2. $f(x) = \ln (x^2 - 5)^3$

Solución:

$$f'(x) = \frac{3(x^2 - 5)^2 \, 2x}{(x^2 - 5)^3}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{6x}{x^2 - 5}$$

3. $f(x) = \ln (x^2 - 3x + 2)$

Solución:

$$f'(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

4.7 Derivación logarítmica. Es un método de diferenciación que consiste en aplicar logaritmos naturales antes de derivar. Este método es muy útil en algunos casos cuando la función está compuesta por productos, fracciones y (ó) potencias de funciones complicadas. Puesto que los logaritmos transforman productos en sumas, fracciones en restas y potencias en multiplicaciones, la preaplicación de logaritmos para derivar, simplifica notablemente la diferenciación:

Ejemplo: Derivar la siguiente función:

$$y = (x^3 - 4)\,(x^2 + 8)^2$$

Aplicando logaritmos: $\ln y = \ln (x^3 - 4) + 2 \ln (x^2 + 8)$

Derivando:

$$\frac{dy/dx}{y} = \frac{3x^2}{x^3 - 4} + \frac{2\,(2x)}{x^2 + 8}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3x^2}{x^3 - 4} + \frac{4x}{x^2 + 8}\right)$$

Sustituyendo y: (para tener y' en función de x)

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 - 4)\,(x^2 + 8)^2 \left(\frac{3x^2}{x^3 - 4} + \frac{4x}{x^2 + 8}\right)$$

$$= 3x^2\,(x^2 + 8)^2 + 4x\,(x^3 - 4)\,(x^2 + 8)$$

$$= (x^2 + 8)\,(3x^4 + 24x^2 + 4x^4 - 16x)$$

$$= (x^2 + 8)\,(7x^4 + 24x^2 - 16\,x)$$

4.8 Funciones exponenciales.

Consideremos la siguiente función exponencial y su gráfica:

$$f(x) = a^x \qquad a > 1 \quad ó \quad 0 < a < 1$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales, mientras que el co-dominio es el conjunto de los números reales no-negativos. En la figura 4.2 aparecen las formas de las curvas correspondientes a funciones exponenciales para los diferentes valores posibles del número a.

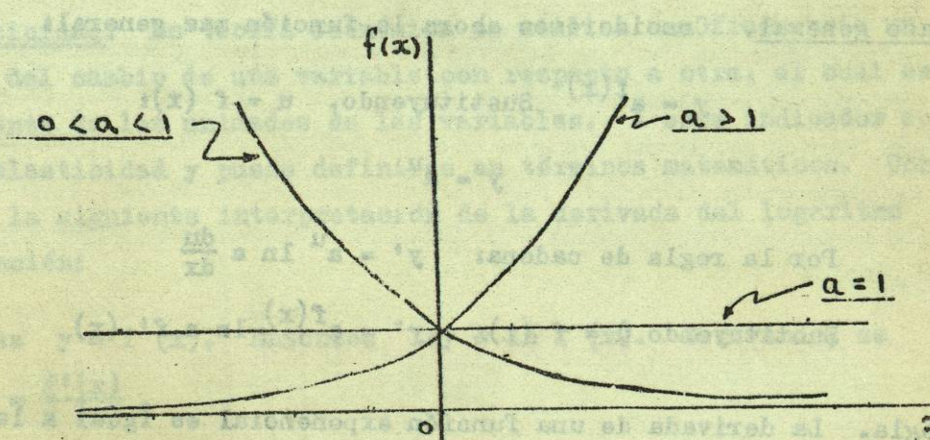

Fig. 4.2

Derivación de las funciones exponenciales. Consideremos primeramente la función: $f(x) = a^x$

Aplicando el método de derivación logarítmica:

$$\ln f(x) = x \ln a$$

Derivando: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a$

Entonces: $f'(x) = f(x) \ln a = a^x \ln a.$

Hemos deducido la siguiente:

Regla: La derivada de una constante elevada a un exponente variable es igual a la función misma multiplicada por el logaritmo natural de la constante.

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = 4^x$

Solución: $f'(x) = 4^x \ln 4$

Nota: Si la base de la función exponencial es el número e, entonces su derivada es la función misma. En símbolos: si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.

Caso general. Consideremos ahora la función mas general:

$y = a^{f(x)}$ Sustituyendo, $u = f(x)$:

$$y = a^u$$

Por la regla de cadena: $y' = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

Sustituyendo $u = f(x)$: $y' = a^{f(x)} \ln a \, f'(x)$

Regla. La derivada de una función exponencial es igual a la función misma por el logaritmo natural de la base por la derivada del exponente.

Corolario. Si $y = e^{f(x)}$ entonces:

$$\frac{dy}{dx} = e^{f(x)} \cdot f'(x) \quad \text{(porque } \ln e = 1\text{)}.$$

Nota: En el caso de una función en la que tanto la base como el exponente son variables, se puede derivar por diferenciación logarítmica:

$$y = \left[f(x)\right]^{g(x)}$$

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

Derivando: $y'/y = g(x)\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] + \left[\ln f(x)\right] \cdot g'(x)$

$$y' = y\left\{g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} + \left[\ln f(x)\right] \cdot g'(x)\right\}$$

Sustituyendo: $y = f(x)^{g(x)}$

$$y' = g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \left[f(x)\right]^{g(x)} + \left[f(x)\right]^{g(x)} \left[\ln f(x)\right] g'(x)$$

$$\therefore y' = g(x) \cdot \left[f(x)\right]^{g(x)-1} f'(x) + \left[f(x)\right]^{g(x)} \ln f(x) \, g'(x)$$

Regla: La derivada de una función de x elevada a otra función de x es igual a la suma de las derivadas que se obtienen considerando primero el exponente constante y después como variable.

4.9 Elasticidad. En teoría económica se utiliza con frecuencia un indicador del cambio de una variable con respecto a otra, el cual es independiente de las unidades de las variables. A este indicador se le llama elasticidad y puede definirse en términos matemáticos. Consideremos la siguiente interpretación de la derivada del logaritmo de una función:

Sea $y = f(x)$. Entonces $\ln y = \ln f(x)$. Derivando, se tiene: $\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Puesto que y' es la razón de cambio de y con respecto a x, llamaremos a y'/y razón de cambio proporcional de y con respecto a x.

Def. Si y es una función de x, la elasticidad de y con respecto a x es igual al cociente de las razones de cambio proporcionales de y y x con respecto a x.

En términos matemáticos usaremos la siguiente:

Notación:

$$Ex\ (y) = \frac{\frac{d(\ln y)}{dx}}{\frac{d(\ln x)}{dx}}$$

Simplificando: $Ex\ (y) = \frac{y'/y}{1/x} = (x/y)y' = (x/y)\ dy/dx$

$$\underline{\underline{E_x(y) = (x/y)\ dy/dx}}$$

Esta es una fórmula conveniente para encontrar la elasticidad de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$. Gráficamente puede obtenerse $E_x(y)$ dibujando la curva de ln y como función de lnx, es decir, utilizando escalas logarítmicas en lugar de escalas naturales para $\underline{x}$ y $\underline{y}$. (Puede utilizarse papel doble-logarítmico). La pendiente de esta curva es la elasticidad puesto que corresponde a la derivada de ln y con respecto a ln x y ésto es precisamente $E_x(y)$, por definición.

Observación. El uso de la fórmula $E_x(y) = (x/y)\ dy/dx$ implica encontrar la derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$ para lo cual disponemos de una serie de reglas. De la definición de elasticidad y las reglas de diferenciación pueden deducirse reglas para la evaluación de elasticidades en funciones combinadas, como por ejemplo:

$$(1)\quad E_x\ (u + v) = \frac{uE_x(u) + v\ E_x(v)}{u + v}$$

$$(2)\quad E_x\ (uv) = E_x(u) + E_x(v)$$

$$(3)\quad E_x\ (u/v) = E_x\ (u) - E_x\ (v)\ \text{etc.}$$

Sin embargo, la utilización de reglas como éstas en general no es ventajoso y en particular la regla (1) es obviamente conveniente.

4.10 Elasticidad de demanda. Consideremos la ley de demanda para un cierto artículo:

$$P = f\ (x)\ ;\quad P = \text{Precio}\ ;\ x = \text{Cantidad demandada.}$$

Por definición de elasticidad. $E_p\ (x) = (p/x)\ dx/dp$

Esto es la elasticidad de la cantidad demandada con respecto al precio y se llama simplemente elasticidad de demanda. Generalmente se representa por la letra griega eta (η) y para funciones "normales" de demanda es negativa, puesto que la curva "Normal" de demanda es decreciente hacia la derecha lo cual hace que dp/dx sea negativa y por lo tanto dx/dp es negativa, porque:

$$dx/dp = 1/(dp/dx) \qquad \eta = \frac{dx}{dp}\cdot\frac{P}{x}$$

Tradicionalmente se ha expresado la ley de demanda considerando a $\underline{P}$ como una función explícita de $\underline{x}$, pero ésto no es problema para el cálculo de η ya que se puede despejar $\underline{x}$ para encontrar dx/dP ó se encuentra dP/dx y se invierte para encontrar dx/dP. Otra forma de calcular η es utilizar la regla de la función inversa para elasticidades que en seguida demostraremos:

Regla de la función inversa. Si $y = f\ (x)$, la elasticidad de $\underline{x}$ con respecto a $\underline{y}$ es igual a uno sobre la elasticidad de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$. $E_y(x) = \frac{1}{E_x\ (y)}$

Dem. Sea $y = f\ (x)$ Por definición: $E_x\ (y) = (x/y)\ \ dy/dx$

Consideremos la inversa de $E_x(y)$:

$$\frac{1}{E_x(y)} = \frac{1}{x/y\ dy/dx} = (y/x)\ \ 1/\frac{dy}{dx}$$

Ahora: $dx/dy = 1/\frac{dy}{dx}$ Sustituyendo: $\frac{1}{E_x\ (y)} = (y/x)\ dx/dy$

Por definición de elasticidad, el lado derecho es igual a la elasticidad de $\underline{x}$ con respecto a $\underline{y}$.

$$E_y(x) = \frac{1}{E_x\ (y)}$$

L.C.D.D.

De acuerdo con esta regla, la elasticidad de demanda es la inversa de multiplicación de la elasticidad del precio.

Ejemplo. Encontrar la elasticidad de demanda en la siguiente ley de demanda cuando la cantidad demandada es 15:

$$P = \sqrt{100 - 5x}$$

x = Cantidad demandada

P = Precio.

Solución. Para no despejar x en función de P, encontremos la elasticidad del precio para aplicar la regla de la función inversa:

Elasticidad del precio: $E_x(P) = (x/P)\ dP/dx$

Derivando la función de demanda: $dP/dx = \dfrac{-5}{2\sqrt{100 - 5x}}$

Sustituyendo en la elasticidad del precio:

$$E_x(P) = (x/P)\ \frac{-5}{2\sqrt{100 - 5x}}$$

Sustituyendo $P = \sqrt{100 - 5x}$:

$$E_x(P) = \frac{-5x}{2\sqrt{100 - 5x}\ \sqrt{100 - 5x}} = \frac{-5x}{200 - 10x}$$

$$E_x(P) = \frac{-x}{40 - 2x}$$

Ahora, cuando la cantidad demandada x = 15:

$$E_x(P) = \frac{-15}{40 - 30} = -15/10 = -3/2$$

Entonces, la elasticidad de demanda es:

$$E_p(x) = \frac{1}{E_x(P)} = \frac{1}{-3/2}$$

$$\therefore E_p(x) = -2/3$$

Ejercicio 10.

Tema: Diferenciación de funciones algebraicas.

1. Encontrar la derivada de y con respecto a x:

1.1 $y = x^4$

1.2 $y = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

1.3 $y = (x^2 - 2)^4$

1.4 $y = \sqrt{1 - 2x^2}$

1.5 $y = (x^2 - 2x + 1)(x^3 + 1)$

1.6 $y = (2x^2 - 4)\sqrt{1 + 2x}$

1.7 $y = \dfrac{x - 2}{x^2 + 4}$

1.8 $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 4}$

1.9 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}}$

1.10 $y = x^2 (x^2 - 3x)^{3/2}$

1.11 $y = x^5 - 3x^2 + 6x$

1.12 $y = (2x^2 - 3x + 1)^4$

1.13 $y = (2x + 5)^{3/2}$

1.14 $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^3 - 4}$

1.15 $y = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x + 2}}$

1.16 $\left(\dfrac{3x - 7}{\sqrt{x + 4}}\right)^5 = y$

2. Encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

2.1 $f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{2x^2}$

2.2 $f(x) = \dfrac{1 - x}{x^2 + 1}$

2.3 $f(x) = (x+33)^2 (x^2 - 1)$

2.4 $f(x) = \dfrac{(x + 2)^3}{x}$

2.5 $f(t) = t^2 + 2t + 1$

2.6 $f(z) = (5z + 4)^{-3}$

2.7 $f(x) = \dfrac{3}{(x^2 - 4x)^3}$

2.8 $f(x)\ \sqrt{(x^2 - 3)^{-4}}$

3. Hallar la derivada en el valor indicado de x:

3.1 $y = (x^2 - 1)^3$ en $x = 2$

3.2 $y = \sqrt{9 + 2x}$ en $x = 8$

3.3 $y = \dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}$ en $x = 1$ **Existe la derivada en $x = 2/3$?**

3.4 $f(x) = (x^2 - 4)(x + 2)^3$ en $x = 0$

3.5 $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 2x + 6$ en $x = 2$

<u>Ejercicio 11.</u>

<u>Tema:</u> <u>Función inversa.</u> <u>Función de una función.</u>

1. Encontrar la derivada de <u>y</u> con respecto a <u>x</u>:

1.1 $x = y^2 - 3y^3 + 2y - 4$

1.2 $x = \dfrac{y - 3}{y^2 + 3y - 5}$

1.3 $x = y^2 (1 - 2y)^3$

1.4 $x = \sqrt{y^3 - 2y + 3}$

1.5 $x = (y^2 - 4y)(2y + 1)^4$

2. Encontrar la pendiente de cada una de las siguientes curvas en el punto indicado:

2.1 $x = y^2 - 4y + 3$; $P(3, 0)$

2.2 $x = (y - 1)^5$; $P(0, 1)$

$\frac{dy}{dx} = m$

2.3 $x = \dfrac{y + 1}{y - 1}$; $P(3, 2)$

2.4 $xy = 1$; $P(1, 1)$

2.5 $x = \sqrt{2y + 1}$; $P(3, 4)$

3. Encontrar la derivada de <u>y</u> con respecto a <u>x</u> si:

3.1 $y = u^3 - 2u + 1$; $u = \sqrt{2x + 3}$

3.2 $y = u^2 - 2u + 3$; $u = \dfrac{2}{x^2}$

3.3 $y = \dfrac{u - 1}{u + 1}$; $u = (2x - 1)^4$

3.4 $y = (u^2 - 2)^3$; $u = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2}$

3.5 $y = u - 5$; $u = \dfrac{\sqrt{3x + 4}}{2x - 5}$

3.6 $y = u^4$; $u = 2 + \sqrt{x}$

3.7 $y = \dfrac{2u + 1}{u - 4}$; $u = \dfrac{x}{x - 5}$

3.8 $y = \sqrt{u(u^2 - 1)}$; $u = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

4. Un punto se mueve a lo largo de la curva: $y = x^3 - 4$ de tal manera que $x = \frac{1}{2}t + 4$, donde <u>t</u> es el tiempo. Cuando $t = 2$, encontrar:

a) la velocidad de cambio de <u>x</u> con respecto a <u>t</u>. (Proyección horizontal de velocidad del móvil.

b) la velocidad de cambio de <u>y</u> con respecto a <u>t</u>. (Proyección vertical de la velocidad del móvil).

<u>Ejercicio 12.</u>

<u>Tema.</u> <u>Derivadas de alto orden.</u> <u>Derivación implícita.</u>

1. Encontrar las primeras 3 derivadas sucesivas de:

1.1 $f(x) = x^2 - 8x + 4$

1.2 $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 6x - 1$

1.3 $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x + 5}$

1.4 $f(x) = (x - 1)(x^3 + 8x - 3)$

1.5 $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

1.6 $f(x) = (x - 4)^4$

1.7 $f(x) = (x^2 - 5)^{\frac{1}{2}}$

1.8 $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2$

1.9 $g(x) = (x^3 - 1)^6$

1.10 $g(x) = \dfrac{x}{x + 5}$

2. Encontrar todas las derivadas sucesivas de las siguientes funciones en el punto indicado:

2.1 $f(x) = x^3 - 3x + 2$; Para $x = 1$