demanda, éste punto crítico es un máximo, es decir, el ingreso total disminuye cuando se aumenta ó disminuye la cantidad demandada:

En este caso $P\left(1 - \frac{1}{|\eta|}\right) = 0$

$$1 - \frac{1}{|\eta|} = 0$$

$$\frac{1}{|\eta|} = 1$$

$$|\eta| = 1$$

c) Si $\frac{dI}{dx} < 0$, entonces la curva del Ingreso total es decreciente, es decir, I disminuye al aumentar x:

$$P\left(1 - \frac{1}{|\eta|}\right) < 0$$

$$1 - \frac{1}{|\eta|} < 0 \qquad \text{Porque } P > 0$$

$$\frac{1}{|\eta|} > 1$$

$$|\eta| < 1$$

En este caso se dice que la demanda es inelástica. La siguiente gráfica ilustra los resultados obtenidos cuando la ley de demanda es lineal, como en el ejemplo considerado antes. (Fig. 5.7)

Si $P = a - bx$, entonces $\frac{dP}{dx} = -b$. Ahora $= \frac{x}{p}\frac{dP}{dx}$. Sustituyendo: $\eta = \frac{-bx}{a - bx}$. Veamos para que valor de x, $\eta = -1$:

$$\eta = \frac{-bx}{a - bx} = -1; \; -bx = -a + bx \; ; \; 2bx = a \; ; \; x = \frac{a}{2b}$$

Ahora el ingreso total es $I_t = p.x = (a - bx)\,x = ax - bx^2$. Derivando, se obtiene $I_{mg} = a - 2bx$. Para $x = \frac{a}{2b}$ se tiene $I_{mg} = a - 2b\,\frac{a}{2b} = 0$. Entonces $\eta = -1$, cuando el ingreso marginal es cero, es decir, cuando el ingreso total sea máximo.

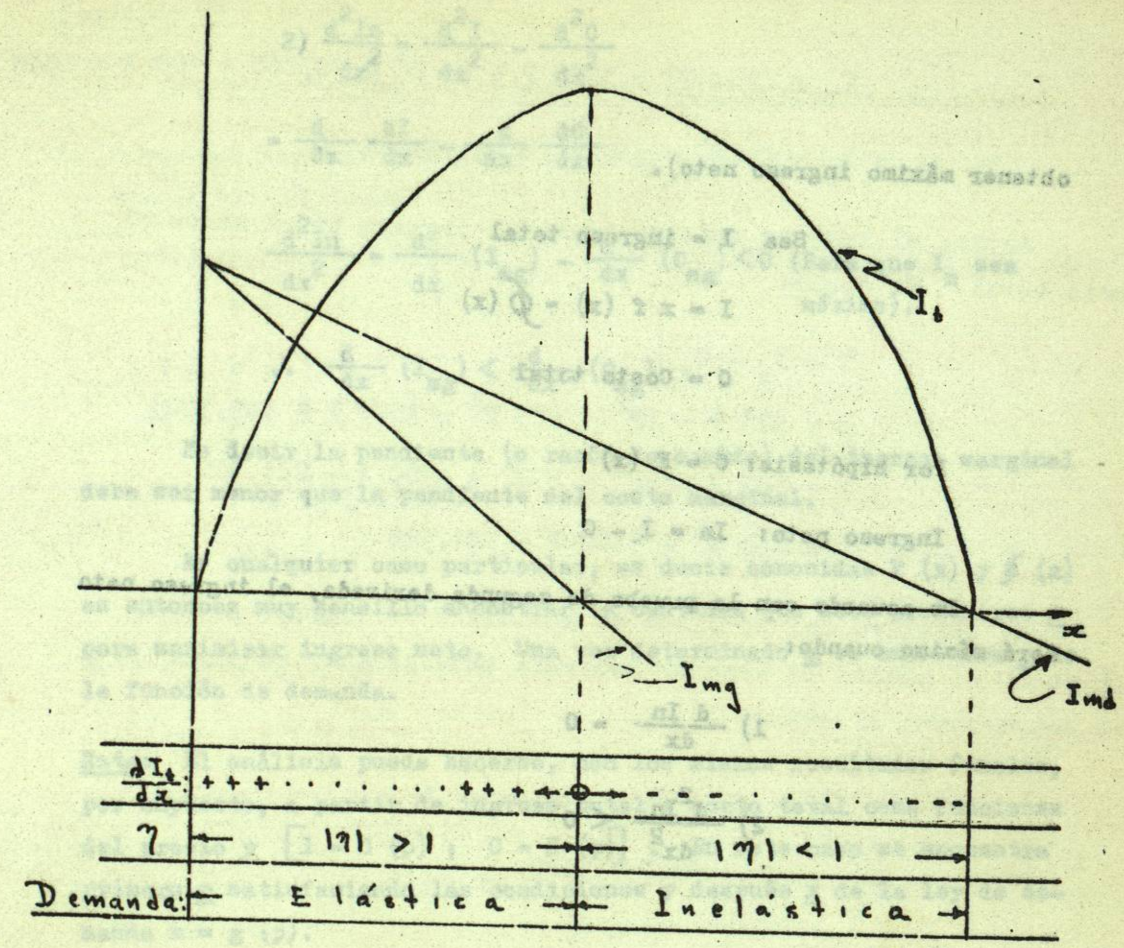

Fig. 5.7

5.6 Problema de monopolio. Supongamos que un monopolista produce un artículo A y sus costos totales a diferentes niveles de producción siguen la ley: $c = F(x)$; x = cant. producida. La demanda en el mercado ha sido también determinada y es la siguiente: $p = f(x)$; p = precio y x = cantidad demandada. El objetivo del monopolista es maximizar el ingreso neto dentro de los límites que se especifican en la función de demanda. Determinar las condiciones óptimas para el monopolista. (Precio del artículo y cantidad producida para obtener máximo ingreso neto).

Sea I = ingreso total

$$I = x\, f(x) = \phi(x)$$

C = Costo total

Por hipótesis: $C = F(x)$

Ingreso neto: $I_n = I - C$

De acuerdo con la prueba de segunda derivada, el ingreso neto será máximo cuando:

$$1)\quad \frac{d\, I_n}{dx} = 0$$

$$2)\quad \frac{d^2 I_n}{dx^2} < 0$$

Ahora:

$$1)\quad I_n = I - C$$

$$\frac{d\, I_n}{dx} = \frac{dI}{dx} - \frac{dC}{dx} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dI}{dx} = \frac{dC}{dx}$$

$\frac{dI}{dx}$ Ingreso marginal $= I_{mg}$

$\frac{dC}{dx}$ = Costo marginal $= C_{mg}$

Entonces la primera condición establece que el ingreso marginal sea igual al costo marginal. Gráficamente, las tangentes a las curvas de I y C, deben ser paralelas.

$$2)\quad \frac{d^2 I_n}{dx^2} = \frac{d^2 I}{dx^2} - \frac{d^2 C}{dx^2}$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{dI}{dx} - \frac{d}{dx}\frac{dC}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2 I_n}{dx^2} = \frac{d}{dx}(I_{mg}) - \frac{d}{dx}(C_{mg}) < 0 \quad \text{(Para que } I_n \text{ sea máximo).}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(I_{mg}) < \frac{d}{dx}(C_{mg})$$

Es decir la pendiente (o razón de cambio) del ingreso marginal debe ser menor que la pendiente del costo marginal.

En cualquier caso particular, es decir conocidas $F(x)$ y $\phi(x)$ es entonces muy sencillo encontrar la cantidad que debe producirse $\underline{x}$ para maximizar ingreso neto. Una vez determinado $\underline{x}$ se encuentra $\underline{p}$ de la función de demanda.

<u>Nota</u>: El análisis puede hacerse, con los mismos resultados finales, por supuesto, a partir de ingreso total y costo total como funciones del precio $\underline{p}$ $[I = G(p)\ ;\ C = H(p)]$. En este caso se encuentra primero $\underline{p}$ satisfaciendo las condiciones y después $\underline{x}$ de la ley de demanda $x = g(p)$.

Consideremos el siguiente ejemplo:

<u>Problema</u>: Un monopolista produce $\underline{x}$ unidades de un cierto artículo a un costo total de: $C_t = x^2 - 20x + 1500$. La demanda en el mercado es dada por la siguiente ley: $x = 500 - 5P$, donde $\underline{P}$ es el precio y $\underline{x}$ es la cantidad demandada. Determinar el precio del artículo y la cantidad que debe producirse para obtener el máximo ingreso neto.

<u>Solución</u>. El ingreso total es igual al precio por la cantidad demandada. Entonces, de la ley de demanda, se obtiene:

$$I_t = 500\,P - 5P^2$$

Sustituyendo $x = 500 - 5P$ en la función del costo total:

$$C_t = (500 - 5P)^2 - 20\,(500 - 5P) + 1500$$

$$C_t = 250{,}000 - 5000\ P + 25\ P^2 - 10{,}000 + 100\ P + 1500$$

$$C_t = 25\ P^2 - 4900\ P + 241{,}500$$

Ahora, el ingreso neto es igual al ingreso total menos el costo total. Es decir:

$$I = I_t - C_t$$

$$I = 500\ P - 5P^2 - (25\ P^2 - 4900\ P + 241{,}500)$$

$$I = 500\ P - 5P^2 - 25P^2 + 4900\ P - 241{,}500$$

$$I = -30\ P^2 + 5400\ P - 241{,}500$$

El objetivo del problema es maximizar el ingreso neto I. Aplicando el método de segunda derivada para obtener el valor de P que corresponda al máximo I:

$$\frac{dI}{dP} = -60\ P + 5400 = 0$$

$$60\ P = 5400$$

$$P = 90$$

Ahora:

$$\frac{d^2\ I}{d\ P^2} = -60$$

Entonces: $P = 90$ corresponde a un máximo Ingreso neto.

Ahora, de la ley de demanda:

$$x = 500 - 5P = 500 - 450$$

$$x = 50$$

Entonces, deberán producirse 50 unidades del artículo y venderse a un precio de 90, para obtener el máximo ingreso neto.

Sustituyendo $P = 90$ en la función del ingreso neto:

$$I = -30\ (8100) + 5400\ (90) - 241{,}500$$

$$I = -243{,}000 - 241{,}500 + 486{,}000$$

$$I = 1500$$

Ejercicio 15

Tema: Tangentes y normales. Puntos críticos y Puntos de inflexión.

1. Encontrar los puntos críticos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

1.1 $f(x) = x^2 - 2x + 4$

1.2 $f(x) = (x - 1)^5\ (x + 4)^2$

1.3 $y^2 - 3y + 1 = 0$

1.4 $x = y^3 - 3y + 5$

1.5 $y = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$

1.6 $g(x) = x^2 - 3x + 2$

1.7 $f(x) = x\ e^x$

1.8 $f(x) = \ln(x + 1)$

1.9 $g(x) = e^{x^2} - 4$

1.10 $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 5x + 4}$

2. Encontrar las ecuaciones de la tangente y la normal a la gráfica de las siguientes funciones en el punto indicado:

2.1 $f(x) = 3x^3 - 2x + 4$	en P (0, 4)
2.2 $y = (x - 3)\ (2x - 4)^5$	en P (2, 0)
2.3 $x^3 - 3\ xy + 2y = 0$	en P (0, 0)
2.4 $f(x) = (x^3 + 3x - 2)^2$	en P (1, 4)
2.5 $x = y^2 - 4y + 1$	en P (-2,3)
2.6 $f(x) = e^x$	en P (0, 1)
2.7 $f(x) = \ln x$	en P (1, 0)
2.8 $g(x) = (x - 1)\ e^{2x}$	en P (0, -1)

3. Determinar el sentido de concavidad en todo el dominio de la función:

$$f(x) = (x - 1)^2\ (x + 4)$$

4. Determinar el crecimiento ó decrecimiento y el sentido de conca-

vidad en todo el dominio de la función:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Ejercicio 16

Tema: Máximos y mínimos

1. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones: (Tangente horizontal y tangente vertical): Determinar si son puntos máximos, mínimos ó estacionarios.

1.1 $y = x - 3x^2$

1.2 $3y^2 - 6y - x = 0$

*1.3 $x^2 + xy + 5y^2 = 9$

1.4 $y = (x^2 - 3)(x + 4)^3$

1.5 $y = \dfrac{x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

1.6 $y = x^3 - 3x^2 + 6$

1.7 $f(x) = 5 + x^{2/3}$

1.8 $g(x) = (2x - 1)^{1/3}$

2. Encontrar los máximos y mínimos de las siguientes funciones, por el método de la primera derivada:

2.1 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2.2 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$

*2.3 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

2.4 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$

2.5 $f(x) = (x + 2)^2 (x - 1)^3$

2.6 $f(x) = (2 + x)^{1/3} (1 - x)^{2/3}$

2.7 $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x + 4}$

2.8 $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$

2.9 $f(x) = 2x^2 - 4x$

3. Encontrar máximos y mínimos por el método de la segunda derivada:

3.1 $f(x) = x(x^2 + x - 8)$

3.2 $f(x) = x^4 - 4x$

3.3 $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$

Ejercicio 17

Tema: Aplicaciones de máximos y mínimos.

1. Una empresa desea fabricar cajas de cartón (sin tapa) de piezas rectangulares de 20 cms. por 30 cms. cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando hacia arriba los lados. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de las cajas para obtener máximo volumen?

2. Una industria está situada fuera de una ciudad junto al paso de una vía de ferrocarril. El gerente pide una corrida especial de la ciudad a la industria para sus empleados. La empresa ferrocarrilera está de acuerdo en establecer la corrida especial siempre que viajen por lo menos 200 personas, entendiéndose que el pasaje les costará \$8.00 por persona si van 200 personas, y se disminuirá en un centavo por cada persona que sobrepase a las 200, (es decir: por ejemplo, si viajan 250 personas, el pasaje será de \$7.50 por persona). Qué número de pasajeros proporcionará la máxima utilidad al ferrocarril?

3. Un edificio tiene 80 oficinas. Cuando la renta es de \$60.00 mensuales por oficina, todas están ocupadas. Por cada \$2.00 de aumento mensual en la renta por oficina, se desocupa una. Si los gastos fijos (conservación, impuestos y limpieza) son \$6.00 por oficina, que renta producirá la máxima utilidad al propietario?

4. Una huerta de manzanos tiene 40 árboles por hectárea y el promedio de producción es de 300 manzanas por árbol por año.

Si por cada árbol que se plante por hectárea, además de los 40, la producción promedio disminuye en 5 manzanas, determinar el número de árboles por hectárea que darán la máxima producción.

5. Una empacadora desea fabricar latas en forma de cilindro circular con un volumen de 1570 cms.^{3} para uno de sus productos. Determinar el radio y la altura que proporcionan mínimo costo por lata, es decir mínima superficie total para el cilindro circular. (Superficie lateral mas las dos tapas).

Fórmulas:

1. Area de un círculo $= \pi r^2$
2. Area lateral del cilindro $= 2\pi rh$
3. Volumen del cilindro $= \pi r^2 h$

$\pi = 3.14$ (aproximado a 2 decimales).

6. Un granjero tiene 800 mts. de cerca con la que desea cercar un terreno rectangular. Cuáles deberán ser las dimensiones del terreno de manera que obtengan la máxima área posible, si uno de los lados no necesita cerca por ser el margen de un río?

Ejercicio 18

Tema: Aplicaciones de la derivada a teoría económica.

1. Supongamos que la demanda por un artículo en determinado mercado es dada por la siguiente ley:

$$P = \frac{60}{x + 10} \; ; \quad p = \text{precio}, \quad x = \text{cantidad demandada.}$$

1.1 Graficar la ley de demanda y verificar por medio de cálculo diferencial que la curva de demanda es decreciente y cóncava hacia arriba.

1.2 Encontrar el ingreso total como una función de la cantidad demandada, hacer su gráfica y determinar su punto máximo.

1.3 Encontrar el ingreso marginal como una función de la cantidad demandada, hacer su gráfica y verificar que el ingreso total es máximo cuando el ingreso marginal es cero.

2. La demanda en un mercado monopolizado sigue la ley: $p = 100 - 3x$ y el monopolista produce x unidades a un costo total de: $C = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1500$. Determinar las condiciones óptimas para el monopolista (Precio del artículo y cantidad que debe producirse para obtener máximo ingreso neto).

* 3. El costo total de plantar de árboles madereros una región es de \$10,000. El valor de la madera después de t años es $100\, e^t$. Si la razón de interés es 5% compuesto anualmente, entonces el valor actual de la madera es dado por:

$y = (100\, e^t - 10{,}000)\, e^{-5t}$. Determinar el máximo valor actual de la madera aplicando el método de diferenciación logarítmica.

4. La demanda por un artículo en determinado mercado es dada por la siguiente ley:

$$P = 800 - 2x^2$$

x = cantidad demandada

P = precio por unidad

4.1 Graficar la ley de demanda y verificar, por medio del cálculo, que la curva de demanda es decreciente y cóncava hacia abajo para todo x mayor ó igual que cero.

4.2 Encontrar el ingreso total y el ingreso marginal como funciones de la cantidad demandada.

4.3 Encontrar la elasticidad de la demanda y la elasticidad del precio cuando la cantidad demandada es igual a 10.