2. Encontrar $\frac{dy}{dx}$ de la siguiente relación funcional:

$$3x^2 y - 4y^2 + 5x - 28 = 0$$

Derivando término a término con respecto a $\underline{x}$:

$$3x^2 \frac{dy}{dx} + 6xy - 8y \frac{dy}{dx} + 5 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (3x^2 - 8y) = -6xy - 5$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = - \frac{6xy - 5}{3x^2 - 8y}$$

3. Un punto se mueve en un plano siguiendo la trayectoria de la curva $z = x^2 + 4$ de tal manera que $\underline{x}$ cambia a través del tiempo siguiendo la ley:

$$x = 3t + 2$$

Encontrar $\frac{dz}{dt}$ (proyección vertical de la velocidad del móvil).

<u>Solución:</u>

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \qquad \text{(Regla 9)}$$

Ahora: $\quad z = x^2 + 4 \;;\; x = 3t + 2$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = 2x \;;\; \frac{dx}{dt} = 3$$

Sustituyendo estas derivadas se tiene:

$$\frac{dz}{dt} = (2x)\ 3$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = 6x$$

Si deseamos encontrar $\frac{dz}{dt}$ como una función de $\underline{t}$, debemos sustituir en el resultado $x = 3t + 2$ para obtener:

$$\frac{dz}{dt} = 6\ (3t + 2) = \underline{18t + 12}$$

<u>4.4 Derivadas sucesivas de una función.</u> Hemos definido la derivada de una función de una variable, de tal manera que podemos obtenerla por medio de un proceso sistemático. Si repetimos el proceso después de encontrar la derivada, encontramos lo que se llama la segunda derivada de la función, es decir la derivada de la primera derivada de la función. Repitiendo el proceso, 3, 4, o más veces, obtenemos la tercera, cuarta, etcétera, derivadas de la función. Utilizaremos la siguiente notación:

Sea $y = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$. 1a. derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x)$. 2a. derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x)$. 3a. derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d^{iv}y}{dx^{iv}} = y^{iv} = f^{iv}(x)$. 4a. derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$.

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$\frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$. Enésima derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$.

<u>Ejemplos:</u>

1. Encontrar todas las derivadas sucesivas de la siguiente función:

$$y = x^2 - 3x + 4$$

<u>Solución:</u>

Primera derivada: $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$

Segunda derivada: $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = 2$

Tercera derivada: $\dfrac{d^3 y}{d x^3} = 0$

Las derivadas de orden mayor que 3 son iguales a cero puesto que $\dfrac{d^3 y}{d x^3} = 0$.

2. Encontrar la primera y segunda derivadas de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} \qquad \text{(Regla 8)}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - (x) \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}}{x^2 + 3}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2 + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{3}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{(x^2 + 3)^{3/2}}$$

Observación. Las derivadas sucesivas de una función polinomial son cada vez expresiones mas sencillas, como en el primer ejemplo. Por otra parte la derivada de una expresión radical se va complicando a medida que aumenta el orden de la derivación.

Funciones trascendentes. Hemos definido las funciones trascendentes como todas aquellas que no son algebraicas. Estudiaremos únicamente las funciones trascendentes mas importantes en economía que son las funciones logarítmicas y las funciones exponenciales. Estas funciones han sido discutidas en cursos elementales de matemáticas por lo que sintetizaremos su definición y propiedades fundamentales sin demostrarlas.

Hasta aquí

4.5 Funciones logarítmicas.

Def. El logaritmo en base a de un número real x es el exponente que debe aplicarse al número a para obtener x.

En símbolos matemáticos, si llamamos y al logaritmo en base a de x se tiene:

$$\log_a x = y \text{ tal que } a^y = x.$$

donde $\log_a x$ = Logaritmo en base a de x.

Por ejemplo, si $a = 10$ se tiene el conocido sistema de logaritmos decimales o logaritmos comunes que es muy útil para hacer cálculos numéricos aproximados. De acuerdo con la definición, podemos citar los siguientes ejemplos:

1. Log. 10 = 1 porque $10^1 = 10$
2. Log. 1000 = 3 porque $10^3 = 1000$

Nota: Cuando una expresión logarítmica está referida a la base 10, se acostumbra no indicar la base como sub-índice, en cuyo caso debe entenderse que se trata de logaritmos decimales. El cálculo de logaritmos decimales de números que no son potencias exactas de 10 es laborioso y requiere conocimientos de desarrollos en serie, por lo que se dispone de tablas que contienen los logaritmos decimales de los números aproximados a 3, 4 o más decimales.

Consideremos la función logarítmica general y su gráfica.

Sea $f(x) = \log_a x$. De la definición se deducen inmediatamente las siguientes características generales de la función logarítmica en cualquier base: $a > 1$

1. El logaritmo de 1 en cualquier base es cero.

$\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$ (cualquier número elevado a la cero es igual a 1)

2. El logaritmo de un número entre cero y uno es negativo y aumenta en valor absoluto a medida que el número se acerca a cero.

En símbolos:

$$\log_a x < 0 \text{ para todo } 0 < x < 1.$$

3. Los logaritmos de los números no-positivos (negativos y el cero) no existen en el sistema de los números reales si la base $\underline{a}$ es mayor que cero.

4. El logaritmo de un número real mayor que uno es positivo y aumenta cada vez más lentamente a medida que el número aumenta.

En símbolos:

$$\log_a x > 0 \text{ para todo } x > 1.$$

De acuerdo con estas características fundamentales, la función logarítmica tiene como dominio los números reales positivos y su co-dominio son todos los números reales. La curva de la función logarítmica, cualquiera que sea su base es la siguiente:

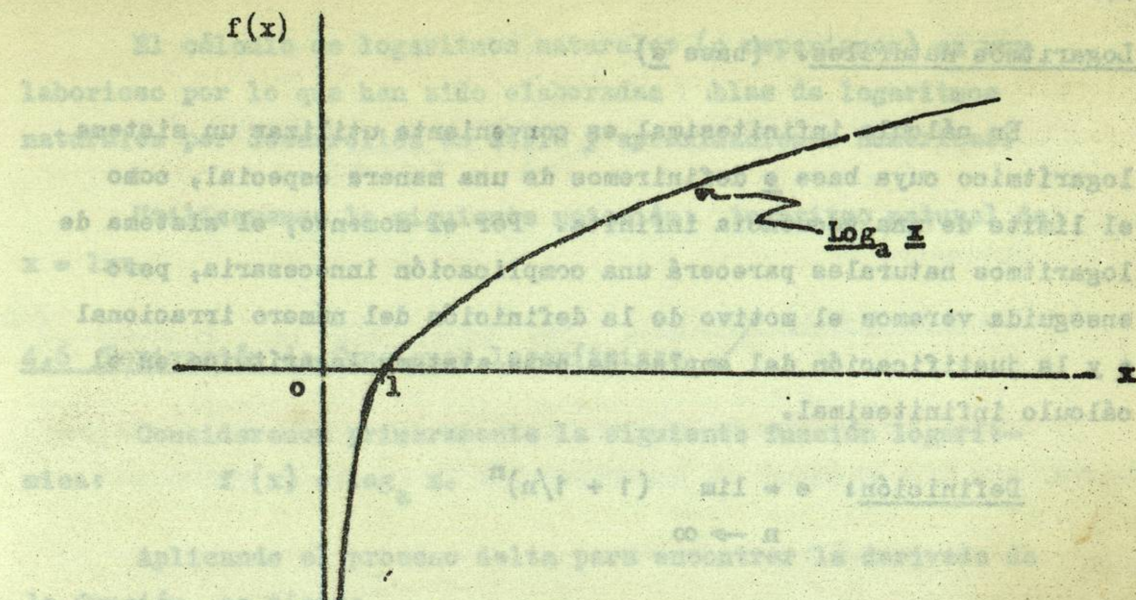

Fig. 4.1

Las propiedades fundamentales de los logaritmos en cualquier base son las siguientes:

(i) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

(ii) $\log_a (x_1/x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$

(iii) $\log_a (x_1^{\,n}) = n \log_a x_1$

Estas propiedades son de gran utilidad para la simplificación de cálculos numéricos aproximados y para el método de derivación logarítmica que veremos más adelante.

<u>Ejemplo</u>. Encontrar el logaritmo decimal de $\sqrt[3]{2}$ aproximado a 6 decimales.

<u>Solución</u>: Puesto que $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$, se tiene:

$$\log \sqrt[3]{2} = \log 2^{(1/3)}$$

$$= 1/3 \log 2 \text{ (propiedad iii)}$$

De la tabla, se obtiene $\log 2 = 0.301030$.

$$\log \sqrt[3]{2} = 1/3 \; (0.301030)$$

$$= \underline{\underline{0.100343}}$$

Logaritmos naturales. (base e)

En cálculo infinitesimal es conveniente utilizar un sistema logarítmico cuya base e definiremos de una manera especial, como el límite de una secuencia infinita. Por el momento, el sistema de logaritmos naturales parecerá una complicación innecesaria, pero enseguida veremos el motivo de la definición del número irracional e y la justificación del empleo de este sistema logarítmico en el cálculo infinitesimal.

Definición: $e = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$

El desarrollo de esta expresión por la ley del binomio da una serie infinita cuando n tiende a infinito. Investiguemos el valor numérico de la expresión, asignando valores a n cada vez más grandes:

Si $n = 1$: $(1 + 1/n)^n = (1 + 1/1)^1 = (1 + 1)^1 = 2^1 = 2$

Si $n = 2$: $(1 + 1/n)^2 = (1 + 1/2)^2 = (3/2)^2 = 9/4 = 2.25$

Si $n = 3$: $(1 + 1/3)^3 = (4/3)^3 = 64/27 = 2.37$

En general, para cualquier n:

$$(1+1/n)^n = 1^n + n\,(1^{n-1})\,(1/n) + \frac{n\,(n-1)}{2!}\,(1^{n-2})\,(1/n)^2 + \ldots + (1/n)^n$$

(ley del binomio para enteros n).

Simplificando: $(1+1/n)^n = 1 + 1 + \dfrac{n-1}{2!n} + \ldots + 1/(n)^n$

Si seguimos aumentando n dándole valores enteros positivos, encontramos un valor aproximado del número e. Este valor aproximado a 3 decimales es: $e = 2.718$.

El cálculo de logaritmos naturales (o neperianos) es muy laborioso por lo que han sido elaboradas tablas de logaritmos naturales por desarrollos en serie y aproximaciones numéricas.

Utilizaremos la siguiente notación: logaritmo natural de $x = \ln x$.

4.6 Derivación de funciones logarítmicas.

Consideremos primeramente la siguiente función logarítmica: $f(x) = \log_a x$.

Aplicando el proceso delta para encontrar la derivada de la función, se tiene:

$$f(x + \Delta x) = \log_a (x + \Delta x)$$

$$-f(x) = -\log_a x$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x$$

Por la propiedad (ii) de los logaritmos aplicada en sentido inverso:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \log_a \frac{(x + \Delta x)}{x}$$

$$= \log_a (1 + \Delta x/x)$$

Dividiendo entre Δx:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = (1/\Delta x)\ \log_a (1 + \Delta x/x)$$

Multiplicando y dividiendo por x el primer factor del lado derecho de la ecuación y sustituyendo $\Delta x/x = \dfrac{1}{x/\Delta x}$ en el segundo factor, resulta:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 1/x\ (x/\Delta x)\ \log_a \left(1 + \frac{1}{x/\Delta x}\right)$$

Ahora, aplicando la propiedad (iii) de los logaritmos:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 1/x \log_a\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x}$$

Entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(1/x) \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x}$$

Ahora, un teorema de límites dice que el límite del logaritmo de una variable es igual al logaritmo del límite de la variable.

De acuerdo con este teorema:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) = 1/x \left\{\log_a\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x}\right]\right\}$$

Si hacemos $n = x/\Delta x$, entonces se tiene que $\lim_{\Delta x \to 0} x/\Delta x = \infty$. Es decir, n tiende a infinito cuando Δx tiende a cero. Sustituyendo en la última igualdad:

$$f'(x) = 1/x \left\{\log_a\left[\lim_{n \to \infty} (1+1/n)^n\right]\right\}$$

Ahora, la expresión entre paréntesis rectangular es el número e, por definición.

$$\boxed{\therefore\ f'(x) = 1/x \log_a e}$$

Hemos deducido la siguiente:

Regla: La derivada del logaritmo en base a de una variable, es igual a uno entre la variable por el logaritmo en base a del número e.

Caso general. Consideremos ahora la función logarítmica mas general:

$$g(x) = \log_a f(x)$$

Sustituyendo $u = f(x)$: $g(x) = \log_a u$

Por la regla de cadena, es decir, la regla para la derivada de

una función de una función: $g'(x) = \frac{d(g(x))}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Ahora, por la regla que acabamos de establecer:

$$\frac{d(g(x))}{du} = 1/u \log_a e$$

Además: $\frac{du}{dx} = f'(x)$, puesto que $u = f(x)$

Sustituyendo: $g'(x) = 1/u \log_a e\, f'(x)$

Ahora, devolviendo la sustitución $u = f(x)$:

$$\boxed{g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \log_a e}$$

Este resultado se traduce en palabras por medio de la siguiente:

Regla: La derivada del logaritmo en base a de una función de x, es igual a la derivada de la función sobre la función misma, por el logaritmo en base a, del número e.

Corolario. La derivada del logaritmo natural de una función es igual a la derivada de la función entre la función misma. En símbolos:

Si $y = \ln f(x)$ $\quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}}$

Ejemplos: Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \log_2 (2x+3)$

Solución: $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x+3} \log_2 e$

$\ln x^2 =$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \log_2 e}{2x+3}$$