una recta, si es horizontal su inclinación es de 0° (por convención)

anterior.

Pendiente de $L_1 = m_1 = \tan \alpha_1$

Pendiente de $L_2 = m_2 = \tan \alpha_2$

Observación. La inclinación de una recta es un ángulo entre 0 y 180 grados. Ahora, la pendiente es la tangente trigométrica de la inclinación y por lo tanto puede tener un valor entre $-\infty$ y $+\infty$ que es la variación de la tangente trigométrica cuando el ángulo toma valores de 0° a 180°. Recordemos la gráfica de tangente de un ángulo α estudiada en trigonometría.

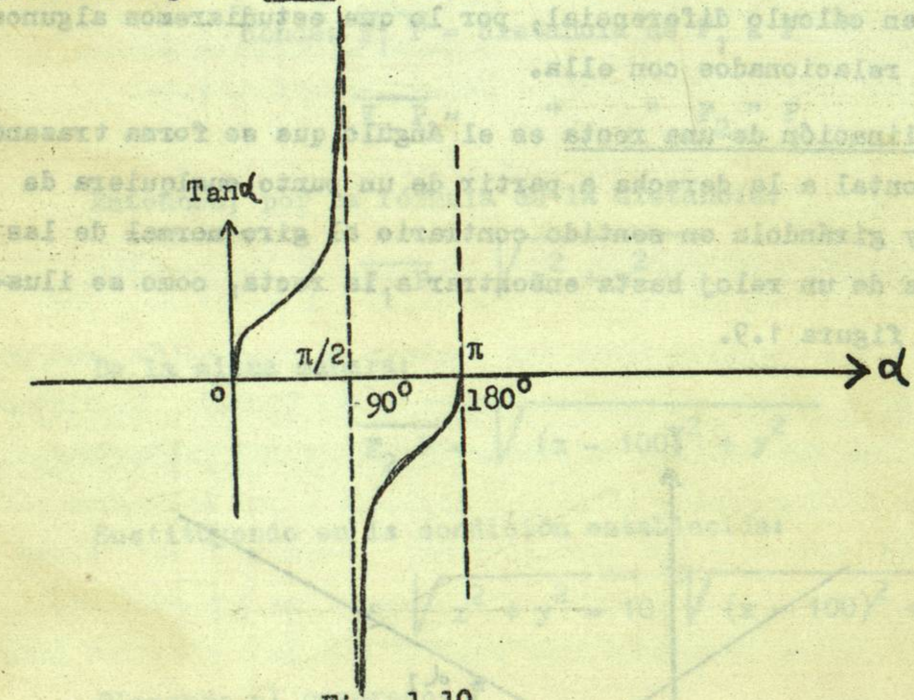

Fig. 1.10

Es decir, si α (inclinación) está entre 0° y 90°, entonces la pendiente es positiva y tiende a ∞ cuando α se acerca a 90°. Si la inclinación está entre 90° y 180°, la pendiente es negativa. Si la recta es horizontal, su inclinación es cero y su pendiente es cero también. Si la recta es vertical, su inclinación es 90° y su pendiente es infinito.

Fórmula de la pendiente. Consideremos la recta L determinada por los puntos P (x_1, y_1) y Q (x_2, y_2) como se indica en la figura 1.11.

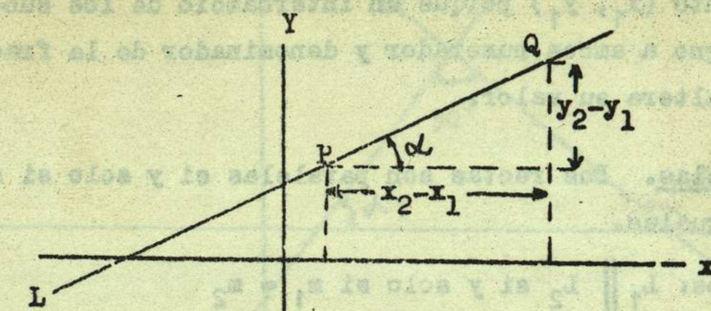

Fig. 1.11

El ángulo α es la inclinación de la recta y por definición de pendiente tenemos:

Pendiente de $L = m = \tan \alpha$

$$\therefore\ m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo: Encontrar la pendiente de la recta que pasa por P (4, 2) y Q (-1, 5). (Fig. 1.12).

Solución.

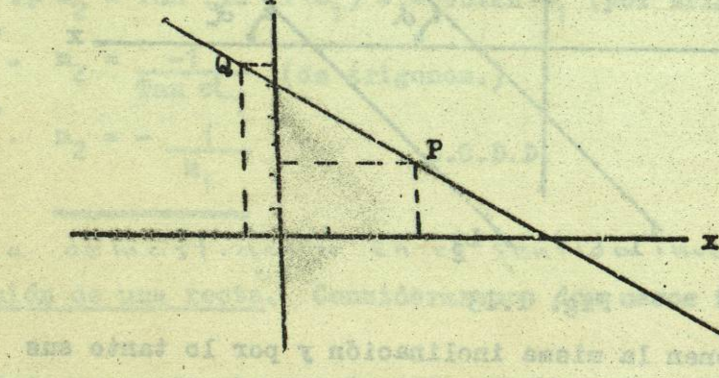

Fig. 1.12

Sustituyendo en la fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; P $(\overset{x_1}{4}, \overset{y_1}{2})$; Q $(\overset{x_2}{-1}, \overset{y_2}{5})$

$$\therefore\ m = \frac{5-2}{-1-4} = \frac{3}{-5}$$

$$m = -\frac{3}{5}$$

Nota: En la fórmula de la pendiente, igual que en la fórmula de la distancia, es indiferente considerar cualquiera de los puntos

P ó Q como el punto (x_1, y_1) porque un intercambio de los sub-índices, cambia signo a ambos numerador y denominador de la fracción lo cual no altera su valor.

<u>1.7 Rectas paralelas.</u> Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.

En símbolos: $L_1 \parallel L_2$ si y solo si $m_1 = m_2$

<u>Demostración.</u> Un teorema de geometría nos dice que si dos rectas son paralelas, entonces tienen ángulos correspondientes iguales al ser cortadas por una transversal.

Supongamos que las dos rectas L_1 y L_2 son paralelas. Entonces tienen ángulos correspondientes iguales con una transversal horizontal como indica la figura 1.13.

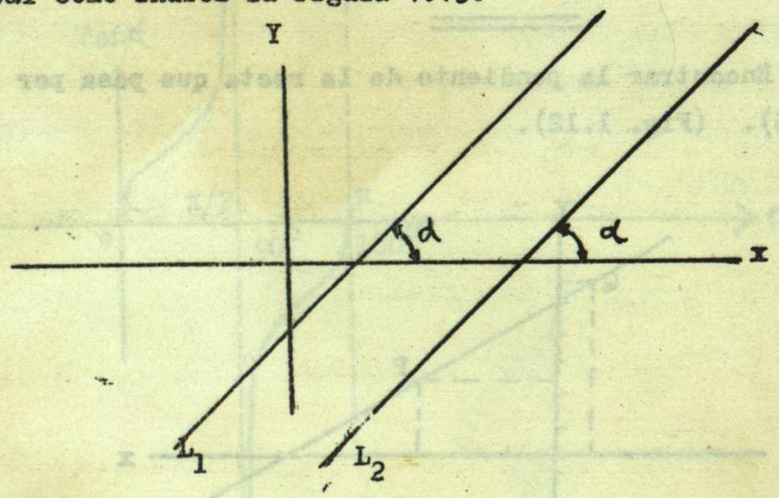

Fig. 1.13

Entonces tienen la misma inclinación y por lo tanto sus pendientes son iguales, es decir: $m_1 = m_2$.

Inversamente, si $m_1 = m_2$, sus inclinaciones son iguales y las rectas son paralelas.

<u>Rectas perpendiculares.</u> Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si la pendiente de una es la recíproca y de signo contrario de la pendiente de la otra.

<u>Demostración.</u> Sean las rectas perpendiculares L_1 y L_2 como indica la figura 1.14.

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

a) Si $L \parallel y$ entonces la ecuación es $x = x_0$

b) Si $L \parallel x$ " " " $y = y_0$

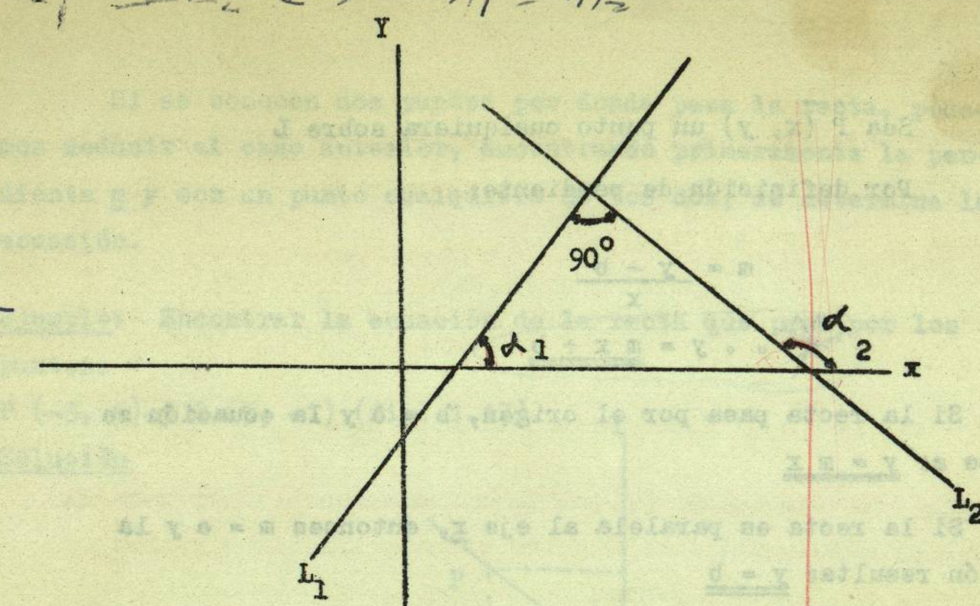

Fig. 1.14

Pendiente de $L_1 = m_1 = \operatorname{Tan} \alpha_1$

Pendiente de $L_2 = m_2 = \operatorname{Tan} \alpha_2$

ahora $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$ (por trigonometría).

$\therefore m_2 = \operatorname{Tan}(90^\circ + \alpha_1) = -\operatorname{Cotan} \alpha_1$ (por trigonom.)

$\therefore m_2 = \dfrac{-1}{\operatorname{Tan} \alpha_1}$ (de trigonom.)

$\therefore m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ L.C.D.D.

La demostración en el sentido inverso es trivial.

<u>1.8 Ecuación de una recta.</u> Consideraremos dos casos fundamentales:

I. Dada su pendiente <u>m</u> y la ordenada al origen <u>b</u> (fig. 1.15)

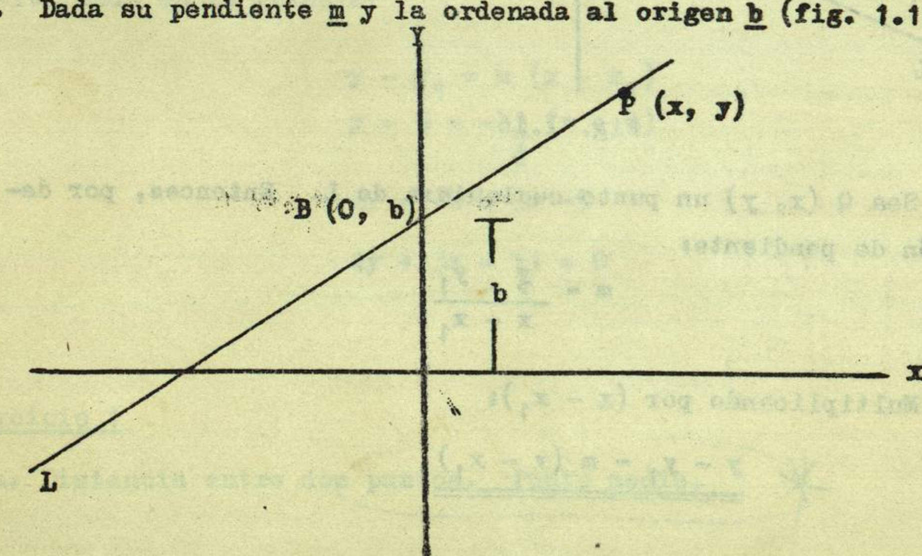

Fig. 1.15

Sea P (x, y) un punto cualquiera sobre L

Por definición de pendiente:

$$m = \frac{y - b}{x}$$

$$\therefore y = m x + b$$

Si la recta pasa por el origen, b = o y la ecuación se reduce a: $y = m x$

Si la recta es paralela al eje x, entonces m = o y la ecuación resulta: $y = b$

Si la recta es paralela al eje y, entonces m no existe. En este caso, la recta es un conjunto de puntos situados a igual distancia, digamos a, del eje Y. Entonces, su ecuación es:

$$x = a$$

II. Dados un punto por donde pasa, digamos P (x_1, y_1) y la pendiente m. (fig. 1.16)

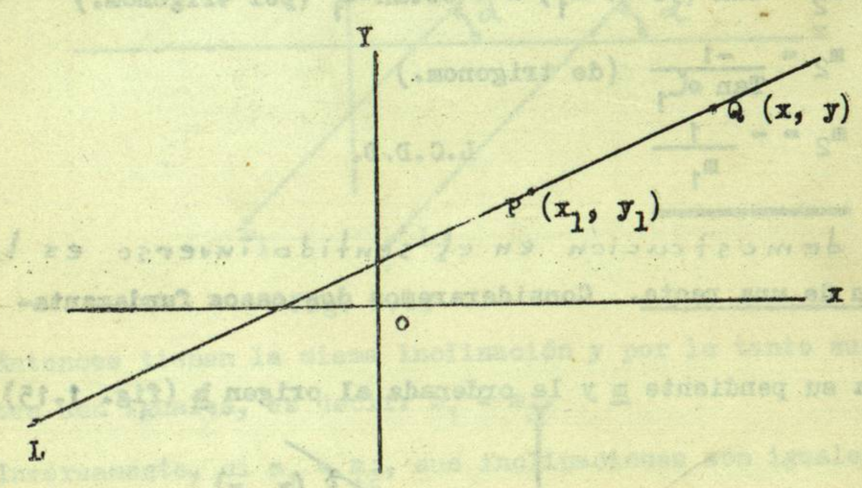

Fig. 1.16

Sea Q (x, y) un punto cualquiera de L. Entonces, por definición de pendiente:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Multiplicando por $(x - x_1)$:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Si se conocen dos puntos por donde pasa la recta, podemos reducir al caso anterior, encontrando primeramente la pendiente m y con un punto cualquiera de los dos, se determina la ecuación.

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

P (−3, 5) y Q (5, −1) (fig. 1.17)

Solución

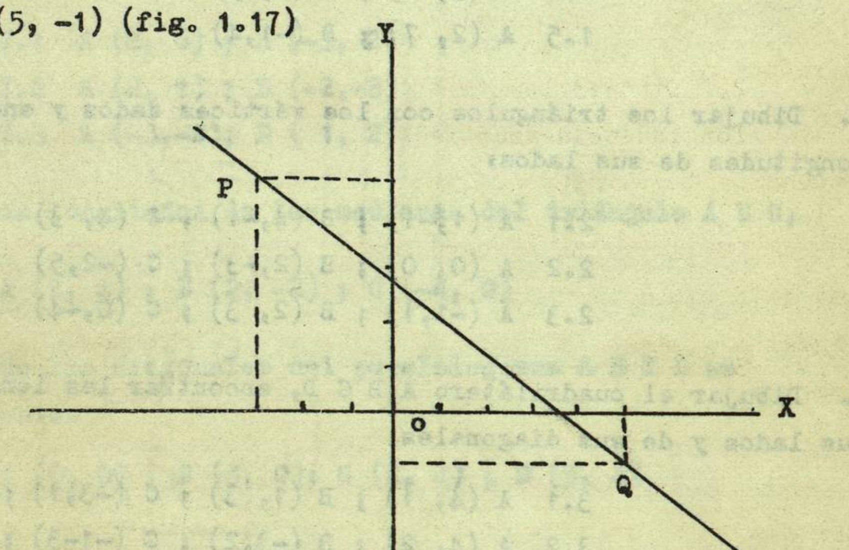

Fig. 1.17

Encontremos la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \overset{x_1}{P} \ (-3,\ \overset{y_1}{5}); \quad Q\ (\overset{x_2}{5},\ \overset{y_2}{-1})$$

$$m = \frac{-1 - 5}{5 + 3} = \frac{-6}{8} \ \therefore -\frac{3}{4}$$

Entonces, tenemos pendiente m = − 3/4 y pasando por P $(\overset{x_1}{-3}, \overset{y_1}{5})$.

Sustituyendo en la fórmula:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 5 = -\frac{3}{4}\,(x + 3)$$

$$4y - 20 = -3x - 9$$

$$4y + 3x - 11 = 0$$

Ejercicio 1

Tema: Distancia entre dos puntos. Punto medio.