CAPITULO I

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE GEOMETRIA ANALITICA

Introducción. La geometría analítica relaciona el álgebra con la geometría, resolviendo problemas geométricos por métodos algebraicos y utilizando la geometría para resolver ó facilitar la solución de problemas algebraicos.

Desde antes de la era cristiana, los griegos que eran esencialmente geómetras y los árabes que eran algebristas, intercambiaban problemas iniciando de manera informal las relaciones entre el álgebra y la geometría que dieron lugar a la geometría analítica. Sin embargo, hasta el siglo XVII no había sido escrito un tratado formal de la geometría analítica y fué René Descartes el primero que lo hizo, incorporando de esta manera una nueva rama de las matemáticas a las ciencias exactas.

La relación entre conceptos geométricos y conceptos algebraicos permite identificar unos con otros dando lugar a una serie de metáforas que encontraremos desde el principio.

Escala de números reales. Empezaremos por identificar los números reales con los puntos de una línea recta. Consideremos una recta infinita en ambas direcciones y seleccionemos un punto arbitrario que llamaremos origen y le haremos corresponder el número cero. A la derecha y a intervalos iguales hacemos corresponder puntos a números enteros positivos. De la misma manera, hacemos corresponder puntos a la izquierda del origen con números enteros negativos, como indica la figura 1.1.

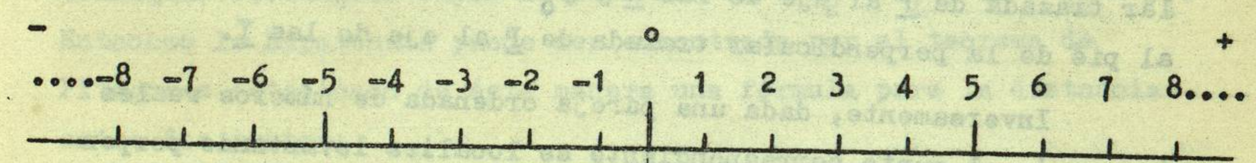


Fig. 1.1

Ahora, cualquier número real, racional ó irracional puede hacerse corresponder a uno y sólo un punto de la recta y viceversa logrando de esta manera una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos de una recta.

1.1 Coordenadas rectangulares. Hemos identificado cada punto de una recta infinita con un número real. Veamos ahora como René Descartes ideó un sistema de referencia para identificar cada punto de un plano infinito con una pareja de números reales y viceversa.

Se trazan dos ejes perpendiculares, uno horizontal y el otro vertical, que llamaremos eje de las X y eje de las Y respectivamente. A la intersección de éstos dos ejes le llamaremos origen y corresponderá al cero de las escalas numéricas sobre cada uno de los ejes como se indica en la figura 1.2.

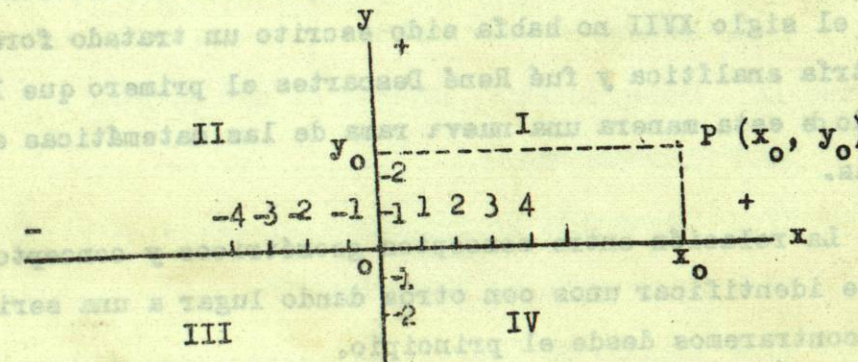


Fig. 1.2

Consideraremos un punto arbitrario P, en el plano. El punto será identificado por una pareja ordenada de números reales (x_0, y_0) en la que x_0 es el número correspondiente al pié de la perpendicular trazada de P al eje de las X y y_0 es el número correspondiente al pié de la perpendicular trazada de P al eje de las Y.

Inversamente, dada una pareja ordenada de números reales (x_0, y_0), el punto correspondiente se localiza levantando perpendiculares en los puntos x_0 y y_0 sobre el eje X y el eje Y respectivamente hasta encontrar su intersección.

El sistema de referencia establecido divide el plano infinito en cuatro cuadrantes que llamaremos I, II, III y IV de acuerdo como se indica en la figura 1.2. Así, el punto P (x_0, y_0) está en el primer cuadrante. A la pareja ordenada de números reales se le llama coordenadas del punto y para cada uno de los números reales que forman la pareja ordenada usaremos la siguiente notación:

x_0 = Abscisa del punto P

y_0 = Ordenada del Punto P

Observación. Cualquier punto del primer cuadrante tiene sus 2 coordenadas positivas. En el segundo cuadrante, la abscisa es negativa y la ordenada es positiva. En el tercer cuadrante, las dos coordenadas son negativas y en el cuarto cuadrante la abscisa es positiva y la ordenada es negativa.

1.2 Distancia entre 2 puntos. Consideremos 2 puntos arbitrarios P y Q que para comodidad situaremos en el primer cuadrante.

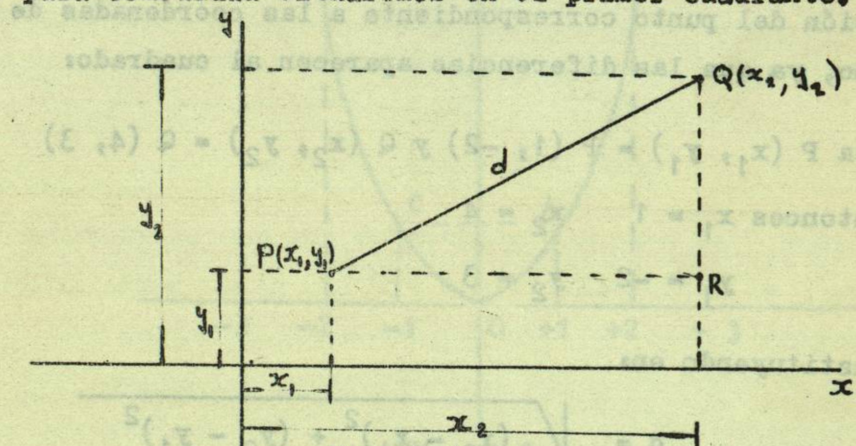


Fig. 1.3

Se trazan las perpendicualres de los puntos P y Q a los ejes, determinando las abscisas y ordenadas de los puntos que, de acuerdo con la definición, corresponden a las distancias marcadas en la figura. Según la construcción geométrica, P Q R es un triángulo rectángulo cuyos catetos son $PR = x_2 - x_1$ y $QR = y_2 - y_1$. Entonces la hipotenusa puede ser encontrada por el teorema de Pitágoras obteniendo de ésta manera una fórmula para la distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo: Encontrar la distancia entre los puntos P (1, -2) y Q (4, 3)

Solución: En problemas de geometría analítica es siempre conveniente dibujar una figura esquemática:

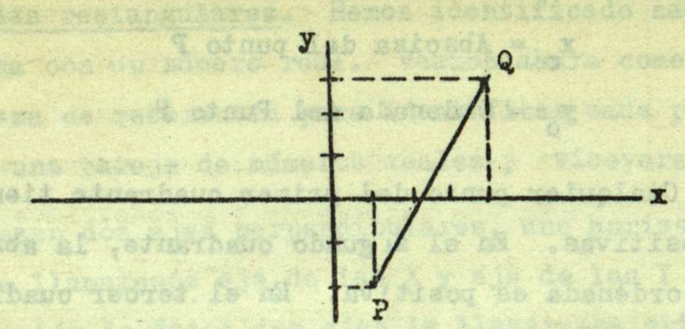


Fig. 1.4

De acuerdo con la fórmula de la distancia, es indiferente la selección del punto correspondiente a las coordenadas de subíndice uno, ya que las diferencias aparecen al cuadrado:

Sea P (x_1, y_1) = P $(1, -2)$ y Q (x_2, y_2) = Q $(4, 3)$

Entonces $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 4$

$y_1 = -2$ $\quad y_2 = 3$

Sustituyendo en:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{9 + 25}$$

$$\underline{d = \sqrt{34}}$$

1.3 Gráficas de ecuaciones. Consideremos ahora la relación entre una ecuación indeterminada con 2 incógnitas y una gráfica en el plano.

Def. La gráfica de una ecuación en x y y es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

Ejemplo. Sea la ecuación indeterminada siguiente:

$$y = 4x^2$$

Esta ecuación tiene una infinidad de soluciones reales porque para cada valor que le demos a x encontramos un correspondiente valor de y para formar una solución. Tabulemos algunas de las soluciones:

Puntos	x	y
O	o	o
A	1	4
B	2	16
C	-1	4
D	-2	16

Dando valores enteros a x encontramos para x = o, y = o. Es decir, el origen es solución de la ecuación. Después para valores a derecha é izquierda encontramos simetría en los valores de y y observamos que crecen a medida que aumentamos x. Graficando los puntos y trazando una curva suave a través de ellos obtenemos la gráfica ó curva correspondiente a la ecuación:

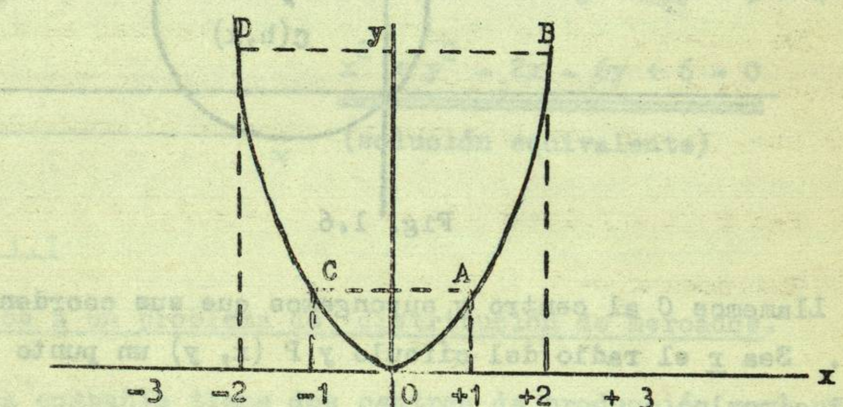


Fig. 1.5

Observación. Aun cuando la ecuación propuesta $y = 4x^2$ tiene una infinidad de soluciones, éstas siguen cierta ley de formación porque para cada valor de x, el valor de y es precisamente cuatro veces el cuadrado de x obteniéndose una curva que contiene una infinidad de puntos ligados por cierta ley de formación, que es la ecuación misma.

Ahora, si se tiene un conjunto de puntos en el plano con ciertas características comunes, es posible encontrar la ecuación de la curva que determinan. Consideremos por ejemplo el círculo:

1.4 Def. Círculo. Es una curva cerrada en el plano cuyos puntos están situados a igual distancia de un punto fijo llamado centro. (A la distancia de los puntos al centro se le llama radio)

En nuestro sistema de referencia, la expresión geométrica de un círculo arbitrario es la siguiente:

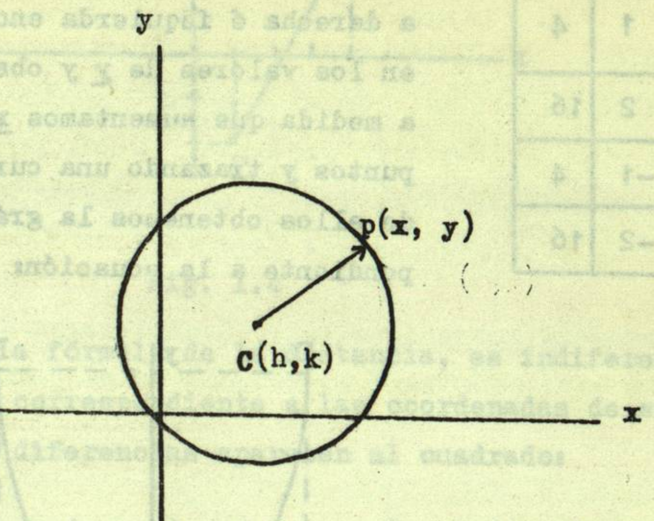


Fig. 1.6

Llamemos C al centro y supongamos que sus coordenadas son (h, k). Sea r el radio del círculo y P (x, y) un punto arbitrario del círculo.

De acuerdo con la definición, la distancia del centro C a cualquier punto debe ser igual a r.

$$CP = r$$

Con la fórmula de la distancia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sea r = d ; C (h, k) ; P (x, y). Sustituyendo:

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

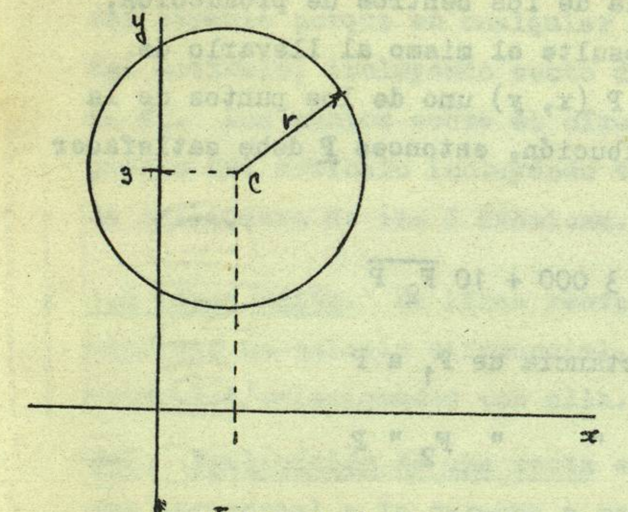
Elevando al cuadrado:

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Hemos encontrado así una expresión algebraica para el círculo, que es una figura geométrica. La ecuación del círculo es entonces:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ejemplo: Encontrar la ecuación del círculo con centro en C (1, 3) y radio r = 2. (fig. 1.7)



$$\overset{h}{}\ \overset{k}{}$$
$$C\ (1,\ 3)\ ;\ r = 2$$

$$\underline{(x - 1)^2 + (x - 3)^2 = 4} \text{ (solución)}$$

ó desarrollando y simplificando:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 4$$

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0}}$$

(solución equivalente)

Fig. 1.7

*1.5 Aplicación a un problema de distribución de mercados.

Problema. Una compañía tiene dos centros de producción para un artículo cuyo precio en ambas fábricas es de \$3,000. La distancia entre los dos centros de producción es de 100 kilómetros y los costos de transporte aéreo por artículo y por kilómetro son \$5 para una fábrica y \$10 para la otra. Determinar las áreas de distribución para cada fábrica de manera que los precios, incluyendo costos de transporte, sean lo más bajo posibles para cualquier lugar.

Solución. Situemos al primer centro de producción F_1 en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y al otro centro de producción F_2 sobre el eje de las x a la derecha de F_1 (fig. 1.8)

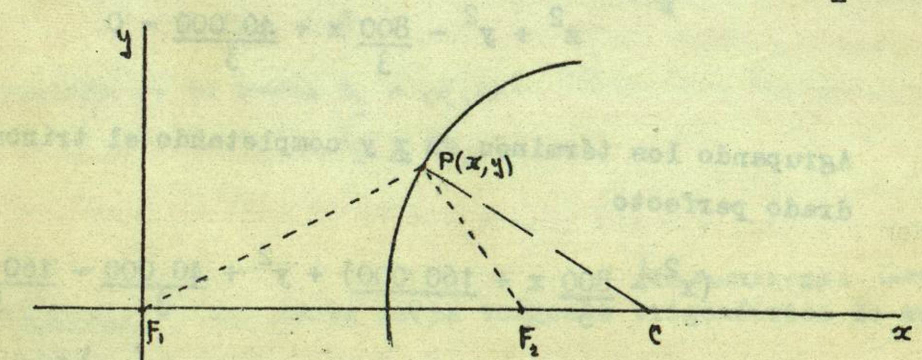


Fig. 1.8

Entonces F_1 tiene coordenadas (0, 0) y F_2 tiene coordenadas (100, 0), tomando un kilómetro como unidad de coordenadas.

Encontremos el límite ó frontera de las 2 zonas cuyos puntos estén situados a una distancia de los centros de producción, tal que el precio del artículo resulte el mismo al llevarlo de cualquiera de las fábricas. Sea P (x, y) uno de los puntos de la frontera de las 2 zonas de distribución, entonces P debe satisfacer la siguiente condición:

$$3\,000 + 5\,\overline{F_1 P} = 3\,000 + 10\,\overline{F_2 P}$$

donde: $\overline{F_1 P}$ = distancia de F_1 a P

$\overline{F_2 P}$ = " " F_2 " P

Entonces, por la fórmula de la distancia:

$$\overline{F_1 P} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

De la misma manera:

$$\overline{F_2 P} = \sqrt{(x - 100)^2 + y^2}$$

Sustituyendo en la condición establecida:

$$5\sqrt{x^2 + y^2} = 10\sqrt{(x - 100)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado:

$$25\,(x^2 + y^2) = 100\,(x^2 - 200x + 10\,000 + y^2)$$

Simplificando: $3x^2 + 3y^2 - 800x + 40{,}000 = 0$

Dividiendo entre 3:

$$x^2 + y^2 - \frac{800}{3}x + \frac{40\,000}{3} = 0$$

Agrupando los términos en x y completando el trinomio cuadrado perfecto

$$\left(x^2 - \frac{800}{3}x + \frac{160\,000}{9}\right) + y^2 + \frac{40\,000}{3} - \frac{160\,000}{9} = 0$$

$$\left(x - \frac{400}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{40\,000}{9} = \left(\frac{200}{3}\right)^2$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro en:

$$C\ \left(\frac{400}{3}, 0\right);\ r = \frac{200}{3}$$

Entonces, la zona de distribución para F_2 es el interior del círculo porque en cualquier punto fuera del círculo, el precio del artículo, incluyendo costo de transporte, es menor si se lleva de F_1. Los puntos sobre el círculo son "neutrales", es decir, el precio del artículo incluyendo transporte, es el mismo si se lleva de cualquiera de las 2 fábricas.

1.6 Línea Recta. La línea recta es un concepto geométrico de gran utilidad en cálculo diferencial, por lo que estudiaremos algunos conceptos relacionados con ella.

Def. Inclinación de una recta es el ángulo que se forma trazando una horizontal a la derecha a partir de un punto cualquiera de la recta y girándola en sentido contrario al giro normal de las manecillas de un reloj hasta encontrar a la recta, como se ilustra en la figura 1.9.

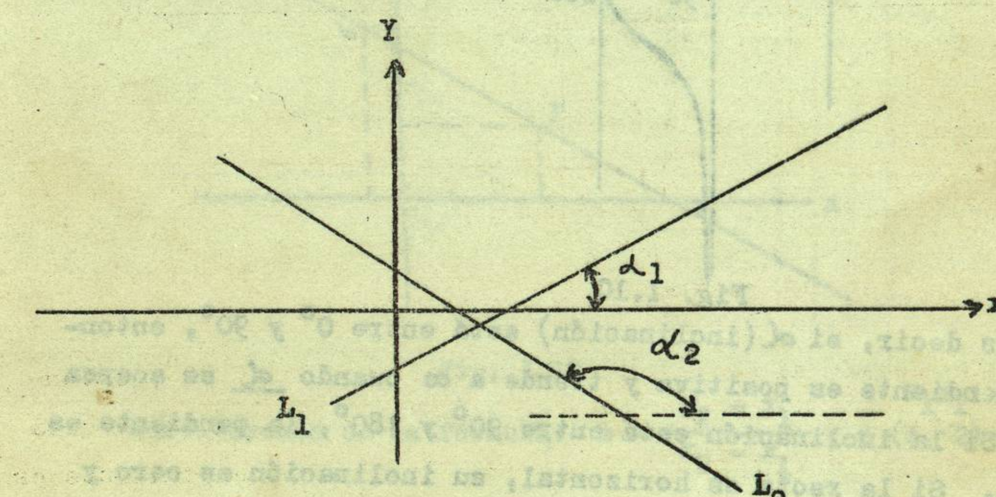


Fig. 1.9

Inclinación de la recta $L_1 = \alpha_1$

" " " " $L_2 = \alpha_2$.

TRIGONOMETRICA Grey.

Def. Pendiente de una recta es la tangente trigométrica de su inclinación.

Llamaremos m a la pendiente de una recta. En la gráfica