4. Hallar los puntos sobre la curva $y = x^3 + 1$ donde la tangente a la curva es paralela a la recta $y = 3x$. Graficar.

5. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ en el punto cuya abcisa es $x = 2$. Graficar.

$f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ $x = 2$ $P(2,8)$

$2(2)^2 - 3(2) + 6 = 8 \rightarrow (4)$

$\frac{dy}{dx} = m = 4x - 3$

$x = \rightarrow 2$

$4(2) - 3 = 5$

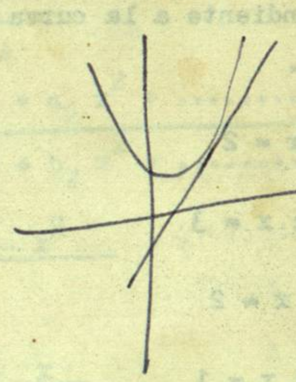
$m = 5$; $P(2,8)$

Ecuación Recta = $y - 8 = 5(x - 2)$

$y - 8 = 5x - 10$

Ecuac Tang. de: $y - 5x + 2 = 0$

x	$f(x)$
0	6
1	4
2	8
3	15



$y = x^3 + 1$

$T \parallel y = 3x$ (L)

$m_L = 3$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$m_T = f'(x) = 3x^2$

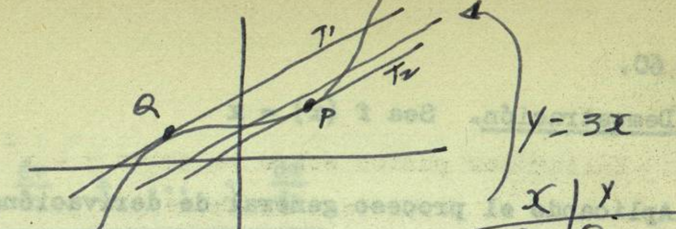
$3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$x = 1$; $y = 2$ $(P(1,2))$

$x = -1$; $y = -1 + 1 = 0$ $Q(-1,0)$



x	y
0	0
2	6

CAPITULO 4

REGLAS PARA DERIVAR.

x	y
-2	-7
-1	0
0	1
1	2

4.1 Reglas para Derivar Funciones Algebraicas. Del proceso general para obtener la derivada de una función a partir de la definición, deduciremos reglas para la derivación de formas funcionales que son importantes en las aplicaciones. Empezaremos con las funciones algebraicas. Deberá entenderse siempre que se trata de funciones de una variable x.

Regla 1. La derivada de una constante es cero.

Demostración: Sea $f(x) = c$. Aplicando el proceso delta:

$$f(x + \Delta x) = c$$
$$- f(x) = -c$$
$$f(x + \Delta x) - f(x) = 0$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

$$f'(x) = 0$$

Regla 2. La derivada de x con respecto a x es igual a 1.

Demostración. Sea $f(x) = x$

Aplicando el proceso general de derivación:

$$
\begin{aligned}
f(x + \Delta x) &= x + \Delta x \\
-f(x) &= -x \\
\hline
f(x + \Delta x) - f(x) &= \Delta x
\end{aligned}
$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 1$$

$$f'(x) = 1$$

Regla 3. **La derivada de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.**

Demostración:

Sea $f(x) = u \pm v \pm \cdots\cdots \pm w.$

donde: $u, v, \ldots, w$ son funciones de x

$$
\begin{aligned}
f(x + \Delta x) &= (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v) \pm \cdots\cdots \pm (w + \Delta w). \\
-f(x) &= -u \mp \mp \cdots\cdots \mp w. \\
\hline
f(x + \Delta x) - f(x) &= \Delta u \pm \Delta v \pm \cdots\cdots \pm \Delta w
\end{aligned}
$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \cdots \pm \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \cdots \pm \frac{\Delta w}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \cdots \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \cdots \pm \frac{dw}{dx}$$

Regla 4. **La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.**

Demostración. Sea $f(x) = cu$ donde $u = g(x)$

$$
\begin{aligned}
f(x + \Delta x) &= c(u + \Delta u) \\
&= cu + c\Delta u \\
-f(x) &= -cu \\
\hline
f(x + \Delta x) - f(x) &= c\Delta u
\end{aligned}
$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$f'(x) = c\frac{du}{dx}$$

Regla 5. **La derivada de un producto de funciones es igual a la primera por la derivada de la segunda mas la segunda por la derivada de la primera.**

Demostración. Sea $f(x) = uv$ donde u y v son funciones de x.

$$
\begin{aligned}
f(x + \Delta x) &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) \\
&= uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v \\
-f(x) &= -uv \\
\hline
f(x + \Delta x) - f(x) &= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v
\end{aligned}
$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$f'(x) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + \lim_{\Delta u \to 0} \Delta u \frac{dv}{dx}$$

Ahora $\lim_{\Delta u \to 0} \Delta u = 0$

$$f'(x) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Regla 6. La derivada de una potencia de una función es igual al exponente por la función al exponente menos uno por la derivada de la función.

Demostración: Sea: $f(x) = u^n$; $u = g(x)$.

$$f(x + \Delta x) = (u + \Delta u)^n = u^n + n u^{n-1} \Delta u + \frac{n(n-1)}{2!} u^{n-2} (\Delta u)^2 + \dots + (\Delta u)^n.$$

$$- f(x) = - u^n$$

$f(x + \Delta x) - f(x) = n u^{n-1} \Delta u + \Delta u$ (Suma de términos que tienen a Δu de factor).

$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = n u^{n-1} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}$ (Suma de términos que tienen a Δu de factor)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = n u^{n-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u$ (Suma de .....)

$f'(x) = n u^{n-1} \frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} \lim_{\Delta u \to 0} \Delta u$ (Suma de términos.....)

$$\therefore f'(x) = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

En particular, si $u = x$, se tiene el siguiente:

Corolario. Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = n x^{n-1}$

Esta regla es especialmente útil cuando n es grande o fraccionario.

Ejemplos: Derivar

1. $y = x^5$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4$$

2. $y = x^{(100,000)}$

$$\frac{dy}{dx} = 100,000\ x^{(99,999)}$$

Con las reglas hasta ahora establecidas, podemos derivar funciones polinomiales directamente por aplicación sucesiva de varias reglas. Ejemplo:

Derivar: $f(x) = x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 8x - 5$

Solución: Aplicando la regla 3:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(16x^3) + \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(8x) - \frac{d}{dx}(5)$$

Ahora, aplicando las reglas 1, 4 y 6:

$$f'(x) = 4x^3 - 16 \frac{d}{dx}(x^3) + 3 \frac{d}{dx}(x^2) + 8 \frac{d}{dx}(x) - 0$$

Ahora, aplicando las reglas 2 y 6.

$$f'(x) = 4x^3 - 48x^2 + 6x + 8$$

Observación: Con una poca de práctica, se puede obtener directamente la derivada de un polinomio por aplicación simultánea de las diferentes reglas empleadas.

Regla 7. La derivada de un cociente de funciones es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo sobre el denominador al cuadrado.

<u>Demostración</u>: Sea $f(x) = \frac{u}{v}$ donde $\underline{u}$ y $\underline{v}$ son funciones de $\underline{x}$.

Aplicando el proceso delta:

$$f(x+\Delta x) = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\lim_{\Delta x \to 0}\Delta v}$$

$$f(x) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

<u>Ejemplo</u>: Derivar la siguiente función.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

<u>Solución</u>: $F'(x) = \frac{(x^2+1)\,2 - (2x)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$$

<u>Regla 8</u>. La derivada de la raíz cuadrada de una función es igual a la derivada de la función sobre el doble del radical.

<u>Demostración</u>: Sea $f(x) = \sqrt{u}$; $u = g(x)$

Transformando el radical a exponente fraccionario:

$$f(x) = u^{1/2}$$

Ahora, aplicando la regla 6: $f'(x) = 1/2\; u^{-1/2}\frac{du}{dx}$

Eliminando el exponente negativo: $f'(x) = \dfrac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{x}}$

<u>Observación</u>: La regla 8 es un caso particular del caso considerado en la regla 6.

<u>Regla 9</u>. (La regla de cadena). Si $z = f(y)$; $y = g(x)$, entonces la derivada de $\underline{z}$ con respecto a $\underline{x}$ es igual a la derivada de $\underline{z}$ con respecto a $\underline{y}$ por la derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$.

<u>Demostración</u>:

Sea: $z = f(y)$; $y = g(x)$

Por definición:

$$\frac{dz}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y} \;;\; \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Entonces: $\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\;\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ahora, cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta y \to 0$.

$$\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\therefore = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx}$$

Entonces: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

4.2 Funciones inversas. Sea $y = f(x)$. Supongamos que x puede ser despejada en términos de y, de manera que $x = g(y)$. Esta nueva función $g(y)$ se le llama la función inversa de $f(x)$. Por ejemplo:

Si: $y = f(x) = 2x + 3$

Despejando x:

$$x = \frac{1}{2} y - \frac{3}{2} = g(y)$$

Las funciones $f(x) = 2x + 3$ y $g(y) = \frac{1}{2} y - \frac{3}{2}$ son mutuamente inversas.

Regla 10. Si $y = f(x)$, entonces la derivada de x con respecto a y es igual a uno sobre la derivada de y con respecto a x.

Demostración:

Sea $y = f(x)$ y su función inversa $x = g(y)$. Por el proceso delta, se obtiene:

$$1.\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$2.\quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y}$$

Multiplicando las ecuaciones 1 y 2:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$$

$$\therefore \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Aplicando límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Ahora, Δy tiende a cero cuando Δx tiende a cero y aplicando los teoremas de límites se obtiene: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$

4.3 Funciones implícitas. Hasta ahora, hemos considerado que la variable dependiente y es una función ex. ícita de x, es decir, hemos discutido funciones de la forma $y = f(x)$. Supongamos que y no está despejada en términos de x, sino que se tiene lo que se llama una relación funcional entre x y y: $f(x, y) = 0$. En éste caso, si consideramos a y como la variable dependiente, diremos que y es una función implícita de x. Por ejemplo: $3xy - x^2 + 4 = 0$

Para encontrar la derivada de una función implícita, se puede intentar primeramente obtener a y como una función explícita de x para aplicar las reglas de derivación. Sin embargo, esto puede resultar muy complicado y en algunos casos es imposible. Una regla práctica para encontrar la derivada de una función implícita es la siguiente:

Regla 11. Para encontrar $\frac{dy}{dx}$ en una relación funcional de la forma $f(x, y) = 0$ se deriva, (con respecto a x) término a término y se despeja después $\frac{dy}{dx}$.

La aplicación de esta regla práctica puede resultar complicada en algunos casos. Más adelante veremos un método para derivar implícitamente con la ayuda de las diferenciales.

Ejemplos:

1. Encontrar la derivada de x con respecto a y, si:

$$y = x^3 - 2x + 8$$

Aplicando la regla de la función inversa (Regla 10):

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2$$

Entonces:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 - 2}$$

Hemos obtenido $\frac{dx}{dy}$ como una función de x. Si se desea obtener esta derivada como función de y, tendríamos que despejar x en términos de y de la función original.