Pues bien, lo mismo que hicimos para la tangente, se hace para el Seno y el Coseno. Practica con tus compañeros o Maestro.

Existen valores especiales de ángulos muy comunes y conviene los memorices, según la Tabla 3-4-3.

TABLA 3-4-3

Angulo	Seno	Coseno	Tangente
0°	0	1.0	0
30°	.5000	.8660	.5773
45°	.7071	.7071	1.0000
60°	.8660	.5000	1.7320
90°	1.0000	0.0000	Infinito: ∞
180°	0.0000	-1.0000	0.0000
270°	-1.0000	0.0000	Infinito: ∞

3-5 ANGULOS MAYORES DE 90°: También conviene que sepas como obtener los valores de las funciones trigonométricas cuyos ángulos sean mayores de 90°, pues como ya se explicó, las tablas trigonométricas comunes, no traen dichos es. Para ésto vamos a estudiar los cuatro círculos de la Figura 3-5-1.

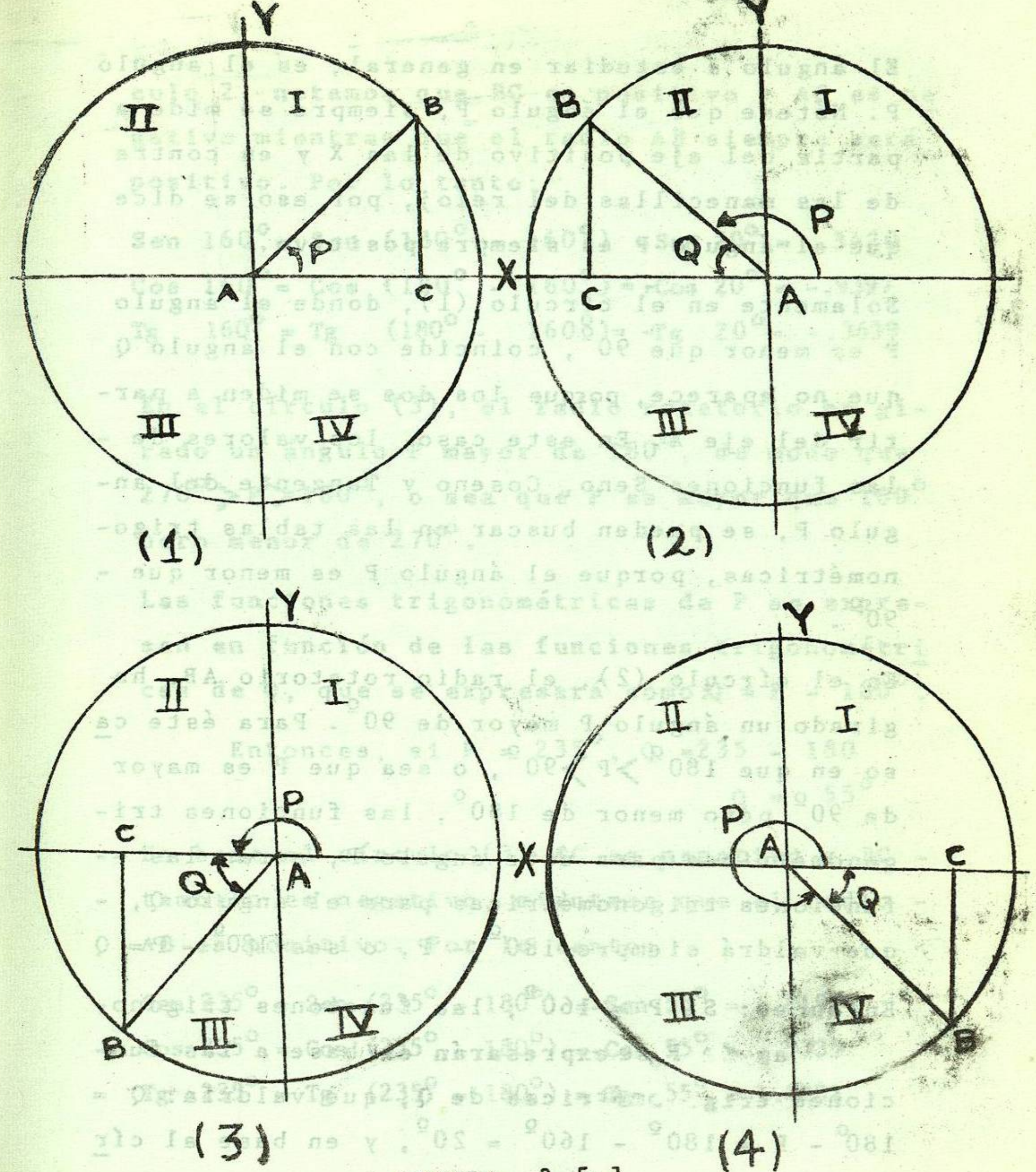


FIGURA 3-5-1

El ángulo a estudiar en general, es el ángulo P. Nótese que el ángulo P, siempre se mide a partir del eje positivo de las X y en contra de las manecillas del reloj, por eso se dice que el ángulo P es siempre positivo.

Solamente en el círculo (1), donde el ángulo P es menor que 90°, coincide con el ángulo Q que no aparece, porque los dos se miden a partir del eje X. En este caso, los valores de las funciones Seno, Coseno y Tangente del ángulo P, se pueden buscar en las tablas trigonométricas, porque el ángulo P es menor que 90°.

En el círculo (2), el radio rotatorio AB, ha girado un ángulo P mayor de 90°. Para éste caso en que $180^{\circ} > P > 90^{\circ}$, o sea que P es mayor de 90° pero menor de 180°, las funciones trigonométricas para éste ángulo P, serán las funciones trigonométricas para el ángulo Q, que valdrá siempre $180^{\circ} - P$, o sea: $180^{\circ} - P = Q$

Entonces: Si $P = 160^{\circ}$, las funciones trigono[illegible]as de P se expresarán en base a las funciones trigonométricas de Q, que valdría: $Q = 180^{\circ} - P = 180^{\circ} - 160^{\circ} = 20^{\circ}$, y en base al círculo 2, notamos que BC es positivo y AC es negativo mientras que el radio AB siempre será positivo. Por lo tanto:

$\text{Sen } 160^{\circ} = \text{Sen } (180^{\circ} - 160^{\circ}) = \text{Sen } 20^{\circ} = .3420$

$\text{Cos } 160^{\circ} = \text{Cos } (180^{\circ} - 160^{\circ}) = -\text{Cos } 20^{\circ} = -.9397$

$\text{Tg } 160^{\circ} = \text{Tg } (180^{\circ} - 160^{\circ}) = -\text{Tg } 20^{\circ} = -.3639$

En el círculo (3), el radio rotatorio ha girado un ángulo P mayor de 180°, de modo que $270^{\circ} > P > 180^{\circ}$, o sea que P es mayor que 180° pero menor de 270°.

Las funciones trigonométricas de P se expresan en función de las funciones trigonométricas de Q, que se expresará como: $Q = P - 180^{\circ}$.

Entonces, si $P = 235^{\circ}$, $Q = 235 - 180$

$Q = 55^{\circ}$

En base al círculo (3) AC es negativo y BC también es negativo, mientras que el radio AB es positivo. Por lo tanto:

$\text{Sen } 235^{\circ} = \text{Sen } (235^{\circ} - 180^{\circ}) = -\text{Sen } 55^{\circ} = -.8191$

$\text{Cos } 235^{\circ} = \text{Cos } (235^{\circ} - 180^{\circ}) = -\text{Cos } 55^{\circ} = -.5735$

$\text{Tg } 235^{\circ} = \text{Tg } (235^{\circ} - 180^{\circ}) = \text{Tg } 55^{\circ} = 1.4281$

Finalmente, en base al círculo 4, el radio - AB, ha descrito un ángulo P, de tal manera - que $360^\circ > P > 270^\circ$, sea que P es mayor que -- 270° pero menor que 360°. Entonces, para éste caso, las funciones trigonométricas de P, serán las del ángulo Q, cuyo valor quedará - determinado por Q: $= 360^\circ - P$,

Entonces, si $P = 295^\circ$, $Q = 360^\circ - 295^\circ = 65^\circ$, y tomando en cuenta que AC es positivo, BC - negativo y que AB es positivo, determinare-- mos las funciones trigonométricas del ángulo P, en función del ángulo Q, o sea:

$\text{Sen } 295^\circ = \text{Sen } (360^\circ - 295^\circ) = -\text{Sen } 65^\circ = -.9063$

$\text{Cos } 295^\circ = \text{Cos } (360^\circ - 295^\circ) = \text{Cos } 65^\circ = .4226$

$\text{Tg } 295^\circ = \text{Tg } (360^\circ - 295^\circ) = -\text{Tg } 65^\circ = -2.1445$

<u>Recomendación</u>:-Para determinar el signo del valor de la función trigonométrica; Seno, Coseno y Tangente, es necesario que memorices cada círculo, imaginándote el triángulo en - cada caso, así como los signos de los catetos AC y BC del ángulo Q, ya que el signo -- del radio rotatorio AB que representa la hipotenusa, es siempre positivo.

3-6 LEY DE SENOS Y COSENOS: Estas dos leyes son muy útiles en la solución de los problemas - de triángulos. La ley de los cosenos sirve - para calcular la magnitud o valor de uno de los lados del triángulo, si se conocen los - otros dos lados del triángulo y el ángulo -- opuesto al lado desconocido. Por ejemplo, -- vea el siguiente triángulo de la Figura 3-6-1

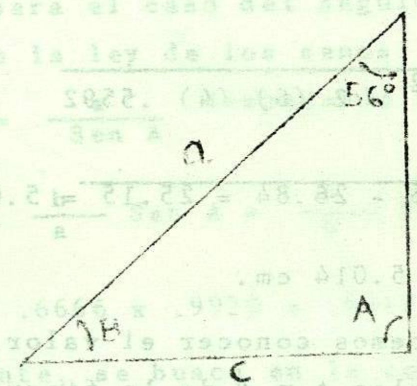


FIGURA 3-6-1

Supongamos que: a = 6 cm b = 4 cm. y que se desea saber el valor del tercer lado C del - triángulo, si el ángulo opuesto vale 56°. -- Primero enunciaremos la ley de los cosenos:

El lado desconocido de un triángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada uno de sus otros dos lados menos el doble producto de los dos lados multiplicados por el coseno del ángulo opuesto al lado desconocido.

Entonces, aplicando ésta ley, al problema -- del triángulo de la figura 3-6-1, tenemos:

$$C = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\ ab \cos 56^o}$$

o bien:

$$C = \sqrt{6^2 + 4^2 - 2\ (6)\ (4)\ .5592}$$

$$C = \sqrt{36 + 16 - 26.84} = \sqrt{25.15} = 5.014$$

Entonces: C = 5.014 cm.

Ahora, si queremos conocer el valor de los - otros dos ángulos A y B de la figura, es necesario aplicar la ley de los senos.

La ley de los senos establece: El valor de - un lado del triángulo entre el seno de su ángulo opuesto es igual al valor de otro lado del mismo triángulo entre el seno de su ángulo --- opuesto.

Entonces: $\dfrac{a}{\text{Sen } A} = \dfrac{c}{\text{Sen } 56^o}$

despejando Sen A tenemos:

$$\text{Sen } A = \text{Sen } 56^o \frac{a}{c} = .8290 \frac{6}{5.014}$$

$$\text{Sen } A = .8290 \times 1.5 = .9920$$

Buscando en la columna de senos el valor de .9920 en la tabla trigonométrica y por interpolación, encontramos que el ángulo A vale - 82.74^o

Ahora, para el caso del ángulo B, aplicando de nuevo la ley de los senos:

$\dfrac{b}{\text{Sen } B} = \dfrac{a}{\text{Sen } A}$ despejando Sen B, tenemos:

$$\text{Sen } B = \frac{b}{a} \text{Sen } A = \frac{4}{6} \text{Sen } 82.74^o$$

$$\text{Sen } B = .6666 \times .9920 = .6612$$

Finalmente, se busca en la columna de senos de la tabla de funciones trigonométricas, -- .6612 y por interpolación se encuentra que - el ángulo B es 41.39^o.

Ya habíamos dicho que la suma de los tres ángulos internos de cualesquier triángulo es - 180^o, pues bien, si se suman los ángulos A, B y C, encontramos que se obtiene 180.13^o, el punto trece (.13) excedente está dentro de la tolerancia de error, ya que los datos iniciales de las longitudes de los dos lados a y b, como el valor del ángulo c, fueron experimentales.

Resolvamos otro problema de triángulo según la fig. 3-6-2

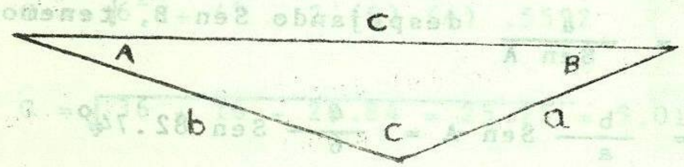


FIGURA 3-6-2

Digamos que: $a = 8$ cm., $b = 10$ cm. y $C = 137^o$

Se trata de encontrar el valor del lado c, aplicando la ley de los cosenos:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\ ab\ \cos C}$$

Y sustituyendo cada una de las literales por sus valores conocidos;

$$c = \sqrt{8^2 + 10^2 - 2\ (8)\ (10)\ \text{Cos}\ 137^o}$$

Fíjese que ahora el ángulo es mayor de 90^o pero menor de 180^o, y aplicando lo que se aprendió en el estudio del vector rotatorio de los 4 círculos:

$\text{Cos}\ 137^o = \text{Cos}\ (180^o - 137^o) = -\ \text{Cos}\ 43^o$ o sea:

$\text{Cos}\ 137^o = -\ .7313$, sustituyendo esta valor en la raíz cuadrada:

$$c = \sqrt{64 + 100 - 160\ (-.7313) = 164 + 160\ (.7313)}$$

$$c = \sqrt{164 + 117 = 281} = 16.76 \text{ cm.}$$

Se deja pendiente el cálculo de los ángulos A y B, como práctica. Recuerda que A + B + C, deben dar muy aproximadamente 180^o.

3-7 TEOREMA DE PITAGORAS: Este teorema se aplica solamente a triángulos rectos y dice así:

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de cada uno de los cuadrados de sus catetos. Tengamos el siguiente triángulo rectángulo, según figura 3-7-1.

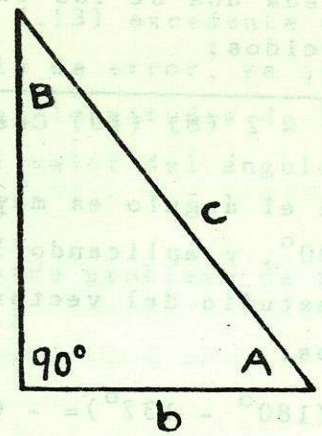


FIGURA 3-7-1

Expresando matemáticamente el teorema de Pitágoras, queda así:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

como se comprenderá:

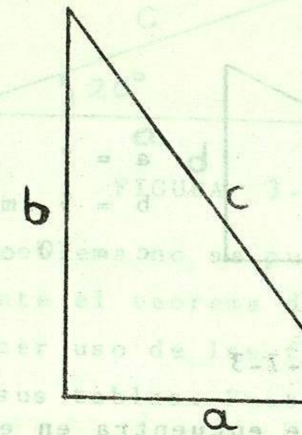
c = hipotenusa

a y b, son los catetos.

La ecuación del teorema de Pitagoras se puede obtener, a partir de la ley de los cosenos. ¿Puedes hacerlo? inténtalo.

La ecuación del teorema de Pitágoras es útil para la solución de triángulos rectangulares.

Por ejemplo, si tenemos el siguiente triángulo recto:



a = 3 cm

b = 4 cm

c = ?

FIGURA 3-7-2

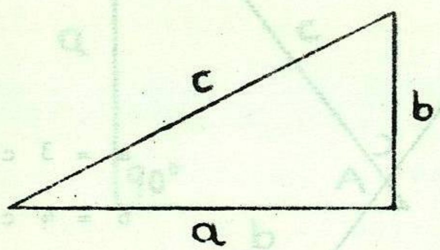
Para encontrar el valor de c. aplicamos directamente la ecuación de Pitágoras.

$$c^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$$

Entonces despejando c, tenemos:

$$c = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

O bien, el otro caso es, cuando desconocemos cualesquiera de los catetos.



$a = ?$

$b = 5$ cm

$c = 10$ cm

FIGURA 3-7-3

Como la incógnita a, se encuentra en el miembro derecho de la ecuación de Pitágoras, ha **de despejarse, resultando:**

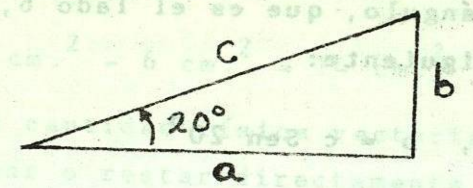
$a^2 = c^2 - b^2$ y sustituyendo los valores de c y b, **tenemos:**

$a^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$

$a = \sqrt{75} = 8.66$ cm.

Hay otro tipo de problemas en os cuales se combina la ecuación de Pitágoras y las funciones trigonométricas, ejemplo:

a) Se tiene el siguiente triángulo:



$c = 20$ cm

$b = ?$

$a = ?$

FIGURA 3-7-4

Este problema no se puede resolver empleando solamente el teorema de Pitágoras, sino hay que hacer uso de las funciones trigonométricas y sus tablas. Pues bien:

Como $\text{Cos } 20^o = \frac{a}{c}$ entonces despejando a,

$a = c \text{ Cos } 20^o$

$a = 20 \times .9397 = 18.79$ cm

Ahora podemos seguir dos caminos: Usar el teorema de Pitágoras despejando b de su ecuación, pues ya conocemos c y a, y así calcular su valor, o bien, utilizar las funciones trigonométricas. Vamos a hacer lo último. (tu puedes emplear paralelamente el método de Pitágoras si lo deseas, con el fin de comparar rapidea y resultados).

Pues bien, para encontrar el valor del ter-- cer lado del triángulo, que es el lado b, podemos hacer lo siguiente:

$$\text{Sen } 20^{o} = \frac{b}{c} \quad \text{o,} \quad b = c \text{ Sen } 20^{o}$$

$$b = 20 \times .3420 = 6.84 \text{ cm.}$$

$$\text{o bien: tg } 20^{o} = \frac{b}{a};\ b = a \text{ Tg } 20^{o}$$

$$b = 18.79 \times .3639 = 6.84 \text{ cm.}$$

Como se puede apreciar, usando ya sea Seno o Tangente, el resultado fué el mismo. El mismo resultado deberá obtenerse si usamos el - teorema de Pitágoras.

3-8 VECTORES: Las cantidades físicas fundamentales y derivadas se subdividen en: cantidades físicas escalares y cantidades físicas vectoriales.

Una cantidad física escalar es la que se caracteriza unicamente por su valor numérico y unidades. Ejemplos: la masa, el tiempo, el - área, el volúmen, etc., además, se pueden sumar directamente o restar, digamos:

3 Kg + .5 Kg + 100 Kg nos dan un total de -- 103.5 Kg. o bien:

$$20 \text{ cm.}^2 - 6 \text{ cm.}^2 = 14 \text{ cm.}^2$$

Una cantidad física vectorial, no se puede - sumar o restar directamente como se hizo con los escalares, pues para identificar completamente a una cantidad vectorial se necesi-- tan además del valor numérico y sus unida-- des, de la dirección y sentido. Por lo tanto, una cantidad física vectorial se caracteriza por tener: Magnitud, Dirección y Sentido.

Vamos a aclarar cada uno de los términos que caracterizan a una cantidad vectorial:

Magnitud: Es el valor numérico y unidades.

Dirección: Es el ángulo formado con el eje - + X.

Sentido: Es hacia donde se dirige o apunta - la cantidad vectorial.

Como ejemplos de cantidades físicas vectoriales tenemos: al desplazamiento, a la velocidad, a la aceleración, a la fuerza, al peso, etc.

Toda cantidad física vectorial, es representada por un vector. Pues bien, ¿Que es un vector? y diremos:

Un vector es un segmento de línea recta, de una longitud a escala (magnitud) con una punta de flecha en uno de sus extremos (sentido) y formando un ángulo con el eje positivo de las X (dirección).

La siguiente figura nos aclarará el concepto de vector:

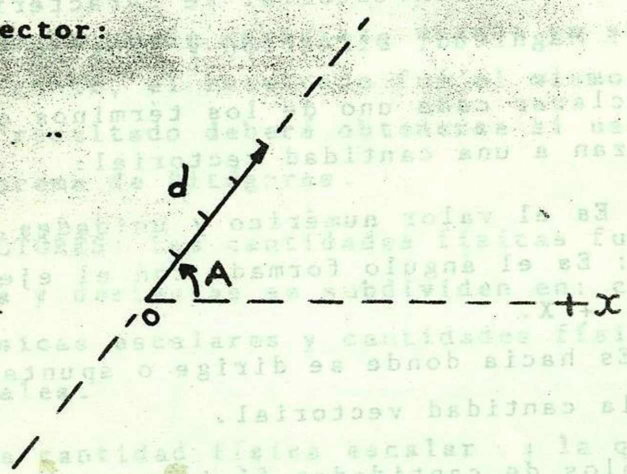


FIGURA 3-8-1

OBSERVACIONES:

d, representa desplazamiento y la flecha segmento de línea recta, representa el vector desplazamiento.

La punta de la flecha es el sentido del vector.

A es la dirección del vector: Nótese que se mide en contra de las manecillas del reloj y a partir del eje X positivo. O indica el origen del vector.

A la línea formada por rayitas y que se traza a lo largo del vector, se llama: Línea de acción del vector.

Las rayitas que están sobre el vector, indican que se ha trazado en base a una escala, para representar así la magnitud del vector.

COMPOSICION Y DESCOMPOSICION VECTORIAL:-

Los vectores que representan a las cantidades físicas vectoriales, ya mencionadas como ejemplos, se pueden sumar empleando para ello dos métodos generales: el método gráfico o geométrico y el método analítico.

El método gráfico o geométrico se subdivide a su vez en dos: El método del paralelogramo (empleado para el caso de dos vectores) y el método del Polígono (empleado para el caso de más de dos vectores).

Los dos métodos gráficos, no se tratarán en el presente escrito, pues se realizarán en el Laboratorio de Física.

En cuánto al Método analítico, se divide también en dos: El método de la Ley de los Cosenos y de los Senos, y el de Pitágoras (aplicables para dos vectores) y el Método de la -- Descomposición y Composición vectoriales.

3-9 METODO DE LA LEY DE LOS COSENOS Y DE LOS SENOS Y TEOREMA DE PITAGORAS: Antes de iniciarnos en la -- aplicación de estas leyes, es necesario dar una breve descripción de los ejes cartesianos y sus características (esto también ya - se debió de haber tratado en las prácticas - de Física).

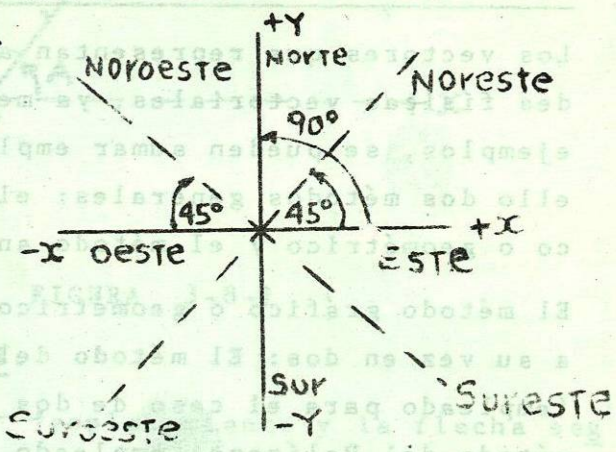


FIGURA 3-9-1

OBSERVACIONES SOBRE LA FIGURA;

1.- Los ejes X, Y; se cruzan en un punto llamado: Orígen de los ejes, formando un ángulo de 90°.

2.- Al eje + Y, se le llama también eje norte
Al eje - Y, se le llama también eje sur
Al eje + X se le llama también eje este
Al eje - X se le llama también eje oeste

3.- Entre el eje Norte y el eje Este, se en-- cuentra exactamente a la mitad, el eje Noreste.

Entre el eje Norte y el eje Oeste, se encuentra exactamente a la mitad, el eje Noreste.

Entre el eje Sur y el eje Oeste, se en--- cuentra exactamente a la mitad, el eje -- Suroeste, y:

Entre el eje Sur y el eje Este, se encuentra exactamente a la mitad, el eje Sureste.

3-10 SECCION DE PROBLEMAS RESUELTOS.-

En esta sección, los problemas se podrán re-