8. Supongamos que la ley de demanda por un artículo en determinado mercado es dada por la siguiente ley:

$$P = \frac{40}{x+2} \; ; \; P = \text{Precio}; \quad x = \text{Cantidad demandada.}$$

Graficar la ley de demanda y encontrar la elasticidad de la demanda cuando la cantidad demandada es 8.

CAPITULO 5

APLICACIONES DE LA DERIVADA

5.1 Aplicación de la Derivada a Gráficas de Funciones. Considerando la función $y = f(x)$, Hemos visto que, de acuerdo con la definición de derivada, la derivada de y con respecto a x es la pendiente de la tangente a la curva de la función en cualquier punto.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = m$$

A la pendiente m de la tangente a la curva en cualquier punto, se le llama también pendiente de la curva y es una medida indicadora de la dirección de la curva en cualquier punto. Puesto que la pendiente es la tangente trigonométrica de la inclinación de la recta tangente a la curva, puede tomar cualquier valor real entre infinito y menos infinito. Analicemos las diferentes posibilidades para el valor de la pendiente y sus correspondientes implicaciones, respecto a la dirección de la curva:

a) Si $f'(x) = m > 0$, entonces la tangente tiene una inclinación entre 0° y 90°, es decir, la curva de la función está ascendiendo de izquierda a derecha.

En este caso, cuando la derivada es positiva, se dice que la función es creciente.

b) Si $f'(x) = m < 0$, entonces la tangente tiene una inclinación entre 90° y 180°, es decir, la curva de la función está descendiendo de izquierda a derecha. En este caso, cuando la derivada es negativa, se dice que la función es decreciente.

c) Si $f'(x) = m = 0$, entonces la tangente es horizontal, puesto que su inclinación es de 0°. Los puntos de la curva que satisfacen esta condición ($f'(x) = o$) se llaman <u>puntos críticos de tangente horizontal</u>. Estos puntos son de especial importancia para la determinación de máximos y mínimos relativos y para la solución de problemas de optimización que serán estudiados después.

d) Si $f'(x) = m = \infty$ ó $-\infty$, entonces la tangente es vertical puesto que su inclinación es de 90°. Los puntos de la curva que satisfacen esta condición ($f'(x) = \infty$) se llaman <u>puntos críticos de tangente vertical</u> y son también importantes en la determinación de máximos y mínimos.

En resumen: Si la derivada es positiva, la curva es creciente de izquierda a derecha. Si la derivada es negativa, la curva es decreciente de izquierda a derecha. Si la derivada es igual a cero, la curva tiene un punto de tangente horizontal.

<u>Concavidad</u>. Los conceptos geométricos de concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo son intuitivamente triviales de la observación directa de una curva. Sin embargo, es conveniente formalizar sus definiciones para utilizar el cálculo diferencial en el análisis de sentido de concavidad de una curva.

<u>Def.</u> Un arco de curva es cóncavo hacia arriba si está sobre la tangente a la curva en cualquier punto del arco. Similarmente, el arco es cóncavo hacia abajo si está bajo la tangente a la curva en cualquier punto del arco.

Por medio del cálculo diferencial, podemos establecer el concepto de sentido de concavidad en un punto de la curva. De acuerdo con la definición de derivada, la segunda derivada es una

medida del cambio de la primera derivada con respecto a la variable independiente <u>x</u>. Puesto que la primera derivada es la pendiente de la curva, obtenemos las siguientes conclusiones:

a) Si la segunda derivada $f''(x)$ es positiva, quiere decir que la pendiente de la curva está aumentando y por lo tanto la curva es cóncava hacia arriba.

b) Si la segunda derivada es negativa ($f''(x) < o$) quiere decir que la pendiente está disminuyendo y por lo tanto la curva es cóncava hacia abajo.

c) Si la segunda derivada es cero ($f''(x) = o$) quiere decir que la pendiente permanece fija en el punto para cambiar el sentido de concavidad. Los puntos que satisfacen esta condición se llaman <u>puntos de inflexión</u>. (1)

Ilustremos con una gráfica la relación entre el crecimiento o decrecimiento de una función y el signo de la primera derivada: (figura 5.1).

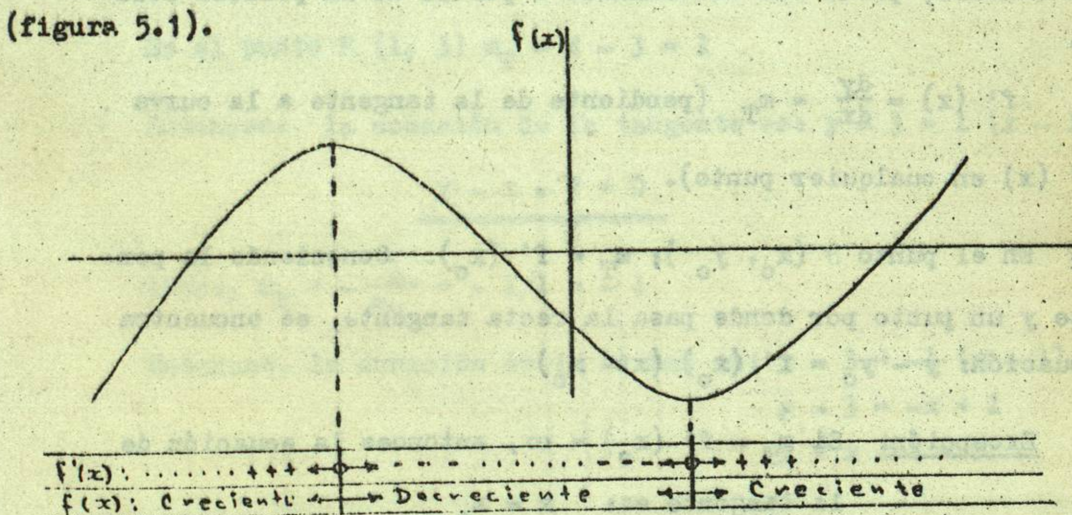
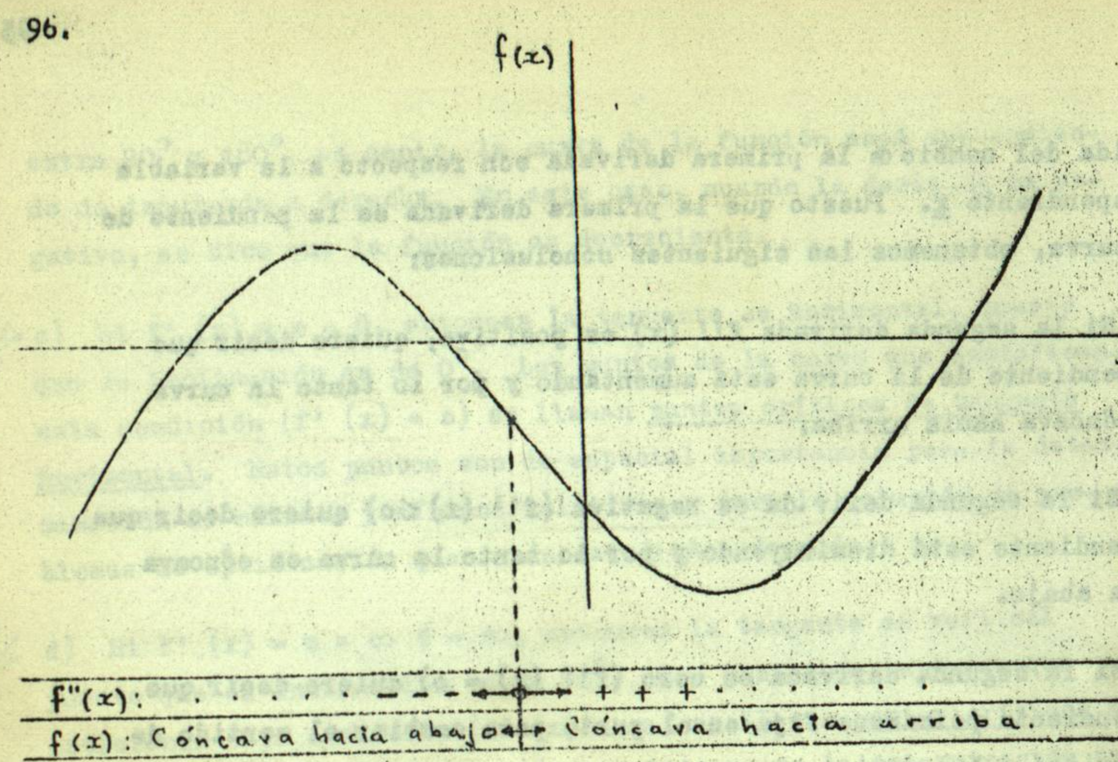


Fig. 5.1

De la misma manera podemos ilustrar con una gráfica la relación entre el sentido de concavidad y el signo de la segunda derivada: (figura 5.2)

(1) Observación: Puede suceder que $f''(x) = 0$ y el punto no sea de inflexión, como en el punto $P(0,0)$ de la función $f(x) = x^4$



F i g. 5.2

5.2 Tangentes y Normales. La ecuación de la recta tangente a la curva de una función $y = f(x)$ en un punto cualquiera $P(x_0, y_0)$ de su dominio, puede ser determinada a partir de la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = m_T$$ (pendiente de la tangente a la curva de $f'(x)$ en cualquier punto).

En el punto $P(x_0, y_0)$; $m_T = f'(x_0)$. Conociendo la pendiente y un punto por donde pasa la recta tangente, se encuentra su ecuación: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Excepción: Si $m_T = f'(x_0) = \infty$, entonces la ecuación de la tangente es: $x = x_0$

Similarmente, podemos encontrar la ecuación de la recta normal que se define de la siguiente manera:

Def. La recta normal a la curva de $f(x)$ en el punto $P(x_0, y_0)$ es la perpendicular a la tangente que pasa por el punto en cuestión.

Puesto que la pendiente de la tangente es $m_T = f'(x_0)$, entonces la pendiente de la normal será:

$$m_N = \frac{-1}{f'(x_0)}$$

Entonces, la ecuación de la recta normal que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$ y cuya pendiente es $m_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$ será:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Las rectas tangente y normal son auxiliares en el análisis de la gráfica de una función.

Ejemplo: Encontrar las ecuaciones de la tangente y la normal a la gráfica de la siguiente función en el punto $P(1, 3)$

$$y = 2x^2 - 3x + 4$$

Solución: $\frac{dy}{dx} = 4x - 3$ $\quad m_T = 4x - 3$

En el punto $P(1, 3)$ $m_T = 4 - 3 = 1$

Entonces: la ecuación de la tangente es: $y - 3 = 1(x - 1)$

$$\underline{y - x - 2 = 0}$$

Ahora, $m_N = -\frac{1}{m_T} = -1/1 = -1$

Entonces, la ecuación de la normal es: $y - 3 = -1(x - 1)$

$$y - 3 = -x + 1$$

$$y + x - 4 = 0$$

5.3 Máximos y mínimos relativos de una función. Definamos primeramente lo que es un máximo o un mínimo relativo:

Def. Máximo relativo. Un punto $P(x_0, y_0)$, es un máximo relativo de $f(x)$, si $f(x_0) > f(x_1)$ donde x_1 son valores de x en una vecindad de x_0, es decir, valores inmediatamente a la izquierda y a la derecha de x_o.

<u>Def.</u> <u>Mínimo relativo.</u> Un punto Q (x_1, y_1) es un mínimo relativo de f (x) si f $(x_1) < f(x_j)$ donde x_j son valores de <u>x</u> inmediatamente a la izquierda y a la derecha de x_1.

De acuerdo con estas definiciones, se deduce que una condición necesaria para que un punto de la curva de una función sea un máximo o un mínimo relativo, es que la tangente en el punto sea horizontal, es decir, que la primera derivada sea igual a cero. Es conveniente observar que esta condición no es suficiente, es decir, si la derivada es cero en un punto, no se puede asegurar que el punto sea un máximo o un mínimo relativo, ya que puede tratarse de lo que se llama un punto estacionario como el que se indica en la figura 5.3.

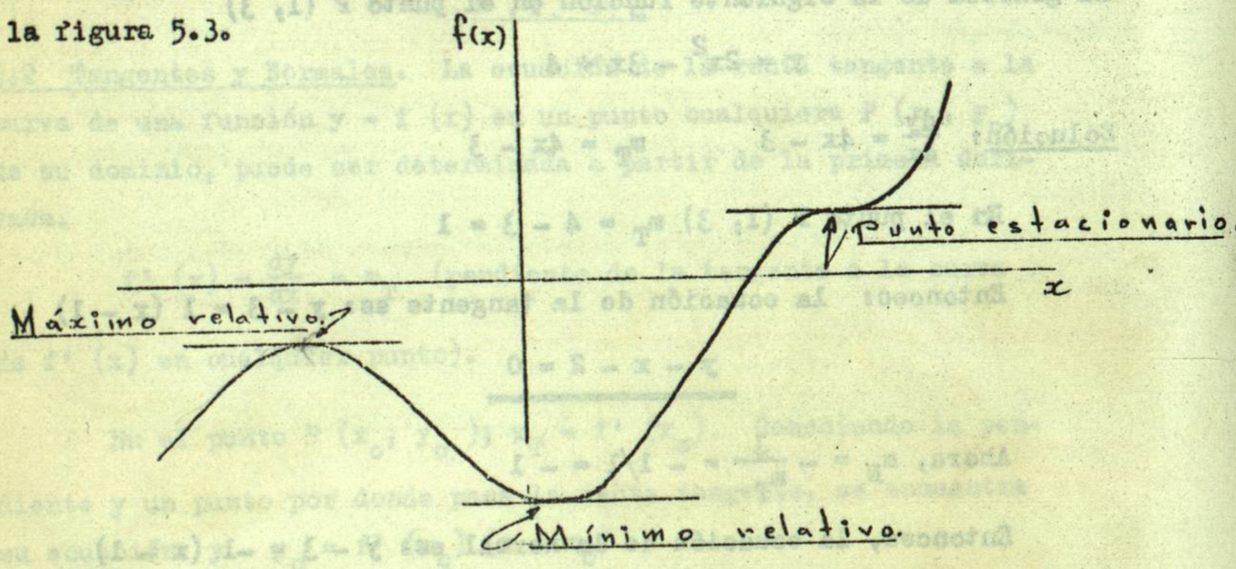


FIG. 5.3

De los conceptos y definiciones establecidas se deducen inmediatamente los procesos para la obtención de máximos y mínimos relativos de funciones de una variable utilizando la primera y segunda derivadas.

<u>I. Método de primera derivada.</u> En este primer método, se utiliza la primera derivada y consiste en lo siguiente:

1. Encontrar los puntos críticos de la función f (x). Para ésto, se encuentra la primera derivada f' (x) y se resuelven las ecuaciones:

   a) f' (x) = o (tangente horizontal)
   b) f' (x) = $\pm\infty$ (tangente vertical)

2. Se investiga el valor de la primera derivada para cada punto crítico de coordenadas finitas, dando a <u>x</u> valores a la izquierda y a la derecha del punto crítico en cuestión:

a) si f' (x) es positiva a la izquierda y negativa a la derecha del punto crítico en cuestión, entonces éste es un máximo relativo de f (x).

b) Si f' (x) es negativa a la izquierda y positiva a la derecha del punto crítico, entonces éste es un mínimo relativo de f (x).

c) Si f' (x) no cambia signo, el punto crítico no es máximo ni mínimo relativo de f (x).

La figura 5.4 ilustra el método de primera derivada. Los puntos P, Q y R, son los puntos críticos de tangente horizontal. No hay puntos críticos de tangente vertical.

P es un máximo relativo
Q es un mínimo relativo
R es un punto estacionario que no es máximo ni mínimo.

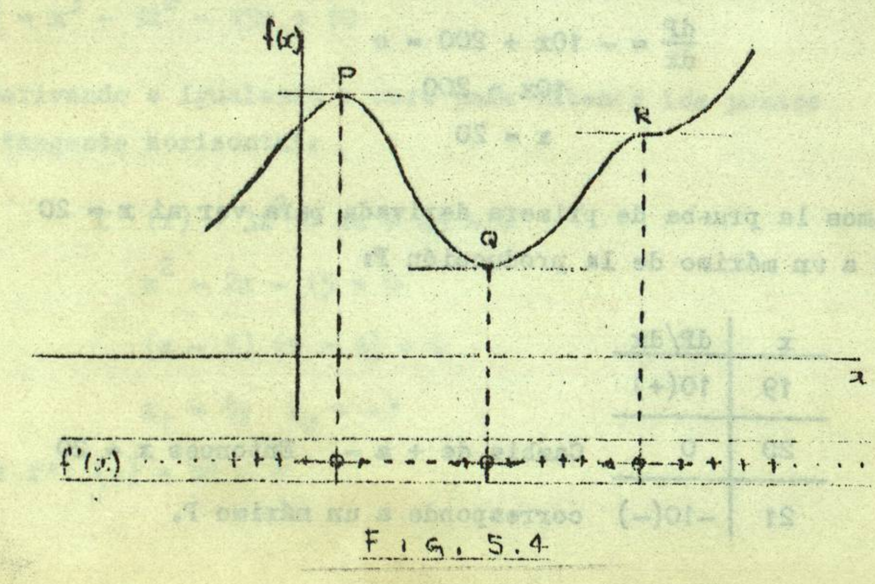


FIG. 5.4