No lo olvides.

Usando la ecuación $2gY = V^2 - Vo^2$ y haciendo V = 0 porque la bala se detendrá al llegar a su máxima altura Y, por lo tanto; $2gY = -Vo^2$, despejando Y, tendremos:

$$Y = \frac{-Vo^2}{2g} = \frac{-(450)^2}{2(-9.8)} = \frac{202500}{19.6} = 10,331.63 \text{ M}$$

Observa como la altura Y, fué positiva. Porque la bala se disparó hacia arriba.

(b) Utilizando la ecuación: $\frac{Y}{t} = \frac{V + Vo}{2}$

y como ya sabemos que V = 0, entonces:

$\frac{Y}{t} = \frac{Vo}{2}$ despejando t; $t = \frac{2Y}{Vo}$

o sea; $t = \frac{2X\ 10,331.63}{450} = 45.91$ seg

(c) Usando la ecuación: $Y = Vot + \frac{1}{2}gt^2$ y como ahora Vo = 0 pues la bala está en caída libre, entonces, la ecuación se transforma a: $Y = \frac{1}{2}gt^2$, despejando t; $t = \pm\sqrt{\frac{2Y}{g}}$, ahora Y es negativa pues la bala está en caída libre, por lo tanto:

$$t = \pm\sqrt{\frac{2\ (-10,331.63)}{-9.8}} = \frac{20,663.26}{9.8} = 2108.49$$

$t = \pm 45.91$ seg. y como el tiempo solo es positivo, entonces: t = 45.91 seg.

Este resultado es igual al tiempo de subida, y podemos concluir diciendo:

El tiempo de subida y de bajada son iguales, para una misma altura, en un disparo vertical hacia arriba.

(d) El tiempo total que permaneció en el aire la bala, será la suma de los dos tiempos: El de subida y el de bajada, por eso: 45.91 + 45.91 = 91.82 seg.

4.- Desde el borde de una azotea de 10 M de alto, se lanza verticalmente hacia arriba, una posta con una velocidad de 20 $\frac{M}{seg}$ (a)¿A que altura desde la azotea llegará la posta? (b) ¿Qué tiempo tardará en caer la posta hasta el suelo a partir del punto de su máxima altura?

SOLUCIONES:

(a) Partiendo de: $2\ gY = V^2 - Vo^2$ y como V = 0, pues la posta se detendrá al llegar a su máxima altura Y, entonces: $2\ gY = -Vo^2$ despejando Y;

$$Y = -\frac{Vo^2}{2g} = \frac{-(20)^2}{2(-9.8)}$$

$$Y = \frac{-400}{-19.6}$$

$Y = 20.4$ M, ésta altura es positiva, porque la posta se disparó hacia arriba.

(b) Para calcular el tiempo de caída de la posta, emplearemos la ecuación: $Y = Vot + \frac{1}{2} gt^2$, como la posta está en caída libre; $Vo = 0$, entonces: $Y = \frac{1}{2} gt^2$, despejando t: $t = \pm\sqrt{\frac{2Y}{g}}$

Ahora veremos cuánto vale Y: Como la posta se disparó desde la azotea que se encuentra a 10 M sobre el suelo, entonces hay que sumar ésta altura, a la de la posta, para tener la altura total de caída libre de la posta: 10+20.4 M ésta altura es negativa porque se trata ahora de caída libre así que: $Y = -30.4$ M, y sustituyendo en la ecuación:

$$t = \pm\sqrt{\frac{2Y}{g}} = \pm\sqrt{\frac{2(-30.4)}{-9.8}}$$

$$t = \pm\sqrt{6.2} = \pm 2.49 \text{ seg.}$$

Por lo tanto, el tiempo de caída es 2.49 seg.

5.- Dos proyectiles son lanzados verticalmente hacia arriba. El primero con una velocidad de 60 $\frac{M}{seg.}$ y el segundo con una velocidad de 100 $\frac{M}{seg}$. ¿Cuál de los dos llegará primero al suelo, si el segundo proyectil se disparó .5 segundos después que el primero?.

SOLUCION;

Primero se calculará el tiempo de subida para cada proyectil.

Para el primer proyectil: $V = Vo + gt$, como $V = 0$ entonces; $Vo + gt = 0$ despejando t;

$$t = \frac{-Vo}{g} = \frac{-(60)}{-9.8} = 6.12 \text{ seg.}$$

para el segundo proyectil: También $V = 0$ entonces:

$$t = \frac{-Vo}{g} = \frac{-(100)}{-9.8} = 10.2 \text{ seg}$$

Pero a éste tiempo, hay que sumarle .5 seg porque el segundo proyectil se disparó después, así es que: t = 10.2 + .5 = 10.7 seg.

Como este tiempo de subida (10.7) es mayor que el tiempo de subida del primer proyectil (6.12 seg) entonces se concluirá, que el segundo proyectil se tardará más tiempo en caer que el primero, pués recuerda que el tiempo de subi da, es igual al tiempo de bajada.

4-12 PROYECTILES Y TRAYECTORIAS PARABOLICAS.

En el estudio de la caída libre y del tiro -- vertical de los objetos lanzados al espacio, la aceleración gravitatoria o gravedad, siempre estuvo gobernando sus movimientos: Acelerados (en la caída libre) o desacelerados -- (en el tiro vertical hacia arriba). Recuerda que en el estudio del movimiento en un plano horizontal, nunca se mencionó a la gravedad, porque en dicho plano, no tiene ningún efecto.

En ésta sección daremos una breve descripción del movimiento de proyectiles lanzados al espacio con un ángulo de disparo comprendido entre 0^o y 90^o. Cuando el ángulo es 0^o, se tiene un plano horizontal y cuando el ángulo es de 90^o, se tiene un plano vertical o sea: Caída libre y tiro vertical.

El caso general del estudio del movimiento - de proyectiles, está mostrado en la siguiente figura 4-11-1

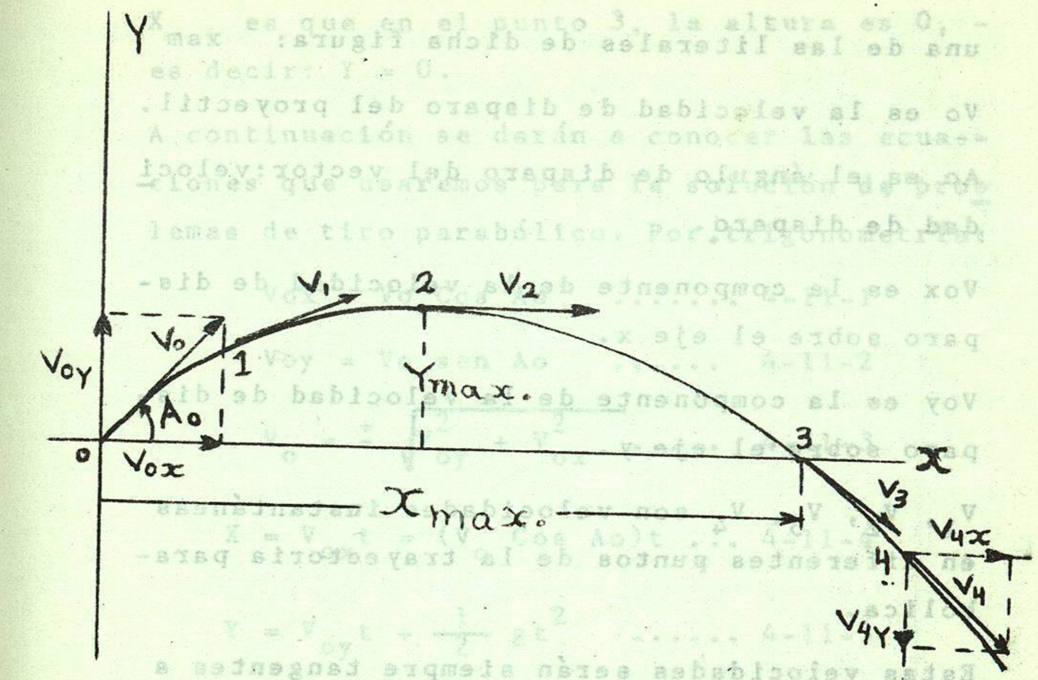


FIGURA 4-11-1

La forma de la trayectoría que sigue un proyectil lanzado con un ángulo mayor de 0^o pero menor que 90^o, esla de una parábola, por eso se llama a éste movimiento; Movimiento Parabólico de los proyectiles, como lo muestra la figura 4-11-1, o también tiro parabólico.

Expliquemos el significado de todas y cada una de las literales de dicha figura:

Vo es la velocidad de disparo del proyectil.

Ao es el ángulo de disparo del vector: velocidad de disparo.

Vox es la componente de la velocidad de disparo sobre el eje x.

Voy es la componente de la velocidad de disparo sobre el eje y.

V_1, V_2, V_3, V_4 son velocidades instantáneas en diferentes puntos de la trayectoria parabólica.

Estas velocidades serán siempre tangentes a la trayectoria parabólica en sus puntos respectivos. Cada velocidad como vector, será igual a la suma vectorial de sus componentes, como lo muestra la V_4 en el punto 4. La V_2 en especial, no tiene componente en el eje y, solamente en el eje x. Para éste caso especial: a la altura del proyectil se le llama altura máxima y se representa como Y - máx.

X_{max} es el alcance máximo, medido según se -

muestra en la figura. La característica de X_{max} es que en el punto 3, la altura es 0, - es decir: Y = 0.

A continuación se darán a conocer las ecuaciones que usaremos para la solución de problemas de tiro parabólico. Por trigonometría:

$$Vox = Vo \cos Ao \quad \ldots\ldots\ldots \ 4\text{-}11\text{-}1$$

$$Voy = Vo \operatorname{sen} Ao \quad \ldots\ldots \ 4\text{-}11\text{-}2$$

$$V_o = \pm \sqrt{V_{oy}^2 + V_{ox}^2} \quad \ldots\ldots \ 4\text{-}11\text{-}3$$

$$X = V_{ox} t = (V_o \cos Ao)t \ \ldots \ 4\text{-}11\text{-}4$$

$$Y = V_{oy} t + \frac{1}{2} g t^2 \quad \ldots\ldots \ 4\text{-}11\text{-}5$$

$$V_x = V_{ox} = V_o \cos Ao \ \ldots\ldots \ 4\text{-}11\text{-}6$$

$$V_y = V_{oy} + gt = V_o \operatorname{Sen} Ao + gt \ \ldots 4\text{-}11\text{-}7$$

$$2gY = V_y^2 - V_{oy}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \ 4\text{-}11\text{-}8$$

$$\frac{Y}{t} = \frac{V_{oy} + V_y}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \ 4\text{-}11\text{-}9$$

$$Y = x \operatorname{tg} Ao + \frac{g x^2}{2(V_o \cos Ao)^2} \quad \ldots 4\text{-}11\text{-}10$$

El uso o aplicación de cada una de las ecuaciones anteriores, requiere de mucho cuidado y práctica, en la solución de problemas.

Se van a mostrar otras dos figuras, de tiros parabólicos:

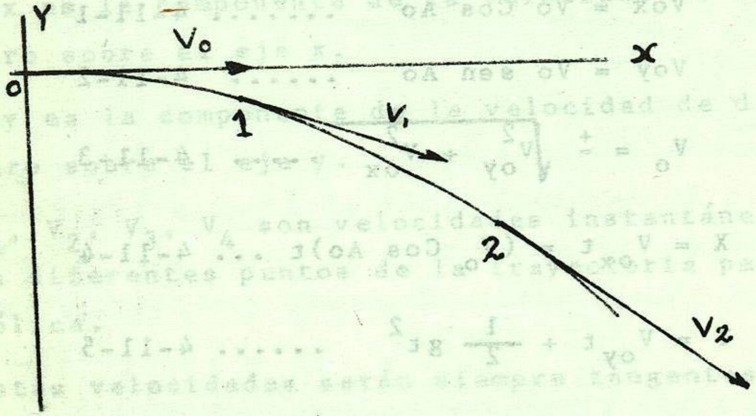


FIGURA 4-11-2

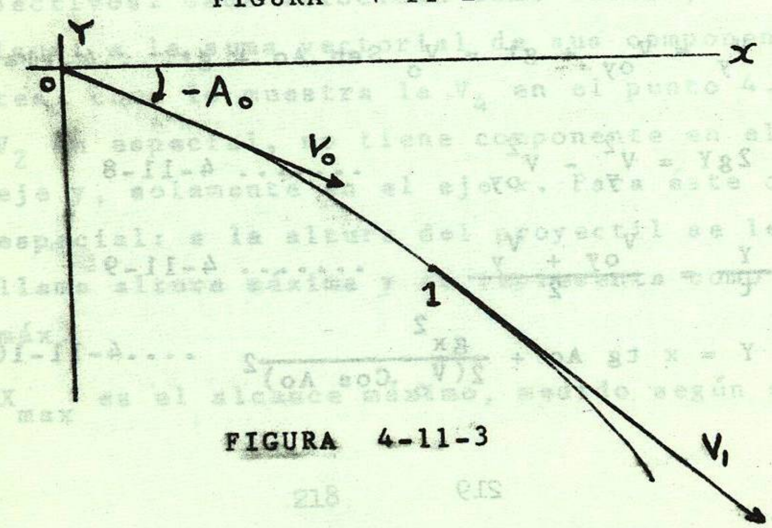


FIGURA 4-11-3

En la figura 4-11-2, nótese que el ángulo de disparo: $Ao = 0$, mientras que en la figura 4-11-3, el ángulo de disparo es negativo.

En las dos figuras, Y no tiene valores positivos, sólo negativos, pués se miden desde el origen hacia abajo, además en éstas trayectorias parabólicas no existen; ni altura máxima: Ymax, ni alcance máximo: Xmax.

Todas las ecuaciones anteriores, son aplicables también a éstos tiros parabólicos.

Cada velocidad V: en cualquier punto de la trayectoria parabólica, será igual a:

$\sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ para la cual, habrá necesidad de calcular la magnitud de cada componente: Vx, Vy.

4-13 SECCION DE PROBLEMAS RESUELTOS.

1.- Encontrar la ecuación para calcular la altura máxima: Y máx.

SOLUCION:

Recuerda que Ymax existe sólo para la figura 4-11-1 y en base a que $Vy = 0$, usaremos la ecuación 4-11-8:

$$2gy = -V_x^2 = -(Vo\ Sen\ Ao)^2 = -V_o^2\ Sen^2\ Ao,$$

entonces; Y = Ymax, por lo tanto;

$$2g\ Ymax = -V_o^2\ Sen^2\ Ao$$

$$Y\ max = \frac{-V_o^2\ Sen^2\ Ao}{2g}$$

o también; $Y\ max = \frac{-(Vo\ Sen\ Ao)^2}{2g}$ ...4-11-11

Recuerda que al sustituir g por su valor, deberá incluirse el signo de menos.

2.- Encontrar la ecuación para calcular el alcance máximo: X max.

SOLUCION:

Recuerda que Xmax, existe sólo para la figura 4-11-1 y en base a que Y = 0, para éste caso y usando la ecuación: 4-11-10, tenemos:

$$XtgAo + \frac{gx^2}{2\ (Vo\ Cos\ Ao)^2} = Y$$

entonces X = Xmax, cuando Y = 0, por lo tanto: $Xmax\ tg\ Ao + \frac{g\ Xmax^2}{2\ (Vo\ Cos\ Ao)^2} = 0$

o bién; $\frac{g\ Xmax^2}{2\ (Vo\ Cos\ Ao)^2} = -\ Xmax\ tg\ Ao$

Simplificanco; $\frac{g\ Xmax}{2\ (Vo\ Cos\ Ao)^2} = -\ tg\ Ao$

Despejando Xmax:

$$Xmax = \frac{-(tg\ Ao)\ 2\ (Vo\ Cos\ Ao)^2}{g}$$

pero $tg\ Ao = \frac{Sen\ Ao}{Cos\ Ao}$;

$$Xmax = \frac{-2\frac{Sen\ Ao}{Cos\ Ao}\ V_o^2\ Cos^2\ Ao}{g}$$

$$X\ max = \frac{-2Vo^2\ Sen\ Ao\ Cos\ Ao}{g}$$

$$X\ max = \frac{-Vo^2\ 2\ Sen\ Ao\ Cos\ Ao}{g}$$

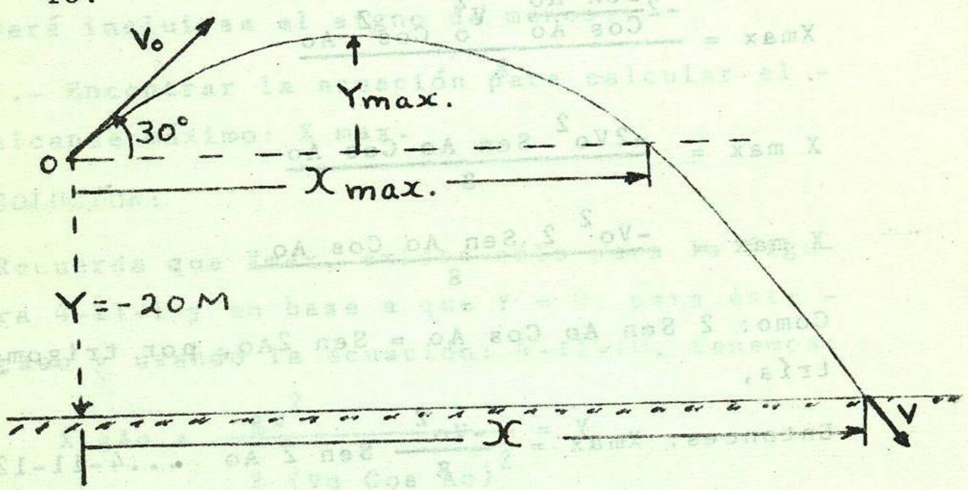
Como: 2 Sen Ao Cos Ao = Sen 2Ao, por trigometría,

Entonces: $Xmax = \frac{-Vo^2}{g}\ Sen\ 2\ Ao$ ...4-11-12

Recuerda que al sustituir g, por su valor, deberá incluirse el signo menos.

3.- Un proyectil es disparado con una velocidad de 200 m/seg, con un ángulo de disparo de 30°. Encontrar (a) su altura máxima (b) su alcance máximo (c) la distancia donde cae rá el proyectil, medida desde el punto inferior de disparo, si el proyectil fue disparado a 20 metros de altura. (d) ¿Con qué velocidad pegará en el suelo? (e) ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire?

SOLUCIONES.- Hagamos en primer lugar un dibujo aproximado que nos muestre la trayectoria seguida por el proyectil hasta llegar al suelo:



(a) Usando la ecuación 4-11-11

$$Ymax = \frac{-(Vo\ Sen\ Ao)^2}{2g}$$

Y sustituyendo las variables por sus valores y signos respectivos, tenemos:

$$Ymax = \frac{-(200\ Sen\ 30^o)^2}{2\ (\ -9.8\ )} = \frac{(200\ X\ .5)^2}{19.6} =$$

$$\frac{(100)^2}{19.6} = \frac{10000}{19.6} = 510.2\ M$$

Por lo tanto, la altura máxima que alcanzará a tener el proyectil será: Ymax =510.2 M

(b) Utilizando la ecuación 4-11-12.

$$Xmax = \frac{-\ Vo^2}{g}\ Sen\ 2Ao = \frac{-\ (200)^2}{-\ 9.8}\ Sen\ 2\ X\ 30^o$$

$$Xmax = \frac{40000}{9.8}\ Sen\ 60^o = \frac{40000\ x\ .866}{9.8}$$

Xmas = 3534.6 M

(c) Empleando la ecuación: 4-11-10

$$Y = Xtg\ Ao + \frac{gX^2}{2\ (Vo\ Cos\ Ao)^2}\ \text{y arreglándola:}$$

$$\frac{g}{2\ (Vo\ Cos\ Ao)^2}\ X^2 + (tgAo)\ X - Y = 0$$

y sustituyendo las variables por sus valores y signos:

$$\frac{-9.8}{2\ (200\ \text{Cos}\ 30^o)^2}\ X^2 + (\text{tg}\ 30^o)\ X - (-20) = 0$$

$$-\ 16.3\ X\ 10^{-5}\ X^2 + .577\ X + 20 = 0$$

$$16.3\ X\ 10^{-5}\ X^2 - .577\ X - 20 = 0$$

Aplicando la ecuación cuadrática:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ tenemos:}$$

$$X = \frac{-(-.577) \pm \sqrt{(.577)^2 - 4\ (16.3\ X\ 10^{-5})(-20)}}{2X\ 16.3\ X\ 10^{-5}}$$

$$X = \frac{.577 \pm \sqrt{.3329 + .01304 = .3459}}{32.6\ X\ 10^{-5}}$$

$$X = \frac{.577 \pm .588}{32.6\ X\ 10^{-5}}$$

Como observará, según el resultado, hay dos valores para X, uno será positivo y otro negativo. Como es de esperarse, el valor negativo se descarta porque el proyectil caerá a la derecha del disparo, por lo tanto:

$$X = \frac{.577 + .588}{32.6\ X\ 10^{-5}} = \frac{1.165}{32.6\ X\ 10^{-5}}$$

$$X = 3{,}573.6\ M$$

o sea, que a 3,573.6 M a la derecha del punto inferior del disparo, pegará el proyectil con el suelo.

(d) Para obtener la velocidad con que pega el proyectil en el suelo, es necesario conocer sus componentes: Vx, y Vy.

Entonces: Vx = Vox = Vo CosAo según la ecuación 4-11-6; $Vx = 200\ \text{Cos}\ 30^o = 200\ X .866$

$$Vx = 173.2\ M/seg$$

Para calcular la Vy, hemos de usar la ecuación; 4-11-8; $Vy^2 - Vo^2y = 2gy$ despejando Vy^2;

$$Vy^2 = 2gy + Vo^2y$$

$$Vy = \pm \sqrt{2gy + Vo^2y = 2gy + (Vo\ \text{Sen}\ Ao)^2}$$

$$Vy = \pm \sqrt{2(-9.8)\ (-20) + (200\ \text{Sen}\ 30^o)^2}$$

$$Vy = \pm \sqrt{392 + 10{,}000 = 10{,}392}$$

$V_y = \pm\ 101.94\ \frac{M}{seg}$ Esta velocidad debe ser negativa, porque el proyectil cae: $V_y = -101.94\ \frac{M}{seg}$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$V = \pm \sqrt{V^2x + V^2y = (173.2)^2 + (-101.94)^2}$$

$$V = \pm \sqrt{29998.24 + 10391.76 = 40389.76}$$

$$V = \pm\ 200.97\ \text{m/seg.}$$

Como el vector velocidad, en éste caso, está inclinado, se tomará el signo positivo, por lo tanto;

$$V = 200.97\ \text{M/seg}$$

(e) Para calcular el tiempo que permaneció el proyectil en el aire: Desde que fué disparado hasta que tocó tierra, se hará a partir de la ecuación 4-11-4. X = Vox t o también X = (Vo Cos Ao) t, despejando t;

$$t = \frac{X}{Vo\ Cos\ Ao} = \frac{3573.6}{\text{[illegible]}\ 30^\circ} = \frac{17.868}{.866}$$

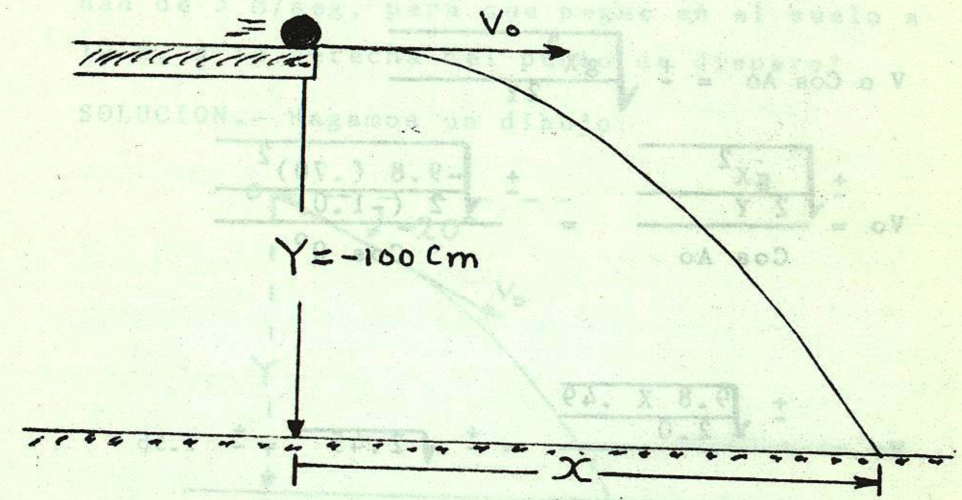
t = 20.6 seg.

4.- Una canica sale rodando desde el borde de una mesa horizontal, de altura 100 cm. y pega en el suelo a 70 cm. dela mesa.

Encontrar (a) La velocidad con la cual salió la canica del borde de la mesa (b) El tiempo que estuvo en el aire.

SOLUCION:

Hagamos un dibujo:



(a) Como la canica salió disparada paralelamente a la mesa horizontal, entonces su velocidad también será horizontal, por lo que,