El valor de g (x) en X = 7 es:

$$g(7) = \frac{7-7}{\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \frac{0}{0} \quad \text{(indeterminado)}$$

Aplicando límites:

$$\lim_{x \to 7} g(x) = \lim_{x \to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3}}$$

Multiplicando numerador y denominador por $(\sqrt{x-4}+\sqrt{3}) \neq 0$ para racionalizar:

$$\lim_{x \to 7} g(x) = \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)(\sqrt{x-4}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x-4}-\sqrt{3})(\sqrt{x-4}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)(\sqrt{x-4}+\sqrt{3})}{x-4-3}$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)(\sqrt{x-4}+\sqrt{3})}{(x-7)} \;;\; (x-7) \neq 0$$

$$= \lim_{x \to 7} (\sqrt{x-4}+\sqrt{3})$$

$$= \sqrt{3}+\sqrt{3} = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$$

<u>Regla</u>. Para eliminar la indeterminación $\frac{0}{0}$ en una función en la que el numerador o el denominador contiene radicales, se racionaliza la parte irracional en el límite de la función y se simplifica el resultado.

<u>Caso 3</u>. Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ en una fracción polinomial.

$$\text{Sea:} \quad f(x) = \frac{x^2-3}{x^3-2x+8}$$

El valor de F (x) en x = ∞ no existe. El límite de f (x) cuando tiende <u>x</u> a infinito es:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{(indeterminado)}$$

Dividiendo entre x^3 el numerador y denominador:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3}} = \frac{0}{1} = \underline{0}$$

<u>Regla</u>. Para eliminar la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en el límite de una función algebraica racional, se divide entre la mayor potencia de la variable <u>x</u> que esté en numerador o denominador y se evalúa el resultado.

Las formas indeterminadas que acabamos de discutir son de gran utilidad para el cálculo de derivadas y reglas de derivación que veremos en el cálculo diferencial. Formas indeterminadas mas complicadas pueden ser evaluadas por la <u>regla de L'Hospital</u> cuya demostración se basa en conceptos avanzados de cálculo y será considerada después.

<u>3.7 Derivada de una función.</u>

<u>Introducción</u>: El objetivo principal del cálculo diferencial es el estudio de la variación de una función <u>f (x)</u> al variar la variable independiente <u>x</u>. El cálculo diferencial establece técnicas para encontrar una medida de variación de una función. Esta medida de variación, que llamaremos la derivada de la función, es de gran utilidad en las aplicaciones como veremos mas adelante.

Los inventores del cálculo infinitesimal fueron Isaac Newton y Gottfried W. Leibnitz en el siglo XVII. Newton desarrolló el cálculo diferencial bajo el nombre de teoría de las fluxiones y publicó su primera obra sobre cálculo en 1687. Por otra parte, Leibnitz publicó sus descubrimientos del cálculo infinitesimal en 1684.

<u>Incrementos</u>. El incremento de una variable <u>x</u> es el cambio que experimenta <u>x</u> al pasar de un valor x_1 a otro valor x_2 de su dominio de definición. Lamaremos Δx (delta x) al incremento de <u>x</u>. De acuerdo con la definición:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

El valor de x puede ser positivo o negativo de acuerdo con los valores de $\underline{x_1}$ y $\underline{x_2}$

Ejemplos:

1. Cuando x cambia de $x = 3$ a $x = 8$, entonces:

$$x_1 = 3 \; ; \; x_2 = 8, \text{ entonces:}$$

$$\therefore \Delta x = 8 - 3 = \underline{5}$$

2. Cuando x cambia de $x = 1$ a $x = -2$, entonces:

$$x_1 = 1 \text{ y } x_2 = -2$$

$$\therefore \Delta x = x_2 - x_1 = -2 - 1 = \underline{-3}$$

Incremento de una función f (x). Si a la variable independiente se le aplica un incremento Δx, entonces la función f (x) recibe también un incremento $\Delta f(x)$ que es igual a $f(x + \Delta x) - f(x)$ siendo x el valor inicial a partir del cual se aplica el incremento a la variable independiente. La siguiente gráfica ilustra el incremento de una función correspondiente a un incremento de la variable independiente: (Fig. 3.6)

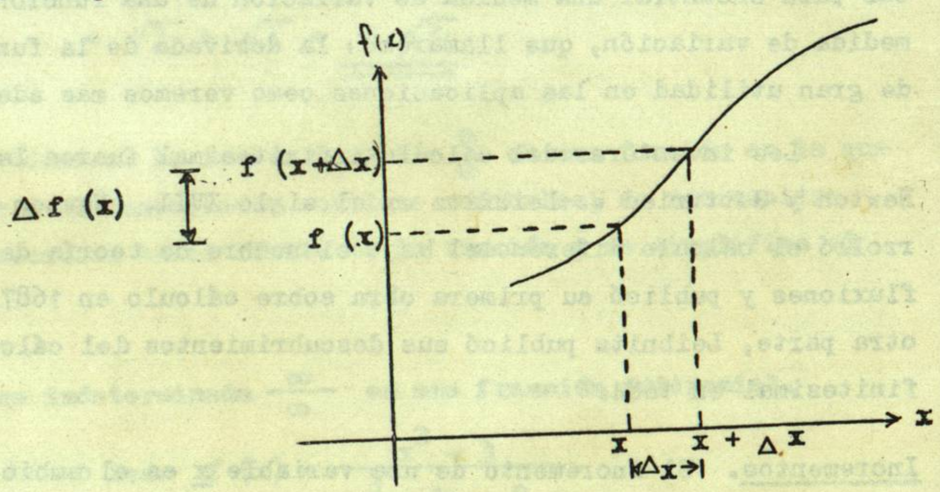

Fig. 3.6

De la gráfica se deduce inmediatamente:

$$\underline{\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

Hemos encontrado una fórmula general para encontrar el incremento de la función para un incremento dado de la variable independiente. Desde luego, $\Delta f(x)$ puede ser positivo o negativo de acuerdo con el valor de Δx y la forma de la curva de la función en el intervalo considerado.

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Encontrar la expresión general para $\Delta f(x)$ y calcular su valor cuando x cambia de $x = 1$ a $x = 3$.

Solución:

a) Expresión general para $\Delta f(x)$

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Ahora: $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 4$

$$= x^2 + 2x\,\Delta x + \overline{\Delta x}^2 - 3x - 3\Delta x + 4$$

$$\therefore f(x + \Delta x) = x^2 - 3x + 4 + 2x\,\Delta x - 3\Delta x + \overline{\Delta x}^2$$

$$- \; f(x) = - x^2 + 3x - 4$$

$$\therefore \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \underline{2x\,\Delta x - 3\,\Delta x + \overline{\Delta x}^2}$$

b) Si x cambia de $x = 1$ a $x = 3$:

$$x_1 = 1 \; ; \; x_2 = 3$$

$$\Delta x = 3 - 1 = 2$$

Sustituyendo en $\Delta f(x)$:

$$\Delta f(x) = 2(1)(2) - 3(2) + (2)^2$$

$$= 4 - 6 + 4$$

$$= \underline{2}$$

Derivada. La derivada de una función con respecto a la variable independiente es la razón de cambio instántanea de la función con respecto a la variable independiente. En otras palabras, la derivada es el límite del cociente de los incrementos de la función y la variable independiente cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero.

En símbolos, sea $y = f(x)$. Entonces la derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$ es:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = f_x(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(diferentes notaciones para denotar la derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$)

Hemos encontrado que:

$\Delta f(x) = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La derivada así definida es una medida de variación instantánea de la variable dependiente $\underline{y}$ con respecto a la variable independiente $\underline{x}$. Es importante observar que la existencia del límite envuelto, en todo caso, es una propiedad local de la función en el valor considerado de la variable independiente $\underline{x}$. Si la derivada existe en un punto $x = x_0$, se dice que la función es derivable en este punto. Si una función es derivable en todos los puntos de un intervalo $a \leq x \leq b$, entonces se dice que la función es derivable en el intervalo.

Interpretación geométrica de la derivada. De acuerdo con su definición, la derivada de una función $f(x)$ es otra función $f'(x)$, cuyo dominio es el conjunto de valores de $\underline{x}$ para los cuales la derivada existe. Para entender el significado geométrico del valor de la derivada en un punto de la curva de la función $f(x)$, recordemos la definición de tangente a una curva en un punto dado:

Def. Supongamos que la curva de la función $y = f(x)$ es la de la figura 3.7:

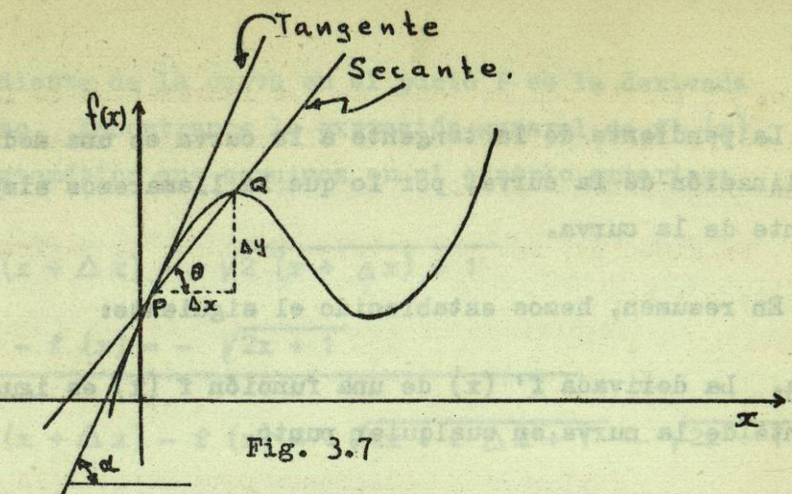

Fig. 3.7

Consideremos la línea secante $\underline{S}$ que pasa por los puntos $P(x, y)$ y $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Si mantenemos fijo el punto P y giramos sobre él la secante $\underline{S}$ de manera que el punto Q tienda al punto P, entonces la posición límite de la recta secante S es la tangente a la curva en el punto P.

Examinemos ahora el significado geométrico de la derivada. El cociente de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la tangente trigonométrica de la inclinación de la secante $\underline{S}$, es decir, es la pendiente de la recta S. De la figura:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \theta = m_s$$

Ahora, la derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$ es el límite del cociente de los incrementos cuando Δx tiende a cero:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Cuando Δx tiende a cero, el punto Q tiende al punto P y por lo tanto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a la tangente trigonométrica de la inclinación de la tangente T, es decir, a la pendiente de la recta tangente en el punto P. De la figura:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha = m_T$$

Entonces, la derivada de una función es la pendiente de la tangente a la curva en cualquier punto donde la función sea derivable.