La pendiente de la tangente a la curva es una medida de la inclinación de la curva, por lo que la llamaremos simplemente pendiente de la curva.

En resumen, hemos establecido el siguiente:

Teorema. La derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$ es igual a la pendiente de la curva en cualquier punto.

Ejemplos. 1. A partir de la definición, encontrar la derivada de la función:

$$f(x) = x^2 + 8x + 2$$

Solución: Por definición, tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ahora:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 8(x+\Delta x) + 2$$
$$f(x+\Delta x) = x^2 + 2x\,\Delta x + \overline{\Delta x}^2 + 8\,\Delta x + 8x + 2$$
$$-f(x) = -x^2 \qquad\qquad -8x - 2$$
$$\therefore f(x+\Delta x) - f(x) = 2x\,\Delta x + \overline{\Delta x}^2 + 8\,\Delta x$$

Dividiendo esta ecuación entre Δx:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 8$$

Aplicando límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 8) = 2x + 8$$

Entonces:

$$\underline{f'(x) = 2x + 8}$$

Ejemplo 2. Encontrar la pendiente de la curva de la función siguiente en el punto $P(4, 3)$:

$$f(x) = \sqrt{2x+1}$$

Solución. La pendiente de la curva en el punto P es la derivada $f'(x)$ en ese punto. Encontremos la expresión general de $f'(x)$ por el proceso sistemático que seguimos en el ejemplo anterior:

$$f(x+\Delta x) = \sqrt{2(x+\Delta x)+1}$$
$$-f(x) = -\sqrt{2x+1}$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{2x + 2\,\Delta x + 1} - \sqrt{2x+1}$$

Dividiendo entre Δx:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2x + 2\Delta x + 1} - \sqrt{2x+1}}{\Delta x}$$

Aplicando límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2x + 2\Delta x + 1} - \sqrt{2x+1}}{\Delta x}$$
$$= \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x+1}}{0} = \frac{0}{0}$$

(Indeterminado).

Para eliminar la indeterminación, racionalizamos el numerador, multiplicando numerador y denominador por: $\sqrt{2x + 2\Delta x + 1} + \sqrt{2x+1}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{2x+2\Delta x+1} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{2x+2\Delta x+1} + \sqrt{2x+1})}{\Delta x(\sqrt{2x+2\Delta x+1} + \sqrt{2x+1})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + 2\Delta x + 1 - 2x - 1}{\Delta x(\sqrt{2x+2\Delta x+1} + \sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cancel{\Delta x}}{(\sqrt{2x+2\Delta x+1} + \sqrt{2x+1})\cancel{\Delta x}} = \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \quad \therefore \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

En el punto $P(4, 3)$ tenemos: $f'(4) = \dfrac{1}{\sqrt{8+1}} = \dfrac{1}{3}$

$\cancel{\sqrt{2x+1}}$

$\frac{1}{3}($

Es decir, la pendiente a la curva en el punto P (4, 3) es igual a $\frac{1}{3}$.

Observación. Este último ejemplo da una idea de lo laborioso y en muchos casos complicado que resulta encontrar la derivada aplicando directamente la definición. Para simplificar lo más posible este trabajo, aprovecharemos la clasificación de las funciones para establecer reglas generales de derivación que serán de gran utilidad para el cálculo de derivadas.

Ejercicio 7.

Tema: Secuencias, Límites y Continuidad.

1. Encontrar los primeros cinco términos de las secuencias dadas por las siguientes funciones definidas sobre enteros positivos. Describir el comportamiento de los términos de la secuencia.

1.1 $f(n) = \frac{1}{n}$

1.2 $f(n) = n(n + 1)$

1.3 $f(n) = 2n - 3$

1.4 $f(n) = -n^3$

1.5 $f(n) = \frac{n + 1}{n}$

1.6 $f(n) = 1 + \frac{1}{n^2}$

2. Consideremos la función $y = \frac{1}{x + 4}$, dónde $x = \frac{1}{n + 1}$; n: entero positivo. Encontrar los primeros 5 términos de la secuencia definida por y.

3. Aplicando los teoremas de límites, evaluar las siguientes expresiones:

3.1 $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 4)$

3.2 $\lim\limits_{x \to 1} (x - 8)^2$

3.3 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 1}$

3.4 $\lim\limits_{x \to \infty} (3x - 2)$

3.5 $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^3 - 3x - 10}$

3.6 $\lim\limits_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^2 + x - 5}$

ojo !!!

4. Graficar y encontrar el dominio y co-dominio de las siguientes funciones. Determinar para que valores de x la función es discontínua:

4.1 $f(x) = 2x + 3$

4.2 $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 4}$ $\longrightarrow$ $x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 4 \to x = 2$, $x = \pm 2$

4.3 $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 1}$ $\qquad \frac{x+4}{x^2-4}$

4.4 $f(x) = \frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x - 1}$

x	$f(x)$
0	-1
1	-5/3
1.5	-3.17
→2	→∞
3	1.4
4	2/3
∞	0
-1	-1
-2	-∞
-3	0.2
→-∞	0

5. Graficar la función $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$. Como debe definirse esta función en x = 3 para qué sea contínua en todo x real.

$\frac{x+4}{x^2-4} \quad \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1}$

Ejercicio 8.

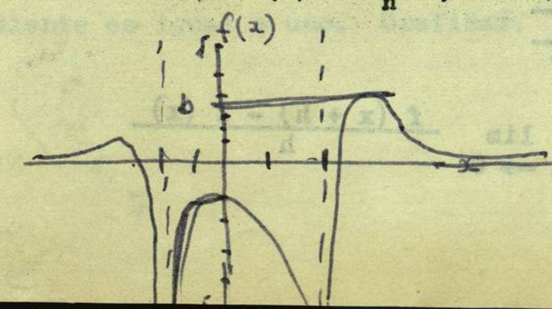
Tema: Límites y continuidad.

1. Encontrar los límites de las siguientes secuencias: (Encontrar los primeros 4 términos).

1.1 $f(n) = \frac{1}{2n}$; n = 1, 2, 3. ....

1.2 $f(n) = -\frac{1}{3n}$; n = 1, 2, 3, ...

1.3 $f(n) = \frac{n + 2}{n}$; n = 1, 2, 3, ...



Co = Reales mayores -∞ ≤ b

Do = Reales salvo $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

1.4 $f(n) = \frac{1}{1 + n^2}$; $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

1.5 $f(n) = \begin{cases} 1, \text{ si } n \text{ es impar} \\ 2, \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$ $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

1.6 $f(n) = 5$ si $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

2. Aplicando los teoremas de límites, encontrar:

2.1 $\lim\limits_{n \to \infty} (2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})$

2.2 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x - 6}$

2.3 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{x^2 h + 3xh^2 + h^3}{2xh + 5h^2}$

2.4 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

2.5 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x - 3}{x+5}$

2.6 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x + 5}$

2.7 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 3x + 4}$

2.8 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots x\, a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + b_n x^n}$

2.9 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

2.10 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h}$

2.11 $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x - 3}{\frac{1}{x} - \frac{3}{x+6}}$

3. Si $f(x) = x^2$, encontrar: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

Ejercicio 9.

Tema: Derivada, a partir de la definición.

1. Encontrar la derivada por el proceso delta:

1.1 $y = 3x + 4$

1.2 $y = 2x^2 + 1$

1.3 $y = x^2 - 3x + 4$

1.4 $y = x^3 - 2x + 8$

1.5 $y = x^3 - x^2 + 1$

1.6 $y = \frac{2}{x^2 - 2}$

1.7 $y = \frac{x^2}{(1 - x^2)}$

1.8 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

1.9 $y = \sqrt{x + 2}$

1.10 $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$

1.11 $f(x) = ax^2 + bx + c$

1.12 $f(t) = \frac{1}{t}$

1.13 $f(t) = (t - 4)^3$

1.14 $f(x) = (x - 4)(x + 4)$

1.15 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 8}}$

2. Encontrar la pendiente a la curva en el punto cuya abcisa se indica: (Graficar).

2.1 $y = 2x^2 - 1$; $x = 2$

2.2 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$; $x = 3$

2.3 $y = \frac{2}{x - 1}$; $x = 2$

2.4 $y = \sqrt{2x - 1}$; $x = 1$

3. Encontrar el punto de la curva $y = x^2 - 3x$ en el que la pendiente es igual a uno. Graficar.

4. Hallar los puntos sobre la curva $y = x^3 + 1$ donde la tangente a la curva es paralela a la recta $y = 3x$. Graficar.

5. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ en el punto cuya abcisa es $x = 2$. Graficar.

$f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ $\quad x = 2 \quad P(2,8)$

$2(2)^2 - 3(2) + 6 = 8 \rightarrow (y)$

$\frac{dy}{dx} = m = 4x - 3$

$x = \rightarrow 2$

$4(2) - 3 = 5$

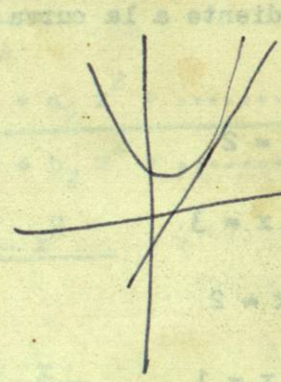
$m = 5$; $P(2,8)$

Ecuación Recta = $y - 8 = 5(x - 2)$

$y - 8 = 5x - 10$

Ecuac Tang. de : $y - 5x + 2 = 0$

x	$f(x)$
0	6
1	4
2	8
3	15



$y = x^3 + 1$

$T \parallel y = 3x$ (L)

$m_L = 3$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$m_T = f'(x) = 3x^2$

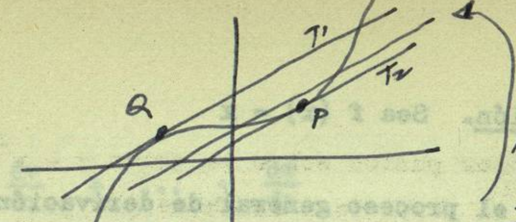
$3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$x = 1$; $y = 2$ $\quad (P(1,2))$

$x = -1$; $y = -1 + 1 = 0$ $\quad Q(-1,0)$



x	y
0	0
2	6

CAPITULO 4

REGLAS PARA DERIVAR.

x	y
-2	-7
-1	0
0	1
1	2

4.1 Reglas para Derivar Funciones Algebraicas. Del proceso general para obtener la derivada de una función a partir de la definición, deduciremos reglas para la derivación de formas funcionales que son importantes en las aplicaciones. Empezaremos con las funciones algebraicas. Deberá entenderse siempre que se trata de funciones de una variable **x**.

Regla 1. La derivada de una constante es cero.

Demostración: Sea $f(x) = c$. Aplicando el proceso delta:

$$f(x + \Delta x) = c$$
$$- f(x) = -c$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = 0$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

$$f'(x) = 0$$

Regla 2. La derivada de **x** con respecto a **x** es igual a 1.