

al análisis de problemas específicos en las aplicaciones.

El material del texto, incluyendo la solución completa de los ejercicios, fue cubierto totalmente en un curso anual con 3 horas de teoría y 6 de ejercicios por semana.

La realización de estos apuntes se debe en gran parte a las personas que me animaron y me recomendaron para lograr experiencias que estimó de manera especial. Durante el año escolar 1961-1962 realicé estudios de matemáticas, económicas y estadísticas en la Universidad de California, en Berkeley, gracias a una beca gestionada por la Srita. Consuelo Meyer, a quien expreso principalmente mi gratitud. Pasé dos veranos en la Ciudad de México, estudiando matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma, enviado por el Ing. Roberto Treviño y el Ing. Rafael Serna. Por último participé como profesor en el IV Curso Intensivo de Capacitación en Problemas de Desarrollo Económico y Evaluación de Proyectos, recomendado por el Lic. Víctor L. Urdinola. Recibirán estas personas el mérito, al ser que tiene alguno, de este modesto esfuerzo. En esta segunda edición se han corregido errores de la primera edición. Se incluye al final las respuestas de algunos de los problemas de los ejercicios. Los problemas que puedan ser eliminados por ser especialmente difíciles e isopor dos, han sido indicados con un asterisco (\*).

Montreay, N. L., noviembre de 1962.

INDICE GENERAL

<u>Capítulo I. Conceptos Fundamentales de Geometría Analítica</u>	Pág.
1.1 Sistema de Coordenadas.....	2
1.2 Distancia entre dos puntos.....	3
1.3 Gráficas de ecuaciones.....	4
1.4 Ecuación del círculo.....	5
1.5 Un problema de distribución de mercados.....	7
1.6 Línea recta. Inclinación y pendiente.....	9
1.7 Paralelismo y perpendicularidad.....	12
1.8 Ecuación de la recta.....	13
<u>Capítulo 2. Funciones y sus gráficas.</u>	
2.1 Funciones de una variable.....	21
2.2 Funciones de varias variables.....	23
2.3 Clasificación de las funciones.....	24
2.4 Gráficas de funciones.....	25
2.5 Funciones de demanda.....	27
2.6 Funciones de costo.....	30
2.7 Ingreso total.....	30
<u>Capítulo 3. Límites. Derivada de una función.</u>	
3.1 Secuencias.....	37
3.2 Límite de una función.....	38
3.3 Continuidad de una función.....	41
3.4 Propiedades fundamentales de los límites.....	41
3.5 Evaluación de límites.....	43
3.6 Formas indeterminadas.....	44
3.7 Derivada de una función.....	47
3.8 Interpretación geométrica de la derivada.....	50

INDICE GENERAL

Capítulo 1. Conceptos Fundamentales de Geometría Analítica

1.1 Sistema de Coordenadas..... 2

1.2 Distancia entre dos puntos..... 3

1.3 Gráficas de ecuaciones..... 4

1.4 Ecuación del círculo..... 5

1.5 Un problema de distribución de mercados..... 7

1.6 Línea recta, inclinación y pendiente..... 9

1.7 Paralelismo y perpendicularidad..... 12

1.8 Ecuación de la recta..... 13

Capítulo 2. Funciones y sus gráficas

2.1 Funciones de una variable..... 21

2.2 Funciones de varias variables..... 23

2.3 Clasificación de las funciones..... 24

2.4 Gráficas de funciones..... 25

2.5 Funciones de demanda..... 27

2.6 Funciones de costo..... 30

2.7 Ingreso total..... 30

Capítulo 3. Límites, Derivada de una función

3.1 Secuencias..... 37

3.2 Límite de una función..... 38

3.3 Continuidad de una función..... 41

3.4 Propiedades fundamentales de los límites..... 41

3.5 Evaluación de límites..... 43

3.6 Formas indeterminadas..... 44

3.7 Derivada de una función..... 47

3.8 Interpretación geométrica de la derivada..... 50

Capítulo 4. Reglas para derivar.

4.1 Reglas para derivar funciones algebraicas..... 59

4.2 Funciones inversas..... 66

4.3 Funciones implícitas..... 67

4.4 Derivadas sucesivas de una función..... 69

4.5 Funciones logarítmicas..... 71

4.6 Derivación de funciones logarítmicas..... 75

4.7 Derivación logarítmica..... 78

4.8 Funciones exponenciales..... 79

4.9 Elasticidad..... 81

4.10 Elasticidad de demanda..... 82

Capítulo 5. Aplicaciones de la derivada.

5.1 Aplicación de la derivada a gráficas de funciones..... 93

5.2 Tangentes y normales..... 96

5.3 Máximos y mínimos relativos..... 97

5.4 Aplicaciones de la derivada en Teoría Económica..... 102

5.5 La elasticidad en una ley "normal" de demanda..... 106

5.6 Problema de monopolio..... 109

Capítulo 6. Funciones de varias variables.

6.1 Introducción. Conceptos fundamentales..... 118

6.2 Derivadas parciales..... 120

6.3 Crecimiento ó decrecimiento de una función de varias variables..... 123

6.4 Derivadas parciales de alto orden..... 124

6.5 Interpretación geométrica de las segundas derivadas parciales..... 127

6.6 Diferenciales..... 128

6.7 Diferenciales de funciones de varias variables..... 132

6.8 Derivadas totales..... 134

Capítulo 4. Reglas para derivar

4.1 Reglas para derivar funciones algebraicas..... 59

4.2 Funciones inversas..... 66

4.3 Funciones implícitas..... 67

4.4 Derivadas sucesivas de una función..... 69

4.5 Funciones logarítmicas..... 71

4.6 Derivación de funciones logarítmicas..... 75

4.7 Derivación logarítmica..... 78

4.8 Funciones exponenciales..... 79

4.9 Elasticidad..... 81

4.10 Elasticidad de demanda..... 82

Capítulo 5. Aplicaciones de la derivada

5.1 Aplicación de la derivada a gráficas de funciones..... 93

5.2 Tangentes y normales..... 96

5.3 Máximos y mínimos relativos..... 97

5.4 Aplicaciones de la derivada en Teoría Económica..... 102

5.5 La elasticidad en una ley "normal" de demanda..... 106

5.6 Problema de monopolio..... 109

Capítulo 6. Funciones de varias variables

6.1 Introducción. Conceptos fundamentales..... 118

6.2 Derivadas parciales..... 120

6.3 Crecimiento o decrecimiento de una función de varias variables..... 121

6.4 Derivadas parciales de alto orden..... 124

6.5 Interpretación geométrica de las segundas derivadas parciales..... 127

6.6 Diferenciales..... 128

6.7 Diferenciales de funciones de varias variables..... 132

6.8 Derivadas totales..... 134

Pág.

6.9 Derivación parcial implícita..... 137

6.10 Funciones homogéneas..... 140

Capítulo 7. Aplicaciones de la derivada parcial.

7.1 Máximos y mínimos de funciones de dos variables.... 153

7.2 Problema de monopolio múltiple..... 158

7.3 Máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones laterales..... 161

7.4 Función general de demanda..... 169

7.5 Elasticidades cruzadas..... 171

7.6 La función de producción..... 174

7.7 Sustituibilidad de los factores de producción..... 181

7.8 Demanda por factores de producción..... 184

Capítulo 8. Cálculo Integral.

8.1 Integración de funciones de una variable..... 192

8.2 Reglas de integración..... 195

8.3 Integración por partes..... 198

8.4 Integración por fracciones parciales..... 200

8.5 La constante de integración..... 207

8.6 Aplicaciones de la integral indefinida..... 208

Capítulo 9. Integral definida.

9.1 Area bajo una curva..... 219

9.2 La integral definida..... 221

9.3 La integral definida como una suma..... 223

9.4 Propiedades de la integral definida..... 232

9.5 Area entre el eje  $x$  y la curva de  $f(x)$ ..... 233

9.6 Integrales impropios..... 237

9.7 Relación entre el ingreso marginal y el ingreso medio.. 240

9.8 Leyes de crecimiento..... 242

9.9 La fuerza de interés.....246

9.10 Modelo de Domar sobre la deuda pública.....248

**Capítulo 10. Series.**

10.1 Secuencias.....255

10.2 Series.....257

10.3 La serie geométrica.....260

10.4 Decimales periódicos.....262

10.5 El multiplicador.....263

10.6 Regla de L'Hospital.....265

10.7 Criterio de divergencia.....268

10.8 Prueba de comparación.....270

10.9 Prueba del integral.....272

10.10 Prueba de la razón.....276

10.11 Series de términos negativos.....281

10.12 Series alternantes.....282

10.13 Series de potencias.....285

10.14 Desarrollo de funciones en series de potencias....290

10.16 Series de Maclaurin.....292

10.17 Series de Taylor.....294

10.18 Aplicación al Cálculo Integral.....296

**Capítulo 11. Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales.**

11.1 Matrices.....305

11.2 Transformaciones elementales en hileras.....307

11.3 Equivalencia de matrices.....309

11.4 Formas reducidas de una matriz.....310

6.9 Derivación parcial implícita.....137

6.10 Funciones homogéneas.....138

**Capítulo 7. Aplicaciones de la derivada parcial.**

7.1 Máximos y mínimos de funciones de dos variables...139

7.2 Problemas de monopolio múltiple.....139

7.3 Máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones laterales.....141

7.4 Función general de demanda.....143

7.5 Elasticidades cruzadas.....147

7.6 La función de producción.....174

7.7 Sustituibilidad de los factores de producción.....181

7.8 Demanda por factores de producción.....184

**Capítulo 8. Cálculo Integral.**

8.1 Integración de funciones de una variable.....192

8.2 Reglas de integración.....192

8.3 Integración por partes.....198

8.4 Integración por fracciones parciales.....200

8.5 La constante de integración.....207

8.6 Aplicaciones de la integral indefinida.....208

**Capítulo 9. Integral definida.**

9.1 Área bajo una curva.....210

9.2 La integral definida.....221

9.3 La integral definida como una suma.....223

9.4 Propiedades de la integral definida.....232

9.5 Área entre el eje  $x$  y la curva de  $f(x)$ .....233

9.6 Integrales impropias.....237

9.7 Relación entre el ingreso marginal y el ingreso medio...240

9.8 Leyes de crecimiento.....242

9.9 La fuerza de interés..... 246

9.10 Modelo de Domar sobre la deuda pública..... 248

Capítulo 10. Series.

10.1 Secuencias..... 252

10.2 Series..... 257

10.3 La serie geométrica..... 260

10.4 Decimales periódicos..... 262

10.5 El multiplicador..... 263

10.6 Regla de l'Hospital..... 265

10.7 Criterio de divergencia..... 268

10.8 Prueba de comparación..... 270

10.9 Prueba del integral..... 272

10.10 Prueba de la razón..... 276

10.11 Series de términos negativos..... 281

10.12 Series alternantes..... 282

10.13 Series de potencias..... 285

10.14 Desarrollo de funciones en series de potencias..... 290

10.16 Series de Maclaurin..... 290

10.17 Series de Taylor..... 294

10.18 Aplicación al Cálculo Integral..... 296

Capítulo 11. Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales.

11.1 Matrices..... 302

11.2 Transformaciones elementales en hileras..... 307

11.3 Equivalencia de matrices..... 308

11.4 Formas reducidas de una matriz..... 310

Pág.

11.5 Matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales. 314

11.6 Método de Gauss- Jordán..... 316

11.7 Sistemas rectangulares..... 318

11.8 Algebra de matrices..... 322

11.9 Traspuesta de una matriz..... 330

11.10 Matriz simétrica..... 332

11.11 Inversa de una matriz..... 333

**Capítulo 12. Determinantes. Inversa de una Matriz.**

12.1 Determinantes..... 341

12.2 Desarrollo de Laplace..... 347

12.3 Evaluación de determinantes..... 351

12.4 Método de Chio..... 352

12.5 Solución de sistemas de ecuaciones lineales por determinantes..... 354

12.6 Inversa de una matriz por determinantes..... 357

12.7 Demostración de la regla de Cramer..... 362

12.8 Inversa por transformaciones elementales..... 363

12.9 Problemas de optimización..... 367

12.10 Problema de la dieta..... 371

12.11 Problema de producción..... 373

12.12 Problema de transporte..... 374

**Anexo. Respuestas a ejercicios..... 380**