8.3 Pasando por el punto medio del segmento A (-7, 2) ; B (3, -4) y perpendicular al mismo segmento AB.

9. Encontrar el punto de intersección de las siguientes rectas. Dibujar en cada caso:

9.1 $x + y = 5$; $2x + 3y = 4$

9.2 $x - 6 = 1$; $x + y = 2$

9.3 $2x - y = -5$; $4x - 2y = 7$

9.4 $7x + 8y = 12$; $2x - 4y = -3$

CAPITULO 2

FUNCIONES Y SUS GRAFICAS.

2.1 Funciones de una variable. Es común encontrar, por observación directa, cosas que varían produciendo cambios en otras siguiendo en algunos casos una ley determinada.

Por ejemplo, la presión atmosférica de un lugar cambia de acuerdo con su posición respecto al nivel del mar. Especificamente la presión atmosférica P disminuye al aumentar la altura sobre el nivel del mar h. Entonces, se dice que la presión atmosférica de un lugar es función de su altura sobre el nivel del mar y en lenguaje matemático lo expresamos de la siguiente manera:

$$P = f(h)$$

En economía, la cantidad demandada por un artículo disminuye cuando el precio del artículo aumenta. Esto es lo que sucede en el caso "normal". En general, se observa una relación entre los cambios del precio y los de la cantidad demandada. Entonces, decimos que la cantidad demandada x es función del precio P y lo expresamos de la siguiente manera:

$$x = f(P)$$

Llamaremos a P la variable independiente y a x la variable dependiente de la función f.

Los ejemplos anteriores dan una idea clara de lo que es una función. Sin embargo, es conveniente formalizar las definiciones de los conceptos envueltos.

Def. Una variable es un símbolo que representa una cantidad que puede cambiar. Al conjunto de valores que puede tomar la variable, le llamaremos dominio de definición de la variable.

Def. Una <u>constante</u> es una cantidad que permanece fija en un problema determinado.

Def. Una <u>función</u> es una relación que asigna uno o más valores a una variable dependiente, cuando la variable independiente toma un determinado valor de su dominio de definición. Al dominio de definición de la variable independiente se le llama <u>dominio de la función</u> y al conjunto de valores que toma la variable dependiente al dar a la variable independiente los valores del dominio, se le llama <u>co-dominio de la función</u>.

El concepto de función puede ser interpretado como una transformación de los elementos de un conjunto llamado dominio en los elementos de otro conjunto llamado co-dominio. La figura 2.1 ilustra esquemáticamente esta interpretación.

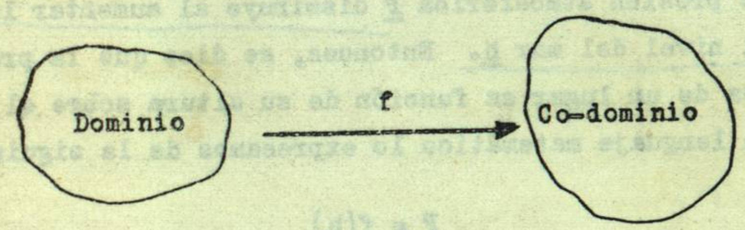

Fig. 2.1

Si el dominio y el co-dominio de una función están contenidos en el conjunto de los números reales, entonces se dice que la función es de variable real. Limitaremos este curso al estudio de funciones de variable real.

<u>Ejemplos</u>. Determinar el dominio y el co-dominio de las siguientes funciones de variables reales:

1. $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$

<u>Solución</u>: Dominio: Todos los números reales (valores que puede tomar el ángulo $\underline{x}$, en radianes).

Co-dominio: el conjunto de los números reales comprendidos entre menos tres y mas tres. (Valores que toma la función al asignar a $\underline{x}$ los valores del dominio).

2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x-1}$

<u>Solución</u>: Dominio: Todos los números reales excepto el 1, porque

para $x = 1$ la función no está definida.

Co-dominio: Todos los números reales.

3. $f(x) = x^2$

Dominio: Todos los números reales, excepto el 5.

Co-dominio: Los números reales no negativos.

<u>Función inversa</u>. En la función $y = f(x)$, decimos que $\underline{x}$ es la variable independiente mientras que $\underline{y}$ es la variable dependiente. Ahora, cuando sea posible despejar $\underline{x}$ con ayuda de transformaciones matemáticas, entonces encontraremos lo que se llama la función inversa $\underline{g}$ de $\underline{f}$:

$$x = g(y)$$

En la función inversa, $\underline{y}$ es la variable independiente y $\underline{x}$ se transforma en la variable dependiente.

<u>Ejemplo</u>: Sea la función: $\underset{\text{DEP}}{y} = 2\underset{\text{IND}}{x} + 4$. Despejando $\underline{x}$ encontramos la función inversa:

$$2x = y - 4$$

$$\underset{\text{DEP}}{x} = 0.5\,\underset{\text{IND}}{y} - 2$$

<u>2.2 Funciones de varias variables</u>. El número de variables independientes que determinan el valor de la variable dependiente puede ser mayor que uno, en cuyo caso se tiene una función de varias variables. Por ejemplo, el capital acumulado de una inversión a interés simple anual depende del capital inicial <u>Co</u>, de la tasa de interés $\underline{r}$ y del tiempo transcurrido desde el momento de hacer la inversión t. Si llamamos C_t al capital acumulado después de $\underline{t}$ años, se tiene:

$$C_t = f(Co, r, t)$$

Variable dependiente = C_t

Variables independientes: 1. Co
2. r
3. t

<u>Observación</u>: No siempre es posible obtener una expresión matemática exacta que describa la relación entre ciertas variables. En

algunos casos, es necesario tabular explícitamente los valores de la variable independiente con los correspondientes valores de la variable dependiente. En éstos casos, que son comunes en estadística, la expresión que representa a la función es una tabla de valores. Siempre es deseable obtener una ley matemática a la tabla de valores aunque sea de manera aproximada, reduciendo los errores al mínimo. Una de las finalidades de la estadística es precisamente encontrar funciones aproximadas para un conjunto de datos empíricos con el propósito de hacer proyecciones futuras y facilitar el análisis matemático de la relación entre las variables consideradas.

2.3 Clasificación de las funciones. Una de las finalidades fundamentales del cálculo infinitesimal, es el estudio de las funciones. Para facilitar dicho estudio, es muy conveniente clasificar las funciones de acuerdo con su expresión matemática. En la siguiente tabla se presenta la clasificación de las funciones de una variable en funciones algebraicas y funciones trascendentes, con algunos ejemplos. Las funciones algebraicas son las que tienen una expresión puramente algebraica, es decir, contienen a la variable envuelta en operaciones algebraicas, (suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces). Las funciones trascendentes son todas las que no son algebraicas.

Funciones de una variable $y=f(x)$

Algebraicas

1. Constante: $f(x) = c$
2. Polinomial: $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$
   a) Lineal : $f(x) = a_0 + a_1 x$
   b) Cuadrática: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
3. Racional: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
   $P(x)$, $Q(x)$: Polinomios

Trascendentes. — Ejemplos

1. Trigonométricas .... $g(x) = \operatorname{sen} x$
2. Exponenciales .... $g(x) = 4^{2x}$
3. Logarítmicas........................ $g(x) = \ln x$
   etcétera.

2.4 Gráficas de funciones. Una función de una variable $y = f(x)$ puede ser considerada como una ecuación indeterminada en x y y, es decir, una ecuación con una infinidad de soluciones. Entonces, la gráfica de una función es la curva de la ecuación correspondiente. Hemos visto en geometría analítica un método para graficar ecuaciones que corresponde al siguiente proceso sistemático:

1. Hacer una tabla de valores dando a la variable independiente valores de su dominio, de la siguiente manera:

   a) Primero se le da el valor cero y valores enteros positivos hasta que se defina el comportamiento de la variable dependiente.
   b) Después se dan valores negativos enteros hasta que se defina la función a la izquierda del origen.
   c) Si hay duda del comportamiento de la función entre 2 enteros, se dan valores fraccionarios en ese intervalo a la variable independiente.

   Si alguno de los valores considerados no están en el dominio de la función, se excluyen de la tabulación.

2. Se sitúan en un sistema de coordenadas los puntos correspondientes a las parejas ordenadas de números reales que aparecen en la tabla.

3. Se traza una curva suave a través de los puntos determinados para obtener la gráfica de la función.

Ejemplo. Hacer una gráfica esquemática de la función:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 4$$

Solución. El dominio de la función es el conjunto de los números reales, es decir x puede tomar valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Empecemos con la tabulación.

x	f(x)
0	4
1	4
2	8
3	22
4	42
−1	2
−2	−8
−3	−32
−4	−76

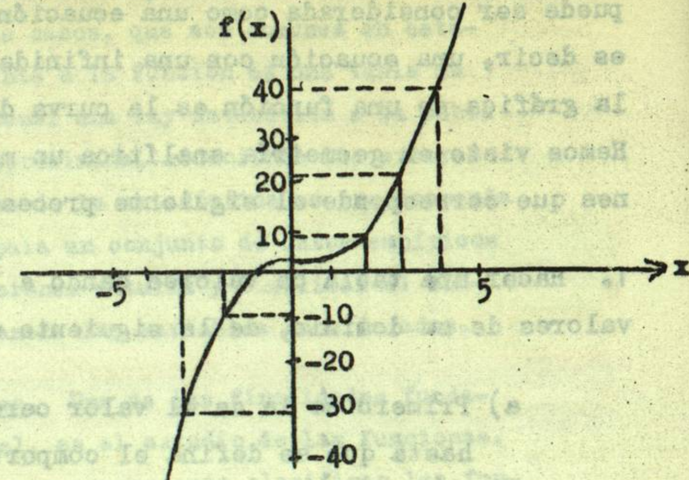

Fig. 2.2

$f(x) = x^3 + 2x + 4$

El comportamiento de la función es incierto (de la tabla) en el intervalo de $x = -1$ a $x = +1$. Consideremos valores de x en ese intervalo:

x	f (x)
−1/2	$29/8 \approx 3.6$
1/2	$31/8 \approx 3.9$

Ahora, situando los puntos correspondientes y trazando una curva suave a través de ellos se obtiene la gráfica de la función (fig. 2.2.)

De este ejemplo, se deduce que no es posible obtener una descripción gráfica exacta de la función por este procedimiento. En el intervalo $0 < x < 1$ no sabemos cual es el valor mínimo de f (x) y si seguimos dando valores a x entre 0 y 1, posiblemente podríamos encontrar aproximadamente la posición del punto mínimo que está en el intervalo y que es importante en la gráfica de f (x). Posteriormente veremos como el cálculo diferencial es de gran utilidad para graficar funciones.

Funciones en Teoría Económica. En economía se estudian relaciones entre cantidades variables como son precios, ingresos, costos, tasas de interés, etc. Cuando la relación entre un conjunto de variables económicas puede ser expresada por una ley matemática, se obtiene lo que se llama una relación funcional que facilita notablemente el análisis de los problemas económicos

en los que intervienen las variables. Sin embargo, generalmente es prácticamente imposible obtener una ley matemática rígida que describa exactamente un fenómeno económico, porque hay variables económicas que son muy difíciles de medir y hay que conformarse con estimaciones que en muchos casos son discutibles. Por otra parte, hay conceptos económicos que no pueden ser precisados de manera específica como el concepto de "utilidad" o "satisfacción". Es entonces muy importante tener plena conciencia de las limitaciones que tienen las expresiones matemáticas de fenómenos económicos. Sin embargo, la herramienta matemática ha demostrado ser un recurso magnífico no sólo para el análisis de problemas económicos determinados, sino para la mejor comprensión de los conceptos fundamentales de la teoría económica.

2.5 Funciones de demanda. Consideremos un artículo en un mercado de competencia pura. En general, la cantidad demandada por el artículo depende de varias variables como son el precio del artículo, el precio de los demás artículos en el mercado, los gustos de los consumidores, etc. Si tomamos en cuenta todas las variables que determinan la cantidad demandada, obtenemos una función muy complicada en la que intervienen variables independientes que influyen muy poco en el valor de la cantidad demandada. Entonces, despreciamos las variables que podríamos llamar secundarias para obtener una función simplificada de demanda, considerando que la cantidad demandada depende únicamente del precio del artículo. Para justificar la eliminación de las demás variables, limitaremos la función a un instante dado o a un intervalo de tiempo tal que las variables pueden ser consideradas constantes. De esta manera obtenemos lo que se llama una función de demanda estática. $x = f(p)$.

$f(Q) = P$

Una de las leyes básicas de economía dice que la cantidad demandada disminuye cuando el precio aumenta. Entonces, las posibles formas funcionales entre estas 2 variables deben satisfacer ésta ley. Consideremos algunos ejemplos de formas posibles de funciones de demanda estática. Las gráficas se limitan al primer cuadrante, es