1825 El gobierno noruego le otorga por fin, modestos recursos para su viaje. En Alemania, Abel entregó su trabajo sobre la quíntica a Gauss, pero éste no mostró interés, tal vez por tratarse de la demostración sobre un caso particular. En Berlín, Abel conoce a August Leopold Crelle (1789-1856), un Ingeniero Civil, aficionado a las matemáticas y constructor del primer ferrocarril de Alemania. Crelle fundó la primer revista dedicada esclusivamente a investigación matemática: "Revista de Matemáticas Puras y Aplicadas". Los primeros tres volumenes del Journal de Crelle contienen 22 trabajos de Abel, incluyendo la prueba de irresolubilidad algebraica de la ecuación quíntica.

1826 Viaja a Freiburg y trabaja sobre lo que conocemos como el Teorema de Abel sobre representación algebraica y logarítmica de funciones.Después viaja a Francia, donde presenta a la Academia de París su trabajo: "Sobre una Propiedad General de un muy extenso conjunto de Funciones Trascendentes". Aquí, Abel se refiere al limitado conjunto de funciones trascendentes que están siendo consideradas por los matemáticos, ya que se reducen a las logarítmicas, exponenciales y trigonométricas ó circulares, por lo que presenta un extenso nuevo conjunto de funciones trascendentes, las funciones elípticas, cuyas derivadas pueden expresarse por medio de ecuaciones algebraicas cuyos coeficientes son funciones racionales de una variable.

Desafortunadamente el jurado de la Academia para este trabajo, Cauchy y Legendre menospreciaron su gran importancia. Cauchy lo llevó a su casa y lo perdió y Legendre declaró que era casi ilegible. En 1829, Jacobi declara que el trabajo de Abel es un gran descubrimiento, tal vez el más grande del siglo. La Academia enmendó su error, otorgando el Gran Premio de Matemáticas de 1830 a Abel y Jacobi, pero para entonces Abel había fallecido. Posteriormente, Hermite se refiere a este trabajo, como algo que tendrá ocupados a los matemáticos por cientos de años.

Abel descubrió que sus nuevas funciones obtenidas de la inversión de integrales elípticas, tienen dos períodos, cuya razón es imaginaria, mientras que las funciones circulares tienen un período y declara : " Estudien las funciones



inversas".

Def. La inversa de una función $y=f(x)$ es la que se obtiene considerando a $x$ como variable dependiente. Si se puede despejar $x$, entonces $x=g(y)$ es la inversa. Si no se puede despejar $x$, entonces se considera $x$ como función implícita de $y$ para al inversa.

Ejemplos:

$$y = 2x - 6; x = \frac{1}{2}y + 3$$
$$y = e^x; x = \ln y$$
$$y = \operatorname{sen} x; x = \operatorname{sen}^{-1} y$$

En cada uno de estos casos: $y = f(x)$ y $x = f(y)$ son funciones inversas.

Los investigadores que siguieron el análisis de las funciones elípticas y sus generalizaciones, llamadas funciones abelianas, (Jacobi, Weirstrass, Riemann y otros), descubrieron funciones de $n$ variables con 2n períodos y aplicaron estas funciones a la solución de problemas de geometría, mecánica y física matemática.

1827 Agotados sus recursos económicos, incluyendo una pequeña aportación de Hölmboe, Abel regresa a Kristiana muy débil por su desnutrición y ya afectado de tuberculosis pulmonar. Había una vacante en la Universidad pero no se otorga a Abel por considerarlo inexperto como maestro. Hölmboe ocupa el puesto, que de otra manera iba a ser otorgado a un profesor extranjero, y envía alumnos a Abel para clases particulares.

Abel trabaja sobre lo que ahora se llaman integrales abelianas y establece el Criterio Logarítmico de Convergencia de Series.

Por su parte Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) sistematiza el estudio de las funciones elípticas mediante series. Abel y Jacobi liberan el análisis matemático de la física y el mundo real, casi simultáneamente con la geometría, que logra su independencia a través de las geometrías no-euclideanas.

Abel trabajó también sobre álgebra abstracta en lo que ahora se llaman grupos abelianos.

## 10.6 EVARISTE GALOIS. (1811-1832)

Nació en Bourg-La-Reine, cerca de París. Su padre fué un intelectual, alcalde del pueblo y amante de la libertad. Recibió la primera educación de su madre.

1823 A los doce años de edad, Galois entra al Liceo Luis-le-Grand de París, donde obtuvo premios por su buena preparación.

1824-25 Su trabajo académico de literatura, retórica, griego y latín es calificado como mediocre. Galois se aburre con estas materias, hasta que inicia sus cursos de matemáticas a sus 14 años de edad. Se entusiasma con la geometría de Legendre, la cual digiere con facilidad. En su curso de álgebra, le disgusta el libro de texto, por lo que se dedica a leer a Lagrange y los trabajos de los grandes matemáticos de su época, sobre solución de ecuaciones y teoría de funciones analíticas. Descuida su trabajo escolar normal, pero en el examen general de matemáticas obtiene el primer lugar.



1826 A sus 15 años, Galois se considera a sí mismo como un ser superior en matemáticas y parece disfrutar al demostrarlo ante sus compañeros y sus maestros, quienes lo consideran un niño extraño de gran ambición por las matemáticas, pero que desprecia sus demás materias. Galois pierde la simpatía de sus maestros, quienes consideran que debería dedicarse unicamente a las matemáticas.

1827 Su maestro de matemáticas, Vernier, trata de convencerle de que trabaje sistemáticamente, pero Galois no hace caso y sin completar sus conocimientos de matemáticas elementales, intenta entrar a la Ècole Polytechnique, la gran institución francesa, fundada durante la revolución para proporcionar a los ingenieros civiles y militares la mejor preparación científica del mundo en esa época. Galois fracasó en sus exámenes a pesar de su notable inteligencia para las matemáticas, que sus examinadores no lograron entender.

1828 A sus 17 años, Galois conoce a Louis-Paul-Èmile Richard (1795-1849) profesor de matemáticas avanzadas en el Liceo de Louis-le-Grand, quien inmediatamente reconoce el genio de Galois y lo considera el más extraordinario de sus alumnos, que debería haber sido admitido en la Ècole Polytechnique sin someterlo a exámenes. Este maestro impulsó a sus almunos que llegaron a ser notables científicos como Leverrier, descubridor por medio del análisis matemático, del planeta Neptuno y Hermite, algebrista de primera categoría. Richard reconoce a Galois una notable superioridad sobre sus otros alumnos y le otorga el primer premio en su curso.

1829 Galois publica su primer trabajo de investigación sobre fracciones continuas, y lleva a la Academia Francesa un trabajo con sus principales decubrimientos, recibiendo de Cauchy la promesa de presentarlo. Sin embargo, Cauchy no sólo olvida su promesa, sino que pierde el escrito de Galois, repitiendo el desastre de su relación con Abel. Curiosamente, las dos fallas de Cauchy se presentan ante 2 genios jóvenes que después de su muerte, obtienen amplio reconocimiento por sus descubrimientos.

Galois intenta de nuevo ingresar a la Ècole Polytechnique pero vuelve a fracasar ante un jurado que no entiende su genio, inclusive tiene una controversia con uno de sus examinadores, quien estaba equivocado y obstinado en su error, por lo que Galois pierde la paciencia y le arroja el borrador a la cara. Para completar su frustración ante la sociedad, Galois pierde a su padre, quien se suicida ofendido por una campaña difamante de un predicador , en su contra.

Galois regresa a la escuela para prepararse como maestro. Después de sus exámenes finales, sus maestros le dan calificaciones de excelencia en física y matemáticas,pero en literatura lo consideran una nulidad, con serias dificultades para expresarse con claridad, por lo que dudan pueda llegar a ser un buen maestro.

1830 A sus 19 años, Galois fué aprobado para pasar a la Universidad. Trabaja por su cuenta y produce 3 ensayos que contienen su teoría de ecuaciones algebraicas, presentándola a la Academia de Ciencias para competir por el Gran Premio de Matemáticas, al cual sólo aspiraban los más notables matemáticos de la época. El Secretario recibe el manuscrito, lo lleva a su casa para examinarlo, pero desgraciadamente fallece y se pierde todo rastro del manuscrito. Ante estas circunstancias, Galois decide unirse al grupo radical de los republicanos, por lo que es expulsado de la escuela.

Galois decide ofrecer un curso particular de Algebra Superior con un programa que contiene todos sus descubrimientos:

1. Nueva teoría de los imaginarios (Los imaginarios de Galois, muy importantes actualmente en Algebra y teoría de números).
2. Teoría de la solución de ecuaciones por radicales. (Teoría de Galois).
3. Teoría de números.
4. Funciones elípticas por álgebra.

Nadie se inscribe para este curso y Galois decide ingresar al ejército. Vuelve a escribir su trabajo sobre teoría general de ecuaciones y lo envía a la Academia de Ciencias, pero Poisson le encuentra "incomprensible".



1831-1832 Galois se ve envuelto en problemas políticos, por lo que es arrestado, liberado y vuelto a arrestar por considerarlo un peligroso radical, siendo condenado a 6 meses de prisión, de donde sale en abril de 1832 bajo palabra. Tiene su única relación amorosa y se compromete en duelo con pistolas a 25 pasos, donde resulta herido en el intestino y abandonado en el campo del honor. Un campesino lo lleva al hospital, donde fallece de peritonitis el 31 de mayo de 1832.

Antes del duelo, Galois escribe frenéticamente sus descubrimientos, incluyendo la teoría de grupos y sus implicaciones con brillante éxito, en un escrito de 60 páginas, que envía a su amigo Auguste Chevalier con la esperanza de que alguien pueda disfrutar de todo esto en el futuro.

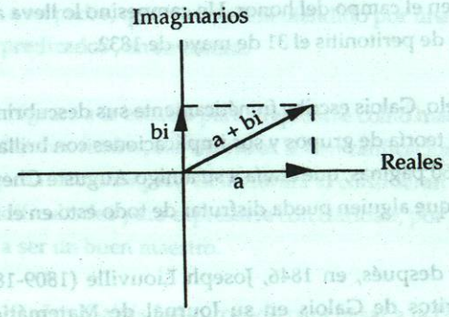
Catorce años después, en 1846, Joseph Liouville (1809-1882) publicó algunos de los escritos de Galois en su Journal de Matemáticas Puras y Aplicadas. Posteriormente, Jules Tannery completó la publicación de los trabajos de Galois en 1908, conteniendo las más importantes propiedades de los grupos y sus extensiones a campos. En 1870, Camille Jordan(1838-1922) publica su Tratado de Sustituciones, en el que reconoce el carácter unificador de la Teoría de Galois. Dos discípulos de Jordan: Felix Klein (1849-1925) y Marios Sophos Lie (1842-1899) exponen en sus trabajos de investigación, el poder sistemático y unificador de la Teoría de Galois.

## 10.7 LIBERACION DEL ALGEBRA.

A partir de mediados del siglo XIX, el álgebra avanza notablemente en abstracción y generalización. Del concepto de grupo, nombre propuesto por Galois, surgen una gran cantidad de sistemas algebraicos ó estructuras, agregando ó quitando condiciones. Así tenemos los semi-grupos, cuasi-grupos, monoides, anillos, ideales, dominios enteros, anillos de división, campos, espacios vectoriales, algebras lineales,etc.

En particular el vector, nombre propuesto por Hamilton, provisto de magnitud y dirección, es utilizado por los físicos desde finales del siglo XVII

para representar fuerzas y velocidades. Sin embargo,el matemático no le dedica mayor atención hasta principios del siglo XIX cuando Gauss los usa implícitamente en la representación geométrica de los números complejos a + bi en el plano:




Esta representación geométrica de los vectores con los números complejos, se utiliza para el estudio de las rotaciones del plano. Hamilton considera que esto puede ser extendido al estudio de las rotaciones del espacio y para el efecto, construye un sistema algebráico, los cuaternios ó cuaterniones, donde se liberan las condiciones tradicionales de una suma asociativa y conmutativa y una multiplicación asociativa, conmutativa y distributiva sobre la suma. Los cuaternios de Hamilton constituyen el primer sistema algebraico con una multiplicación no conmutativa, indispensable para cumplir los propósitos generalizantes del álgebra y al mismo tiempo, satisfacer los requerimientos de la Física y la Geometría.

## 10.8 WILLIAM ROWAN HAMILTON. (1805-1865)

Nació en Dublín, Irlanda. huérfano desde perqueño, fué educado por un tío, con una orientación hacia la literatura y los idiomas.

1820 A sus 15 años de edad, Hamilton se entusiasma por las matemáticas al asistir a una presentación del notable calculista mental americano Zerah Colburn. Estudia la aritmética, la geometría analítica, el cálculo y los 4 volúmenes del Principia Matemática de Newton.



1823 Encuentra un error matemático en la Mecánica Celeste de Laplace y escribe su primer ensayo sobre este tema.

1824-28 Estudia en el Trinity College de Dublín y a sus 22 años de edad, es propuesto como Astrónomo Real, Director del Observatorio y profesor de astronomía de la Universidad. Matemáticamente predice que en los cristales biaxiales la refracción es cónica, lo cual es verificado experimentalmente.

1833 Presenta a la Academia Irlandesa un trabajo sobre los números complejos, considerándolos como un sistema algebraico abstracto de parejas ordenadas de números reales: a+bi= (a,b) donde las operaciones o leyes de composición se definen de la siguiente manera:

Suma: $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$

Multiplicación: $(a,b)(c,d) = (ac- bd , ad + bc)$.

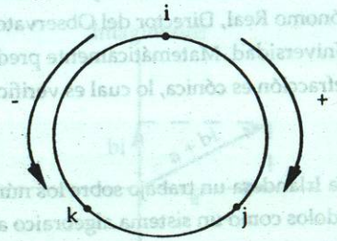
Los números reales están contenidos en este sistema en la forma (a,0) y los números imaginarios puros también pertenecen al sistema como (0,b). Esta concepción abstracta de los complejos permite la posibilidad de extensión del sistema algebraico de los complejos a otro sistema similar que lo contenga.

1843 Observando que los números complejos son adecuados para el estudio de los vectores y las rotaciones del plano, Hamilton desarrolla un sistema algebraico para el estudio de vectores y las rotaciones en el espacio. Para el afecto, considera las cuaternas ordenadas de números reales, extendiendo la suma y multiplicación de los complejos para obtener un sistema algebraico similar con tres unidades imaginarias i, j y k.

Los cuaternios Q de Hamilton pueden presentarse en forma más objetiva y práctica que las cuaternas ordenadas de números reales, de la siguiente manera:

$$\left\{a + bi + cj + dk \middle| a,b,c,d \in R; i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = -ji = k; jk = -kj = i; ki = -ik = j\right\}$$

La suma y multiplicación de cuaternios se definen como si fueran polinomios, con las reglas establecidas en Q para multiplicar las unidades imaginarias i,j y k, las cuales pueden establecerse objetivamente en términos de rotaciones de la siguiente manera:




En este sistema algebraico, la suma es asociativa y conmutativa, mientras que la multiplicación es asociativa y distributiva sobre la suma, pero no es conmutativa,por lo que por primera vez Hamilton libera al álgebra de su molde tradicional, creando un nuevo sistema algebraico que incluye en sus cursos desde 1843 y que fué publicado en 1853 con el título de: Elementos de Cuaterniones.

Hamilton trabajó el resto de su vida, en una extensión de su obra sobre los cuaternios,pero este sistema pierde interés al desarrollarse el Análisis Vectorial del Físico y Matemático americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903), de la Universidad de Yale.

## 10.9 LAS ALGEBRAS LINEALES.

Los cuaternios de Hamilton, fueron generalizados casi simultáneamente, en 1844, por el matemático alemán Herman Günther Grassman (1809-1877) en su Tratado de hiper-complejos, definidos como:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

Los $e_i$ son las unidades de este sistema algebraico, una de ellas es 1, la unidad de los reales, las demás son imaginarias y las $x_i$ son números reales. Las reglas para la multiplicación de los $e_i$ pueden ser similares, ó diferentes, a las de



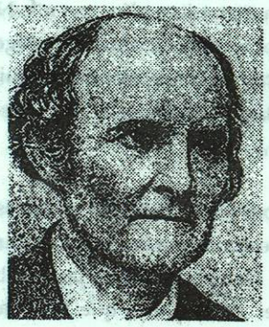
los cuaternios. Grassman orienta su tratado de hipercomplejos hacia la metafísica, por lo que tampoco tiene éxito, a pesar de que su sistema es mucho más general.

Lo que definitivamente viene a superar los esfuerzos de Hamilton y Grassman, es la creación de las algebras matriciales en 1857, por el matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895). Trabajando en su Teoría de los Invariantes, Cayley define las matrices 2X2 para representar transformaciones lineales en el plano que llevan P(x,y) a Q(x',y') de la siguiente manera:

$$(1)\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$$

donde a,b,c y d son números reales. Esta transformación la representa con la matriz: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que se aplica al punto P(x,y) de manera que:

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = X'$$



ARTHUR CAYLEY.

Definiendo la multiplicación de 2 transformaciones como su aplicación sucesiva: $X(T_A . T_B) = (XT_A)T_B = X''$. Si $T_B$ lleva Q(x',y') a R(x'',y'') de manera similar a $T_A$, se tiene:

$$② \begin{cases} x''=ex'+fy' \\ y''=gx'+hy' \end{cases}$$

donde e,f,g y h son números reales.

La matriz correspondiente a $T_B$ es $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ Entonces, el producto de las matrices debe ser la matriz del producto de las transformaciones que se obtiene sustituyendo x' y y' de ① en ② de lo cual resulta lo siguiente:

$$x'' = e(ax+by) + f(cx+dy) = (ea+fc)x + (eb+fd)y$$

$$y'' = g(ax+by)+ h(cx+dy) = (ga+hc)x + (gb+hd)y$$

$$\therefore \quad (BA)X=B(AX)=BX'=X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

debe ser: $BA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc\,, & eb+fd \\ ga+hc\,, & gb+hd \end{pmatrix}$. Entonces, cada hilera de la matriz producto, se obtiene sumando los productos de los elementos de la corrrespondiente hilera del primer factor B por los correspondientes elementos de las columnas del segundo factor A.

La generalización a matrices nXn, con $n \in N$, de esta multiplicación no-conmutativa, proporciona una estructura de Algebra Lineal para cada n, al definir suma y multiplicación por escalar de la siguiente manera:

$$A+B = (a_{ij})_{nXn}+(b_{ij})_{nXn}=(a_{ij}+b_{ij})_{nXn}$$

$$kA=k(a_{ij})_{nXn}=(ka_{ij})_{nXn}$$

Además para todo $m,n \in N$, las matrices mXn proporcionan una estructura de Espacio Vectorial con la suma y la multiplicación por escalares de un campo cualquiera. De esta manera, las algebras matriciales de Cayley proporcionaron mejores condiciones que los cuaternios de Hamilton y los hipercomplejos de Grassman, por lo que éstos se convierten rápidamente en reliquias históricas. Los cuaternios son una curiosa estructura algebraica de las que ahora se llaman anillo de división no-conmutativo.

Las álgebras de matrices, nombre propuesto por Cayley, pueden ser consideradas como ampliaciones del concepto abstracto general de espacio



vectorial, definido como un conjunto no-vacío S de elementos llamados vectores, con una relación de igualdad (equivalencia universal), una suma + tal que (S,+) es un grupo conmutativo, es decir la suma es cerrada, asociativa, conmutativa, con identidad e inverso y una multiplicación por elementos de un campo llamados escalares, (por ejemplo, los números reales) que es asociativa, con unidad y distributiva sobre la suma de vectores y sobre la suma de escalares.

Agregando al espacio vectorial (S,+, .) una multiplicación de vectores x que sea asociativa y bilineal, es decir, distributiva sobre la suma por ambos lados, se tiene una estructura de Algebra Lineal (S,+, ., x). Las múltiples aplicaciones de las algebras lineales en todas las actividades profesionales actuales, a través de los modelos lineales y la investigación de operaciones, han obligado a incorporar a los planes de estudio, un curso de Algebra Lineal conteniendo álgebras matriciales, espacios vectoriales y transformaciones lineales.

La Teoría de los Invariantes de Cayley proporcionó posteriormente a Félix Klein (1849-1925) la base para una geometría general y unificadora, de la cual la geometría euclideana, la geometría hiperbólica yla geometría elíptica, son casos particulares. En ésta geometría, como en el álgebra, agregando y quitando o modificando postulados, se obtienen diferentes geometrías que fueron codificadas por Klein en su famoso programa de la Universidad de Erlanger.

Otro campo de investigación matemática de Cayley es el estudio de las Formas Cuadráticas de n variables:

$$q(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad \text{donde } a_{ij}=a_{ji}.$$

En términos matriciales, si:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad A=\left(a_{ij}\right)_{nXn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica y $X'=(x_1, x_2, ..., x_n)$ es la transpuesta de X:

$$q(x_1, x_2, ..., x_n) = X'AX.$$

Las formas cuadráticas de Cayley son funciones polinómicas de n variables, simétricas y homogéneas de segundo grado, de gran utilidad en las matemáticas aplicadas de la actualidad.

**10.10 CONCLUSION.** La evolución histórica de las matemáticas sigue una notable proliferación de largos caminos hasta nuestros días. Como ejemplos podemos citar los siguientes:

a). La lógica deductiva de Aristóteles, evoluciona con Leibniz en el siglo XVII y se formaliza a mediados del siglo XIX, empezando con George Boole (1815-1864), fundador de la Lógica Simbólica y culmina con la obra de Bertrand Russell (1872-1970) con la colaboración de Alfred N. Whitehead (1861-1947), Principia Mathematica, publicada en 1910, que presenta a la matemática fundamental, como una lógica.

b). La axiomática de la geometría euclideana se formaliza y generaliza en las matemáticas, a fines del siglo XIX, empezando con Moritz Pasch (1843-1931) en su obra de 1882 Lecciones de Geometría Moderna, que incluye un sistema de postulados para la exposición rigurosa de la Geometría Proyectiva. Después, Richard Dedekind (1831-1916) expone en 1888 un sistema de axiomas para fundamentar la aritmética. Simultáneamente, el matemático italiano Guiseppe Peano (1858-1932) presenta en 1899 sus Principios de la Geometría expuestos lógicamente y en 1891 sus Formularios Matemáticos conteniendo los Principios de la Aritmética, a partir de un sistema de 9 postulados de los cuales, 5 de ellos fundamentan la construcción de los números naturales. David Hilbert (1862-1943) sistematiza el método axiomático en 1899 con su obra: Fundamentos de la Geometría, donde presenta un método universal y fecundo para toda la matemática. Convencido de la necesidad de problemas definidos en la investigación, Gilbert propone en su conferencia "Problemas de la



Matemática", presentada en el Congreso de París, en 1900, 23 problemas fundamentales que sirvieron de base para el desarrollo de gran parte de la investigación matemática del siglo 20.

Así como en los ejemplos mencionados, podríamos seguir con la aritmetización del análisis, la Teoría de Conjuntos con la formalización del metalenguaje de las matemáticas y la aritmética transfinita, el desarrollo de la Topología, etc. En 1945, cuando la electrónica hace posible la creación de las computadoras electrónicas se propicia el desarrollo de la Investigación de Operaciones (Optimización) y de gran cantidad de ramas de la ciencia donde se aplican las matemáticas, como la Física, la Astrofísica, etc. En todas estas direcciones, se presentan interesantes historias y biografías que deben darse a conocer en los cursos universitarios donde se manifiesta su presencia.

# HISTORIA DE LAS MATEMATICAS.
## ING. ELADIO SAENZ QUIROGA.

**Ejercicio 12.** El Siglo XIX.

1.- Expresar de una o más formas, los primeros 20 números naturales ,como una suma de 4 ó menos números cuadrados. ¿Cuál es el que tiene el mayor número de representaciones de esta forma?

2.- Encontrar los primeros 4 términos y determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$. Prueba de la razón.

2.2 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$. Prueba de la integral.

3.- Demostrar que las unidades de los complejos 1 é i, junto con sus inversos aditivos -1 y -i constituyen un grupo abeliano finito bajo multiplicación. Construir la tabla de multiplicación.

4.- Verificar que el conjunto de los números reales es un sub-conjunto de los complejos y que éste a su vez es un sub-conjunto de los cuaternios. Ilustrar esto con un diagrama de Venn.

5.- Demostrar que la multiplicación de cuaternios no es conmutativa.

6.- Mostrar que en el álgebra de las matrices reales 2X2, toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}$, con a $\varepsilon$ R es una raíz cuadrada de la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.- Explique las siguientes paradojas del álgebra de los reales:

a). 2 > 1. Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por log(1/3):

$2\log(1/3) > \log(1/3)$

$\therefore \quad \log(1/3)^2 > \log(1/3)$

$\therefore \quad (1/3)^2 = 1/9 > 1/3$ (¡Absurdo!)

b). $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ para todo a,b $\varepsilon$R.

$\therefore \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$

Ahora $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \bullet i = i^2 = -1$

-enc-



$\therefore$ 1 = -1 (¡Absurdo!)

8.- En 1906, Maurice Fréchet define espacio métrico como un conjunto no vacío **P** con una "distancia": $d_{\overline{PQ}}$ $\varepsilon$**R** tal que para todo P, Q, R $\varepsilon$**P**:

1). $d_{\overline{PQ}} \geq 0$.

2). $d_{\overline{PQ}} = 0$ si y sólo si P=Q.

3). $d_{\overline{PQ}} = d_{\overline{QP}}$.

4). $d_{\overline{PQ}} + d_{\overline{QR}} \geq d_{\overline{PR}}$ (Ley del Triángulo).

Verificar que los números reales R con $d_{\overline{PQ}} = |P-Q|$ es un espacio métrico.

9.- Mostrar que el conjunto de puntos del plano con $d_{\overline{PQ}} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ para todo $P(x_1,y_1);Q(x_2,y_2)$ es un espacio métrico.

10.- Consideremos la geometría plana de Euclides limitada a los puntos del interior de un círculo con centro en C y radio r, donde las rectas son las intersecciones no-vacías del círculo con las rectas del plano euclideano no-tangentes al círculo. Verificar que ésta geometría es hiperbólica porque por un punto P fuera de la recta L, pasan un conjunto infinito de rectas, que no intersectan a L. (Modelo de F. Klein).