factoriales grandes que se atribuye erróneamente a Stirling:

$$n! \approx (2\Pi n)^{1/2}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Para calcular potencias de números complejos en forma polar, demostró para exponentes n en los naturales el llamado:

Teorema de Moivre

$$(\text{Cos } x + i\text{Sen } x)^n = \text{Cos } nx + i\text{Sen } nx$$

Además estableció las distribuciones normales de probabilidad como :

$$y = ce^{-hx^2}$$

c y h, constantes.

Para c=h=1 encontró la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\Pi}$$

9.4 REPRESENTACION DE FUNCIONES POR SERIES.

Las funciones son los objetos de estudio del Cálculo. Se clasifican en algebraicas y trascendentes y se ordenan para su análisis, de acuerdo con su complicación. Las funciones polinómicas son las primeras que se tratan en el cálculo diferencial por ser las funciones "buenas" entre las algebraicas. Su dominio es todos los números reales, no tienen puntos de discontinuidad, se derivan fácilmente y se simplifican al derivarlas. Entonces, cuando una función

es complicada, su representación por medio de una serie polinómica infinita, aún para un intervalo finito de convergencia, puede ser de gran utilidad para su evaluación y para su análisis. Los primeros matemáticos que lograron este objetivo fueron los siguientes:

1.- Brook Taylor. (1685 - 1731)

Nació en Inglaterra. En 1715 publicó su teorema de desarrollo de una función en serie polinómica:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

Desde luego, f(x) y todas sus derivadas sucesivas deben existir en x=a para obtener a f(x) como una serie polinómica de (x-a) con un intervalo de convergencia alrededor de x=a. Para diferentes valores de a en el dominio de f(x), se obtiene la representación de f(x) alrededor del punto que se requiera.

Originalmente, Taylor aplicó su desarrollo en serie para la solución numérica de ecuaciones con una incógnita por aproximaciones sucesivas.

Taylor trabajó también en la Teoría de la perspectiva, método de dibujo matemático en el plano de figuras tridimensionales, que se utiliza actualmente en la visualización en un plano de figuras en el espacio a partir de sus proyecciones horizontales y verticales y en el estudio matemático de la fotogrametría, en el cual se toman fotografías desde un avión con propósitos topográficos para la determinación de las características de un terreno ó con propósitos catastrales, para la determinación de los impuestos prediales.

2.- Colin Maclaurin. (1698 - 1746)

Nació en Escocia y desde temprana edad dió muestras de matemático prodigio. Ingresó a la Universidad de Glasgow a los 11 años y a los 15 obtuvo su maestría con una tesis sobre la gravedad. A los 19 años se inició como maestro de matemáticas y a los 21 años de edad publicó su Geometría Orgánica.

Maclaurin propuso el desarrollo en serie polinómica de una función definida y derivable sucesivamente en x=0, como un caso particular del teorema general de Taylor para a=0 :

$$f(x)=f(0)=f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...$$

De esta manera obtiene la representación de la función en serie polinómica y en un intervalo de convergencia alrededor del origen x=0.

En 1742, publicó su Tratado de las Fluxiones, en 2 volumenes, en el cual incluye la representación polinómica de funciones y gran variedad de aplicaciones a la geometría y a la física.

3.- Joseph Fourier. (1768 - 1830)

Nació en Francia. Hijo de un sastre que murió cuando Fourier tenía 8 años de edad, fué internado en una escuela militar dirigida por religiosos, donde posteriormente dió clases de matemáticas. Se distinguió en la revolución francesa y fué recompensado con un puesto titular de profesor de matemáticas en la Ècole Politechnique. De 1798 a 1801 fué gobernador del bajo Egipto y a su regreso a Francia fué nombrado prefecto de Grenoble, donde inició sus experimentos sobre el calor que lo conducen a la publicación en 1822 de su Teoría Analítica del Calor, dedicado al estudio matemático de la conducción del calor.

En esta obra, Fourier establece que cualquier función, continua ó no, puede ser representada como una serie de senos y cosenos de múltiplos de la variable. Las series trigonométricas de Fourier influyen de manera importante en la evolución del concepto de función y en el desarrollo de los métodos matemáticos de la física, donde se utilizan ecuaciones diferenciales parciales sujetas a condiciones de frontera.

Evocando la expresión pitagórica " Vivimos en un Universo matemático " y de los filósofos griegos " La naturaleza es matemática ", Fourier expresó " El estudio profundo de la naturaleza es la fuente mas prolífica de descubrimientos matemáticos".

La teoría Analítica del Calor de Fourier influyó en la carrera de Wiliam Thomson, Lord Kelvin 1824 1907 y Clerk Maxwel se refirió a ella, diciendo que es " Un gran poema matemático

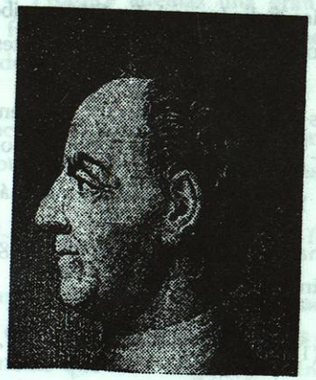
Después de los autores de la representación de funciones en series, encontramos un matemático francés muy distinguido, contemporáneo de Fourier:

Simeón Poisson. (1781 1840)

Estudió matemáticas en la Ècole Politechnique como alumno de Laplace y Lagrange y después fué profesor ahí mismo. Es autor de más de 300 trabajos publicados sobre integrales definidas (La integral de Poisson), series, probabilidades (la ley y la distribución de Poisson), ecuaciones diferenciales y elasticidad (la constante de Poisson)

En 1811 publicó su Tratado de Mecánica, en 2 volumenes, en 1833 su Teoría de la Acción de la Capilaridad y en 1835 su Teoría Matemática del Calor. Publicó además sus teorías matemáticas sobre Electricidad y Magnetismo, Elasticidad y Astrofísica.

9.5 LEONHARD EULER (1707 - 1783).



Notable matemático Suzo influenciado por la escuela de Juan Bernoulli. Hijo mayor del Pastor Pablo Euler, alumno de Jacobo Bernoulli. Recibió las primeras enseñanzas de su padre. En 1720 ingresó a la Universidad Basel donde es alumno de Daniel y Nicholaus Bernoulli. Se gradúa de Bachiller en 1721 y obtiene su maestría en 1723.

En 1727 se publica su primer trabajo sobre trayectorias algebraicas recíprocas. Solicita la cátedra vacante de Física, pero no la consigue por su corta edad. Se traslada a la Academia de Petesburgo invitado por Daniel Bernoulli, obteniendo la cátedra de Física en 1730 y en 1733 sustituye a Daniel Bernoulli, quien regresa a Basel, en la cátedra de Matemáticas. En 1741 es nombrado Director de Matemáticas de la Academia de Berlín. En 1756 ocupa el puesto de Presidente de la Academia y en 1766 regresa a San Petesburgo.

Habiendo perdido la vista de su ojo derecho desde 1735, queda completamente ciego por cataratas en 1768, pero su hijo Juan y su nieto político N. Fuss le ayudan en la redacción de 250 trabajos de investigación hasta su muerte en 1783.

Los trabajos científicos de Euler se inician en San Petesburgo, influenciados por los métodos del Cálculo de los Bernoulli. En 1736 publica su Mecánica, obra ejemplar donde el cálculo se aplica a los estados de movimiento de los cuerpos, (estática, cinemática, cinética y dinámica). En 1738 escribe su libro de Cálculo para la preparatoria incorporada a la Academia de San Petesburgo.

En sus investigaciones sobre series, analiza convergencia y divergencia por el método de comparación. Realiza integrales definidas por series utilizando las funciones $\beta : \int_0^1 x^p(1-x)^n dx$ y la función $\Gamma : \int_0^1 x^p e^{-x} dx$. Además, encontró paradojas que influyeron en la formalización del Cálculo en el siglo XIX. Por ejemplo, aplicando el teorema del Binomio se obtiene:

$-1 = (1-2)^{-1} = 1+2+4+8+16+ \ldots = \infty$, produciendose la paradoja: $-1 = \infty$.

La explicación es que el desarrollo binomial de $(a-b)^{-n}$ con $a<b$ y $n > 0$ es divergente y por lo tanto el Teorema del Binomio no es aplicable a estos casos.

Euler introdujo la notación f(x) para funciones, e para la base logarítmica natural, a, b, y c para los lados del triángulo ABC y s para el semi-perímetro, Σ, para sumatorias é i para la unidad imaginaria.

Por desarrollos en serie, estableció la llamada Fórmula de Euler : $e^{ix} = \text{Cos } x + i\text{Sen } x$, de donde, sustituyendo $x=\pi$ se obtiene la ecuación que relaciona a los importantes números 1, e, i y π:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Las investigaciones de Euler sobre Teoría de números se dedican fundamentalmente a la obra de Fermat. Así descubre que no todos los números de Fermat $2^{2^p}+1$ son primos porque para p=5, ésta fórmula no da un número primo. Demuestra que $a^4 + b^4 = c^2$ no tiene solución en los naturales. Además, demuestra el "pequeño teorema de Fermat": $a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod} p)$ y el " último teorema de Fermat " $a^n + b^n = c^n$ no tiene solución en los n^{os} naturales para $n > 2$; Euler lo demuestra para n=3.

Euler encuentra un método para resolver las ecuaciones cuárticas por radicales y propone métodos por radicales para ciertos tipos de ecuaciones de grado mayor que 4. Produce además una gran cantidad de trabajos de investigación sobre funciones continuas, ecuaciones diferenciales, geometría diferencial y cálculo de variaciones.

Define las funciones homogéneas de n variables, muy importantes actualmente en economía para las funciones de producción.

Def. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es homogénea de grado m si $f(cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) = c^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Para m=1, la homogeneidad es lineal y resulta adecuada para representar a la producción total z como función de las cantidades de los factores productivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considerando que la homogeneidad lineal significa rendimientos constantes a escala, lo cual es una ley económica a altos niveles de producción.