Consideremos como ejemplo el siguiente:

Problema: Una huerta de manzanos tiene 40 árboles por hectárea y el promedio de producción es de 400 manzanas por árbol y por año. Si por cada árbol que se plante por hectárea, además de los 40, la producción promedio disminuye en 5 manzanas, determinar el número de árboles por hectárea que darán la máxima producción.

Solución. De acuerdo con el enunciado, la producción actual es $(400)(40) = 16{,}000$ manzanas por hectárea y por año. En general, Producción = (No. de árboles por hect.) (Produc. prom. anual de un árbol)

Sea: x = No. de árboles plantados, además de los 40, por hectárea.

Entonces:

Prod. Prom. anual de un árbol $= 400 - 5x$. Entonces la producción total será:

$$P = (40 + x)(400 - 5x)$$

Derivando:

$$\frac{dP}{dx} = (40 + x)(-5) + (400 - 5x)(1) = - 200 - 5x + 400 - 5x = -10x + 200$$

Ahora, igualando a cero para encontrar puntos críticos de tangente horizontal:

$$\frac{dP}{dx} = - 10x + 200 = 0$$
$$10x = 200$$
$$x = 20$$

Hagamos la prueba de primera derivada para ver si $x = 20$ corresponde a un máximo de la producción P:

x	dP/dx	
19	10(+)	
20	0	Cambia de + a –. Entonces $x = 20$
21	-10(–)	corresponde a un máximo P.

Entonces, la respuesta es que deben plantarse 20 árboles más por hectárea para obtener la máxima producción

$$P = (40 + 20)(400 - 100)$$
$$P = 18{,}000 \text{ manzanas / Ha.}$$

II. Método de segunda derivada. Este método se basa en que la segunda derivada determina el sentido de concavidad de la curva de la función:

1. Se encuentran los puntos críticos de tangente horizontal resolviendo la ecuación: $f'(x) = 0$.

2. Se encuentra la segunda derivada $f''(x)$ y se investiga su signo en los puntos críticos de tangente horizontal.

a) Si la segunda derivada es negativa, el punto crítico en cuestión es un máximo relativo. (Concavidad hacia abajo).

b) Si la segunda derivada es positiva, el punto crítico en cuestión es un mínimo relativo. (Concavidad hacia arriba)

c) Si la segunda derivada es cero, entonces la prueba no implica algo definitivo y debe usarse otro método para determinar si el punto crítico en cuestión es un máximo o un mínimo relativo.

Ejemplo: Encontrar los máximos y mínimos relativos de la función: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 10$

Solución: Derivando e igualando a cero para obtener los puntos críticos de tangente horizontal:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45 = 0$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0$$
$$(x - 5)(x + 3) = 0$$
$$x_1 = 5; \quad x_2 = -3$$

Ahora: $f''(x) = 6x - 6$

Para $x_1 = 5$: $f''(5)\ 30 - 6 = 24\ (+)$

Entonces $x_1 = 5$ corresponde a un mínimo relativo de $f(x)$:

$$f(5) = 125 - 75 - 225 + 10 = -165$$

El punto P $(5, -165)$ es un mínimo relativo en la gráfica de $f(x)$.

Para $x_2 = -3$: $f''(x) = -18 - 6 = -24\ (-)$

Entonces $x_2 = -3$ corresponde a un máximo relativo de $f(x)$:

$$f(-3) = -27 - 27 + 135 + 10 = 91$$

El punto Q $(-3, 91)$ es un máximo relativo en la gráfica de $f(x)$.

<u>5.4 Aplicaciones de la derivada en teoría económica.</u> Es común, en teoría económica, describir la variación de una variable con respecto a otra por medio de dos tipos de medida que son:

a) <u>Promedios</u>. Representan a la variable dependiente <u>y</u> en un intervalo de la variable independiente <u>x</u>. (Generalmente este intervalo tiene al cero como límite inferior, aunque esta condición no es necesaria.

Def. b) <u>Conceptos marginales</u>: Miden la variación de la variable dependiente <u>y</u> para variaciones pequeñas de la variable independiente <u>x</u>. (Generalmente esta variación pequeña es uno cuando <u>x</u> varía discretamente y tiende a cero cuando x varía continuamente.

De acuerdo con esta definición, los conceptos marginales pueden determinarse por medio del cálculo diferencial ya que la derivada es, por definición, la variación marginal en el caso continuo.

Consideremos la ley de demanda $p = f(x)$ cuya curva es decreciente. (Figura 5.5)

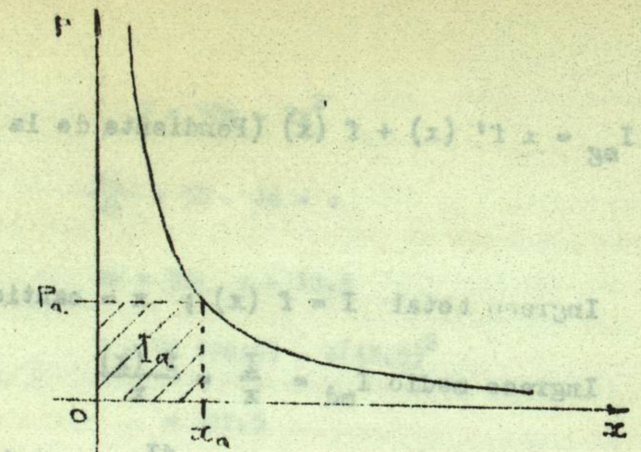

Fig. 5.5

Ingreso total al nivel de demanda x_a : $I_a = x_a P_a$

Ingreso medio al nivel de x_a:

$$I_a\ (\text{medio}) = \frac{x_a\ p_a}{x_a - o}\ (\text{por definición}).$$

$$I_a\ (\text{medio}) = \frac{x_a\ p_a}{x_a} = p_a$$

Entonces el precio P equivale al <u>Ingreso medio</u> correspondiente a una cantidad demandada <u>x</u> para todo valor de <u>x</u>. Por lo tanto, la función de demanda es la misma función del Ingreso medio, es decir:

$$I_{md} = f(x)$$

Entonces, la curva de demanda coincide con la del ingreso medio.

Para encontrar la función del ingreso marginal, consideremos la función del ingreso total:

Por definición, ingreso total es:

$$I = x\,f(x) \quad (\text{Cantidad demandada por el precio}).$$

Desde luego que, si $f(x)$ es continua, entonces I también es continua. El ingreso marginal I_{mg} es entonces por definición:

$$I_{mg} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \frac{dI}{dx}$$

$I_{mg} = x\, f'(x) + f(x)$ (Pendiente de la gráfica de $I = x\, f(x)$)

Resumen:

Si: Ingreso total $I = f(x)$; x = cantidad demandada

Ingreso medio $I_{md} = \frac{I}{x} = \frac{f(x)}{x}$

Ingreso marginal: $I_{mg} = \frac{dI}{dx} = f'(x)$

Ejemplo 1. Supongamos que la demanda por un cierto artículo A en un determinado mercado M es dada por la siguiente ley:

$$p = 50 - 2x \text{ (lineal)}; \; x = \text{cantidad demandada.}$$

Determinar el ingreso total, ingreso medio e ingreso marginal como funciones de la cantidad demandada x. Graficar.

De las definiciones:

Ingreso total: I = (precio) (cantidad demandada)

$$I = (50 - 2x)\, x$$

$$I = 50x - 2x^2$$

Ingreso medio: $I_{md} = \frac{\text{Ingreso total}}{\text{Cant. demandada}}$

$$I_{md} = 50 - 2x$$

Ingreso marginal: $I_{mg} = \frac{dI}{dx}$

$$I_{mg} = 50 - 4x$$

Gráficas: La gráfica del ingreso total es una parábola abierta hacia abajo. Cuando $x = o$; $I = o$. El máximo ingreso total lo encontramos por cálculo. (Es un punto crítico de tangente horizontal, es decir $\frac{dI}{dx} = o$).

$$I = 50x - 2x^2$$

$$\frac{dI}{dx} = 50 - 4x = o$$

$$4x = 50; \; x = 12.5$$

$$I = 50\,(12.5) - 2(12.5)^2$$

$$= 312.5$$

La gráfica del ingreso medio es una recta:

Intersecciones:

x	o	25
I_{md}	50	0

La gráfica del ingreso marginal es también una línea recta:

Intersecciones:

x	o	12.5
I_{mg}	50	o

Las curvas de ingreso total, ingreso medio ó ingreso marginal pueden presentarse en el mismo sistema de referencia. (Figura 5.6)

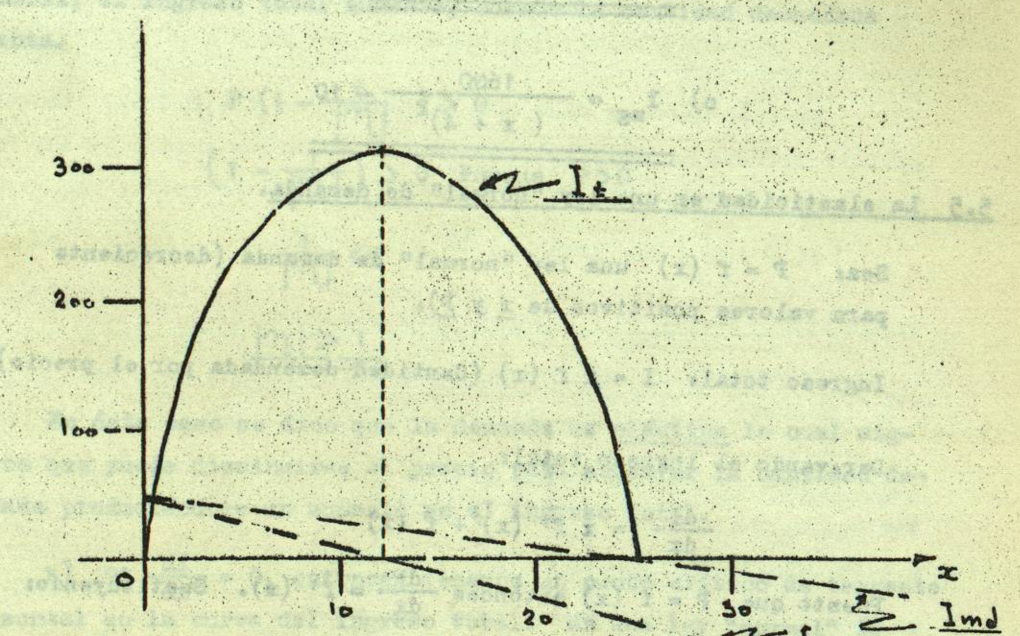

Fig. 5.6

Observaciones:

1. El ingreso total I es máximo cuando el ingreso marginal I_{mg} es cero. Esto es inmediato de la definición de ingreso marginal como la derivada del ingreso total con respecto a la cantidad demandada. (Cuando la derivada es cero, el ingreso total es máximo).

2. Cuando la demanda es lineal (como en este caso) la razón de cambio del ingreso marginal es el doble de la razón de cambio del ingreso medio.

$$\frac{d\,I_{mg}}{d\,x} = 2\,\frac{d\,I_{md}}{dx}$$

Ejemplo 2. Consideremos la siguiente ley de demanda: $P = \frac{400}{x+4} - 10$

Determinar I, I_{md}, I_{mg}, como funciones de x.

a) $I = \frac{400\,x}{x+4} - 10x$

b) $I_{md} = \frac{400}{x+4} - 10$

c) $I_{mg} = \frac{1600}{(x+4)^2} - 10$

5.5 La elasticidad en una ley "normal" de demanda.

Sea: $P = f(x)$ una ley "normal" de demanda (decreciente para valores positivos de x y P).

Ingreso total: $I = x\,f(x)$ (Cantidad demandada por el precio)

Derivando el ingreso total:

$$\frac{dI}{dx} = x\,f'(x) + f(x)$$

Puesto que $P = f(x)$ entonces $\frac{dP}{dx} = f'(x)$. Sustituyendo:

$$\frac{dI}{dx} = x\,\frac{dP}{dx} + P$$

Sacando a P de factor en el lado derecho:

$$\frac{dI}{dx} = P\left(\frac{x}{P}\,\frac{dP}{dx} + 1\right)$$

Ahora: $\frac{x}{P}\,\frac{dP}{dx}$ = Elasticidad del precio $= \frac{1}{\eta}$

$$\therefore\ \frac{dI}{dx} = P\,(1/\eta + 1) \qquad \begin{cases} \frac{dI}{dx} = \text{ingreso marginal} \\ P = \text{ingreso medio.} \end{cases}$$

Para una ley "normal" de demanda, η es negativo, así es que anteponiéndole un signo menos $(-\eta)$ consideraremos a η en valor absoluto $(|\eta|)$ lo cual es conveniente para la discusión que sigue:

$$\frac{dI}{dx} = P\left(1 - \frac{1}{|\eta|}\right); \quad |\eta| \geq 0$$

Consideremos las posibilidades para

$$\frac{dI}{dx} = \text{ingreso marginal:}$$

a) Si $\frac{dI}{dx} > 0$, entonces I es creciente hacia la derecha, es decir, el ingreso total aumenta, cuando la cantidad demandada aumenta.

$$P\left(1 - \frac{1}{|\eta|}\right) > 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{|\eta|}\right) > 0 \quad \text{Porque } P > 0$$

$$\frac{1}{|\eta|} < 1$$

$$|\eta| > 1$$

En éste caso se dice que la demanda es elástica lo cual significa que puede disminuirse el precio para aumentar la cantidad demandada produciéndose un aumento en el ingreso total.

b) Si $\frac{dI}{dx} = 0$, entonces tenemos un punto crítico de tangente horizontal en la curva del ingreso total. En una ley "normal" de