CAPITULO 6

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

6.1 Introducción. Si una variable $\underline{w}$ está relacionada con otras variables $x, y, z, \ldots$, de manera que para cada conjunto de valores $x_0, y_0, z_0, \ldots$, asignados a las variables $x, y, z, \ldots$, de sus respectivos dominios de definición, corresponde uno o más valores a la variable $\underline{w}$, entonces se dice que $\underline{w}$ es una función de $x, y, z, \ldots$

Observaciones.

a) Si $w = f(x, y, z, \ldots)$, entonces decimos que $\underline{w}$ es una función explícita de $x, y, z, \ldots$

b) Si $f(w, x, y, z, \ldots) = 0$, entonces decimos que $\underline{w}$ es una función implícita de $x, y, z, \ldots$

Ejemplos: a) $w = 3x^2 - 2xy + 4z$. $\underline{w}$ es una función explícita de x, y, z.

b) $3w^2 - 2xzw + y^2 z^2 = 15$. $\underline{w}$ es una función implícita de x, y, z.

Los conceptos y definiciones establecidos para funciones de una variable, así como sus propiedades, teoremas, reglas de diferenciación, etc., serán extendidas en forma similar para funciones de varias variables. Para tratar de simplificar y observar el significado geométrico de los conceptos dedicaremos especial atención a las funciones de 2 variables, pues para funciones de más

de dos variables la interpretación geométrica en espacios ene-dimensionales, es abstracta.

Límite. Definiremos el límite para una función de dos variables. Para funciones de más de dos variables el concepto de límite es inmediato.

Def. Sea $w = f(x, y)$. El límite de $\underline{w}$ cuando $\underline{x}$ tiende a x_0 y $\underline{y}$ tiende a y_0 es igual a $\underline{A}$ si $\underline{w}$ puede acercarse todo lo que se quiera a $\underline{A}$, acercando suficiente y simultáneamente $\underline{x}$ a x_0 y $\underline{y}$ a y_0.

En lenguaje matemático:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A \text{ si para todo } \varepsilon > 0,$$

Existen $\underline{\delta}$ y $\underline{\gamma}$ tales que:

$$|F(x, y) - A| < \varepsilon \text{ para todo } x, y, \text{ tales que:}$$

$$\begin{cases} |x - x_0| < \delta \\ |y - y_0| < \gamma \end{cases}$$

Continuidad. Sea $w = f(x, y)$. $\underline{w}$ es contínua en $P(x_0, y_0)$ si se cumplen las condiciones siguientes:

1) $f(x_0, y_0)$ está definida,

2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ existe,

3) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \quad , y) = f(x_0, y_0)$

Obsérvese que esta definición de continuidad, como en el caso de funciones de una variable corresponde al significado intuitivo o natural de continuidad. La gráfica de una función de 2 variables es, en general, una superficie en el espacio tri-dimensional como se ha estudiado en la geometría analítica del espacio.

6.2 Derivadas parciales. Para el análisis de funciones de varias variables es de utilidad investigar el comportamiento de la función en la dirección de una de las variables, es decir, permitiendo a una de las variables tomar diferentes valores y manteniendo a las demás constantes. Este artificio matemático, que puede efectuarse en sucesión con las diferentes variables de la función motiva la definición de las derivadas parciales.

Def. Sea $w = f(x, y, z, \dots)$. La derivada parcial de w con respecto a x es la derivada de w con respecto a x considerando las demás variables como constantes. (Esto equivale a considerar a w como una función de x únicamente).

Usaremos la letra griega δ para indicar derivada parcial y distinguirla de la derivada ordinaria:

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots)}{\Delta x}$$

Escogimos la variable x para la definición. Para las demás variables la derivada parcial es semejante.

Consideremos el caso particular de una función de 2 variables para observar el significado geométrico de las derivadas parciales:

Sea $w = f(x, y)$

De acuerdo con la definición:

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\delta w}{\delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Puesto que $\frac{\delta w}{\delta x}$ es la derivada de w con respecto a x manteniendo a y constante, podemos aprovechar las reglas de diferenciación ordinaria que tenemos para encontrar $\frac{\delta w}{\delta x}$.

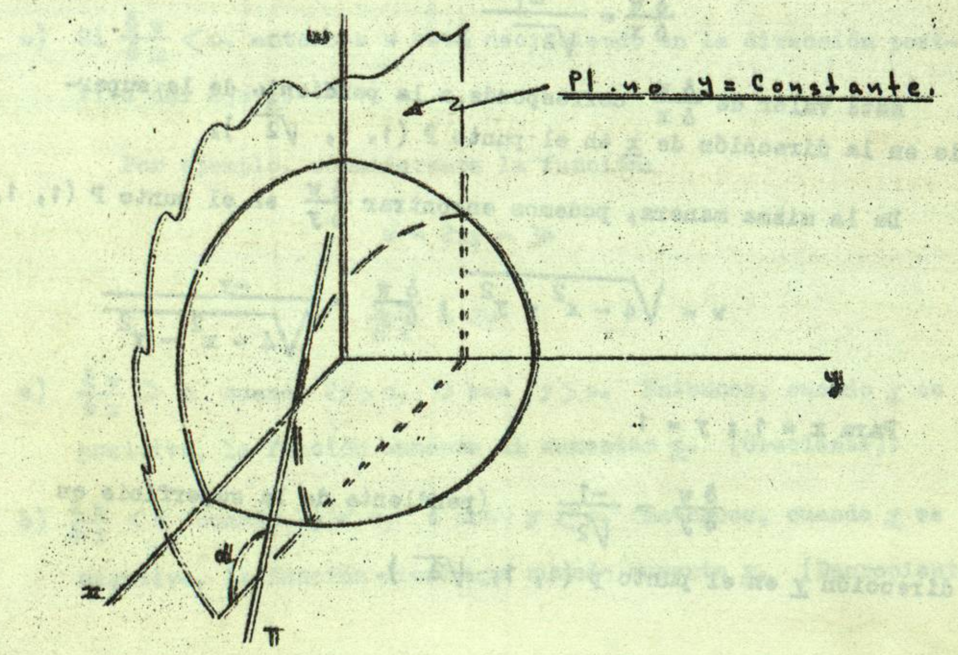
Geométricamente, el mantener a y constante corresponde a considerar una sección paralela al plano $x - w$. De acuerdo con la definición, $\frac{\delta w}{\delta x}$ es la pendiente de la curva de intersección de la superficie $w = f(x, y)$ y el plano y = constante. De la misma manera, $\frac{\delta w}{\delta y}$ es la pendiente de la curva de intersección de la superficie con el plano x = constante.

Por ejemplo, consideremos la siguiente superficie: $w = \sqrt{4-x^2-y^2}$

Trazas: (Intersecciones con los planos coordenados).

Si $w = o$ obtenemos la curva de intersección de la superficie con el plano $x - y$. En este caso es el círculo: $x^2 + y^2 = 4$ que tiene centro en $c\ (o, o)$ y radio $r = 2$.

Similarmente para $x = o$ y $y = o$ encontramos que las trazas en los plano $y - w$ y $x - w$ son círculos con centro en el origen y radio $r = 2$, como indica la figura 6.1.



Encontremos la derivada parcial de w con respecto a x:

$$w = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

La derivada parcial de w con respecto a x corresponde a la tangente del ángulo α, es decir, a la pendiente de la tangente T a la curva de intersección de la superficie con el plano y = constante.

Puesto que $\frac{\delta w}{\delta x}$ es una función de x y y podemos encontrar su valor a cualquier nivel del dominio de definición de y y para cualquier valor del correspondiente dominio de definición de x. Por ejemplo, si $y = 1$:

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{-x}{\sqrt{3 - x^2}}$$

Ahora, para cualquier valor de x del dominio de definición de esta función de x por ejemplo, para $x = 1$:

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Este valor de $\frac{\delta w}{\delta x}$ corresponde a la pendiente de la superficie en la dirección de x en el punto P $(1, 1, \sqrt{2})$.

De la misma manera, podemos encontrar $\frac{\delta w}{\delta y}$ en el punto P $(1, 1, \sqrt{2})$.

$$w = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \; ; \; \frac{\delta w}{\delta y} = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Para $x = 1$; $y = 1$

$$\frac{\delta w}{\delta y} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$ (pendiente de la superficie en la dirección y en el punto p $(1, 1, \sqrt{2})$.

Estos conceptos geométricos se extienden abstractamente a funciones de más de dos variables cuyas gráficas son conceptos abstractos llamados hiper-cuperficies en espacios abstractos ene-dimensionales. Así, por ejemplo, $w = f(x, y, z, \ldots)$, la derivada parcial de w con respecto a z $\left(\frac{\delta w}{\delta z}\right)$ es la pendiente de la hiper-superficie: $w = f(x, y, z, \ldots)$ en la dirección positiva del eje z.

6.3 Crecimiento o decrecimiento de una función de varias variables.

El valor de la derivada parcial de una función de varias variables $w = f(x, y, z, \ldots)$ con respecto a una de ellas, proporciona un indicador del comportamiento de la función en la dirección de la variable independiente considerada. Lo siguiente es una consecuencia inmediata de la interpretación geométrica de las derivadas parciales:

a) Si $\frac{\delta w}{\delta x} > 0$, entonces $w = f(x, y, z, \ldots)$ está creciendo en la dirección positiva del eje x.

b) Si $\frac{\delta w}{\delta x} = 0$, entonces w está en un punto crítico de tangente horizontal en la dirección x (<u>Posiblemente</u> un máximo o mínimo relativo de la función).

c) Si $\frac{\delta w}{\delta x} < 0$, entonces w está decreciendo en la dirección positiva del eje x.

Por ejemplo, consideremos la función:

$$w = 2xy - 3z$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = 2y$$

a) $\frac{\delta w}{\delta x} > 0$ cuando $2y > 0$, ó sea $y > 0$. Entonces, cuando y es positiva, la función aumenta al aumentar x. (Creciente).

b) $\frac{\delta w}{\delta x} < 0$ cuando $2y < 0$, ó sea $y < 0$. Entonces, cuando y es negativa, la función disminuye cuando aumenta x. (Decreciente).

De la misma manera podemos considerar:

$\frac{\delta w}{\delta y} = 2x$ (los resultados son semejantes).

Por último: $\frac{\delta w}{\delta z} = -3 < 0$. Esta derivada parcial es constante y negativa, lo cual significa que la función w disminuye al aumentar z independientemente de x y y. (Decreciente en la dirección z).

En este ejemplo sencillo hemos obtenido resultados que podían haberse deducido lógicamente de la función original sin necesidad de las derivadas parciales. Sin embargo, el uso de las derivadas parciales para éste tipo de análisis, proporciona un proceso sistemático que puede aplicarse a funciones de cualquier número de variables, por complicadas que sean, con la condición de que sus derivadas parciales existan.

6.4 Derivadas parciales de alto orden

De la misma manera que hemos definido las derivadas ordinarias de alto orden, podemos definir las derivadas parciales de alto orden efectuando el proceso de derivación parcial sucesivamente. La única diferencia en el caso de derivadas parciales es que podemos cambiar la variable independiente durante la derivación sucesiva por lo que resultan tantas derivadas parciales de un orden determinado como permutaciones, permitiendo repeticiones, pueden hacerse con las variables independientes.

Por ejemplo, consideremos la función general de n variables $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Las segundas derivadas parciales son:

$$f_{x_1x_1} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_1^2} = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(\frac{\delta w}{\delta x_1}\right)$$

$$f_{x_2x_2} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_2^2} = \frac{\delta}{\delta x_2}\left(\frac{\delta w}{\delta x_2}\right)$$

$$f_{x_nx_n} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_n^2} = \frac{\delta}{x_n}\left(\frac{\delta w}{\delta x_n}\right)$$

$$f_{x_1x_2} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_1\,\delta x_2} = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(\frac{\delta w}{\delta x_2}\right)$$

$$f_{x_1x_3} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_1\,\delta x_3} = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(\frac{\delta w}{\delta x_3}\right)$$

$$\vdots$$

$$f_{x_{n-1}x_n} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_{n-1}\,\delta x_n} = \frac{\delta}{\delta x_{n-1}}\left(\frac{\delta w}{\delta x_n}\right)$$

$$\vdots$$

$$f_{x_1x_n} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_1\,\delta x_n} = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(\frac{\delta w}{\delta x_n}\right)$$

El número total de segundas derivadas parciales es igual a n^2. (no. de permutaciones permitiendo repeticiones de n variables tomadas de dos en dos).

La derivación parcial puede efectuarse cualquier número de veces que permita la función. En general, el número de derivadas parciales de orden m puede llegar a un máximo de n^m ó sea el número de órdenes, permitiendo repeticiones, en que pueden ser arregladas las n variables tomadas de m en m.

El siguiente teorema será establecido sin demostración:

Teorema. Sea w una función elemental (algebraica, trigonométrica, logarítmica ó exponencial). Si w y sus derivadas parciales son continuas en sus dominios de definición, entonces el orden de diferenciación parcial no afecta el resultado.

De acuerdo con éste teorema podemos encontrar las derivadas de alto orden de diferentes maneras. Por ejemplo:

$$\frac{\delta^2 w}{\delta x_1\,\delta x_2} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_2\,\delta x_1} \;; \quad \frac{\delta^3 w}{\delta x_1^2\,\delta x_2} = \frac{\delta^3 w}{\delta x_2\,\delta x_1^2} = \frac{\delta^3 w}{\delta x_1\delta x_2\delta x_1} \;;$$

etcétera. Además permite encontrar una derivada parcial de alto orden siguiendo el orden que mejor convenga tomando en cuenta lo complicado de la función con respecto a las diferentes variables independientes.

Consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Sea $w = f(x, y, z) = x^2 - 3xyz + x^2y^2 + 2xz^2$

Encontrar: a). $f_{xxy} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta w}{\delta y}\right)\right)$

b). $f_{zz} = \frac{\delta^2 w}{\delta z^2}$

Solución:

a) Derivando primeramente con respecto a $\underline{y}$:

$$\frac{\delta w}{\delta y} = -3xz + 2x^2y$$

Ahora, derivando con respecto a $\underline{x}$:

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta w}{\delta y}\right) = -3z + 4xy$$

Derivando nuevamente con respecto a $\underline{x}$:

$$\frac{\delta}{\delta x}\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta w}{\delta y}\right) = 4y$$

$$\therefore \underline{\underline{f_{xxy} = 4y}}$$

b) Derivando con respecto a $\underline{z}$:

$$\frac{\delta w}{\delta z} = -3xy + 4xz$$

Volviendo a derivar con respecto a z:

$$\frac{\delta^2 w}{\delta z^2} = 4x$$

$$\therefore \underline{\underline{f_{zz} = 4x}}$$

Ejemplo 2

Sea $w = f(x, y) = \sqrt{x^3 - 3} + 3xy - \frac{2x}{x^2 - 1}$

Encontrar $f_{yx} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta w}{\delta x}\right)$

Solución:

a) Derivando primeramente con respecto a $\underline{x}$:

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 3}} + 3y - \frac{2(x^2 - 1) - (2x)\,2x}{(x^2 - 1)^2}$$

Ahora, derivando con respecto a $\underline{y}$:

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta w}{\delta x}\right) = 3$$

Es decir, $\underline{\underline{f_{yx} = 3}}$

b) $f_{yx} = f_{xy}$, es decir, podemos alterar el orden de la derivación parcial. En este caso es obviamente conveniente derivar primeramente con respecto a $\underline{y}$ y después derivar con respecto a $\underline{x}$:

$$\frac{\delta w}{\delta y} = 3x;$$

$$\frac{\delta}{\delta x}\frac{\delta w}{\delta y} = 3$$

$$\underline{\underline{f_{xy} = f_{yx} = 3}}$$

6.5 Interpretación geométrica de las segundas derivadas parciales.

Consideremos la función siguiente: $w = f(x, y)$. Su gráfica es una superficie en el espacio tridimensional. La derivada parcial de $\underline{w}$ con respecto a $\underline{x}$ mide la rapidez de cambio de la superficie en la dirección $\underline{x}$. Por otra parte, $\frac{\delta w}{\delta x}$ es igual a la pendiente de la tangente a la superficie en la dirección $\underline{x}$. Entonces la segunda derivada parcial de $\underline{w}$ con respecto a $\underline{x}$ mide la