rapidez de cambio de la pendiente en la dirección x.

Entonces, se tienen los siguientes resultados semejantes a los obtenidos para la segunda derivada ordinaria en funciones de una variable:

a) Si $\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} > 0$, la superficie es cóncava hacia arriba en la dirección x porque la pendiente de la tangente en la dirección x está aumentando.

b) Si $\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} < 0$, la superficie es cóncava hacia abajo en la dirección x porque la pendiente está disminuyendo en la dirección x.

Para la dirección y, se obtienen resultados semejantes siguiendo el mismo razonamiento.

Si w es una función de mas de 2 variables, entonces estos conceptos geométricos se extienden, en forma abstracta, a espacios n-dimensionales dónde $n > 3$. El crecimiento ó decrecimiento y el sentido de concavidad de la hiper-superficie en determinada dirección puede encontrarse de la misma manera que para el caso de una función de 2 variables.

Volviendo a la función de 2 variables $w = f(x, y)$, la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x y con respecto a y mide la rapidez de cambio en la dirección y, de la pendiente en la dirección x. Ahora, puesto que $\frac{\delta^2 w}{\delta y\, \delta x} = \frac{\delta^2 w}{\delta x\, \delta y}$,

entonces también mide la rapidez de cambio en la dirección x de la pendiente en la dirección y de la superficie en cuestión.

6.6 Diferenciales. Entre las notaciones que hemos utilizado para la derivada de una función de una variable, tenemos la siguiente:

Si $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La expresión $\frac{dy}{dx}$ es un símbolo para denotar la primera derivada de y con respecto a x. Ahora definiremos lo que se llama los diferenciales de x y y de manera que el cociente del diferencial de y entre el diferencial de x sea la derivada de y con respecto a x:

Def. 1. Diferencial de x. El diferencial de la variable independiente x es igual al incremento de la variable.

Notación: Diferencial de $x = dx = \Delta x$.

Def. 2. Diferencial de y. El diferencial de la variable dependiente y es igual a su derivada con respecto a x por el diferencial de x.

En símbolos:

Diferencial de $y = dy = f'(x)\, dx$

Interpretación geométrica. Consideremos la función $y = f(x)$. Si aplicamos un incremento Δx a la variable independiente x, obtenemos un correspondiente incremento en la variable dependiente Δy. Si partimos del punto $P(x, y)$, después del incremento estaremos en el punto: $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$, como se indica en la figura 6.2.

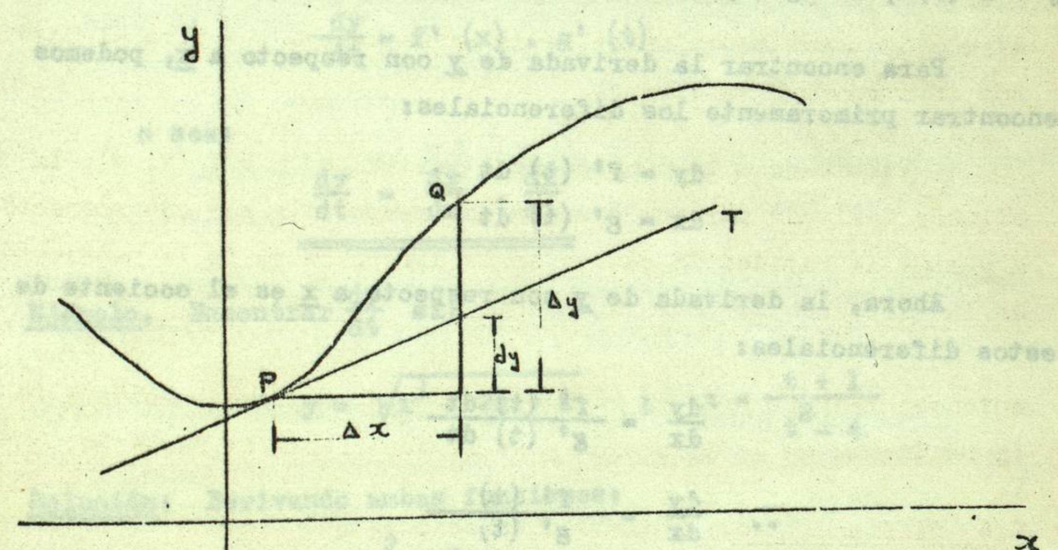

FIG. 6.2

Por definición de los diferenciales:

$$dx = \Delta x$$

$$dy = f'(x)\,dx = f'(x)\,\Delta x = \text{pendiente de la tangente en } p \text{ por el incremento de } x.$$

De la figura 6.2 se deduce que $dy \neq \Delta y$, excepto cuando la gráfica de $y = f(x)$ es una recta. Sin embargo el diferencial de y se considera una buena aproximación del incremento de y, cuando el incremento de x es pequeño comparado con el valor de la variable independiente x.

Aplicaciones. De acuerdo con la definición, los diferenciales pueden ser manejados como cantidades algebraicas y la derivada de y con respecto a x es igual al cociente de los diferenciales de y y x. Ahora utilizaremos los diferenciales para el cálculo de derivadas y más adelante serán utilizados en el Cálculo Integral.

1. Supongamos que x y y son funciones de un parámetro t. Es decir: $y = f(t)$; $x = g(t)$.

Para encontrar la derivada de y con respecto a x, podemos encontrar primeramente los diferenciales:

$$dy = f'(t)\,dt$$
$$dx = g'(t)\,dt$$

Ahora, la derivada de y con respecto a x es el cociente de estos diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)\,dt}{g'(t)\,dt}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Ejemplo. Encontrar la derivada de y con respecto a x si:

$$y = t^3 - 2t + 4$$
$$x = 2t^2 - 3$$

Solución: Derivando y y x con respecto a t:

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 2$$

$$\frac{dx}{dt} = 4t$$

Entonces: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2 - 2}{4t}$$

2. La regla de cadena para derivar una función, puede ser demostrada por medio de diferenciales. Supongamos que: $y = f(x)$; $x = g(t)$.

Por definición de los diferenciales; se tiene:

$$dy = f'(x)\,dx \;;\; dx = g'(t)\,dt$$

Sustituyendo $dx = g'(t)\,dt$ en la expresión para el diferencial de y:

$$dy = f'(x)\;g'(t)\,dt$$

Ahora, puesto que t es la variable independiente, $dt = \Delta t$. Dividiendo ambos lados por dt, se tiene:

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\,.\,g'(t)$$

o sea:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Ejemplo. Encontrar $\frac{dy}{dt}$ si:

$$y = \sqrt{x^3 - 2x + 1} \;;\; x = \frac{t + 1}{t^2 - 4}$$

Solución: Derivando ambas funciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2}{2\sqrt{x^3 - 2x + 1}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2 - 4 - (t + 1)(2t)}{(t^2 - 4)^2} = \frac{-t^2 - 2t - 4}{(t^2 - 4)^2}$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{3x^2 - 2}{2\sqrt{x^3 - 2x + 1}} \cdot \frac{-t^2 - 2t - 4}{(t^2 - 4)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(3x^2 - 2)(-t^2 - 2t - 4)}{2(t^2 - 4)^2 \sqrt{x^3 - 2x + 1}}$$

6.7 Diferenciales de funciones de varias variables. Hemos definido antes los diferenciales para una función de una variable $y = f(x)$ de la siguiente manera:

$$dx = \Delta x \; ; \quad dy = f'(x)\, dx = \frac{dy}{dx} \cdot dx$$

Al establecer estas definiciones demostramos gráficamente que dy es una buena aproximación del incremento de y, cuando Δx es pequeño. Otra utilidad importante que obtuvimos de los diferenciales fué la solución al problema de encontrar la derivada de una función y de una variable x que a su vez es función de otra variable t. Específicamente establecimos la siguiente:

Si $y = f(x)$ y $x = g(t)$, entonces:

$$\frac{dy}{dt} = f'(x) \cdot g'(t) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Este resultado es el más importante para nuestros propósitos, por lo que será extendido a funciones de varias variables.

Supongamos primeramente que z es una función de dos variables:

$$z = f(x, y)$$

Definamos ahora $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$.

Al derivar parcialmente con respecto a x, la otra variable independiente y permanece constante, es decir, z se considera como una función de una sola variable x. Entonces, definiremos los diferenciales parciales de z con respecto a x y y de la misma manera

que el diferencial de una función de una variable pero con derivadas parciales:

$$d_x z = \frac{\delta z}{\delta x}\, dx = f_x\, dx$$

$$d_y z = \frac{\delta z}{\delta y}\, dy = f_y\, dy$$

Y la diferencial total de z se define de la siguiente manera:

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x}\, dx + \frac{\delta z}{\delta y}\, dy$$

Obsérvese que el diferencial parcial de z con respecto a x es una buena aproximación del incremento parcial de z en la dirección x cuando Δx es pequeño. El diferencial parcial de z con respecto a y es también una buena aproximación del incremento parcial de z en la dirección y cuando Δy es pequeño. Entonces, el diferencial total de z, que ha sido definido como la suma de los diferenciales parciales de z con respecto a x y y, es una buena aproximación del incremento total de z cuando Δx y Δy son pequeños. Geométricamente, el diferencial total de z es igual al incremento del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$, en el punto en cuestión, debido a los incrementos $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$. Inmediatamente se deduce, que éste incremento del plano tangente (dz) se aproxima al incremento total de z (Δz) cuando Δx y Δy son tomados cada vez más pequeños.

En general, si $u = f(x, y, z, \ldots, w)$, entonces el concepto de diferencial total de u se define de la siguiente manera:

$$du = \frac{\delta u}{\delta x}\, dx + \frac{\delta u}{\delta y}\, dy + \frac{\delta u}{\delta z}\, dz + \ldots + \frac{\delta u}{\delta w}\, dw$$

Ejemplo: Encontrar el diferencial de u si : $u = x^3 y - 3x^2 + 2y$

Solución: Por definición del diferencial de una función de varias variables, se tiene:

$$du = \frac{\delta u}{\delta x}\, dx + \frac{\delta u}{\delta y}\, dy$$

Ahora: $\frac{\delta u}{\delta x} = 3x^2 y - 6x$; $\frac{\delta u}{\delta y} = x^3 + 2$

Sustituyendo:

$$du = (3x^2 y - 6x)\, dx + (x^3 + 2)\, dy$$

6.8 Derivadas totales. Consideremos una función de 2 variables que a su vez son funciones de una variable independiente:

$$z = f(x, y) \; ; \; x = g(t) \; ; \; y = h(t)$$

Para encontrar la derivada de z con respecto a t, podemos sustituir $x = g(t)$ y $y = h(t)$ en la expresión $z = f(x, y)$ obteniendo de esta manera a z como una función explícita de t. Sin embargo podemos encontrar la derivada de z con respecto a t sin necesidad de hacer la sustitución mencionada que puede dar por resultado una expresión muy complicada. Para ésto, utilizaremos la fórmula que vamos a deducir en seguida:

Si $z = f(x, y)$, entonces $dz = \frac{\delta z}{\delta x}\, dx + \frac{\delta z}{\delta y}\, dy$

Ahora, puesto que $x = g(t)$ y $y = h(t)$, entonces:

$$dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt \quad y \quad dy = \frac{dy}{dt} \cdot dt$$

Sustituyendo estas expresiones en dz:

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x} \frac{dx}{dt} \cdot dt + \frac{\delta z}{\delta y} \frac{dy}{dt} dt$$

Ahora, puesto que t es la variable independiente, $dt = \Delta t$ y podemos dividir entre dt:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de z con respecto a t si:

$$z = \ln (x, + y) \; ; \; x = e^t \; ; \; y = e^{2t}$$

Solución:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{1}{x + y}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{1}{x + y}$$

Ahora: $\frac{dx}{dt} = e^t$; $\frac{dy}{dt} = 2e^{2t}$

Ahora: $\frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dt}$

Sustituyendo: $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t}{x + y} + \frac{2e^{2t}}{x + y}$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{e^t + 2e^{2t}}{x + y}$$

Generalización de la derivada total. Supongamos que u es una función de más de dos variables que a la vez, son funciones de otra variable t. Entonces la derivada de u con respecto a t se deduce de la misma manera que en el caso anterior y el resultado es:

Si $u = f(x, y, z, \ldots, w)$

$$x = g(t) \; ; \; y = h(t) \; ; \; \ldots\ldots, \; w = j(t)$$

Entonces: $\frac{du}{dt} = \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\delta u}{\delta w} \cdot \frac{dw}{dt}$

En el caso más general, se tiene una función de varias variables que a la vez son funciones también de varias variables. Es decir, se tienen:

$$u = g(x, y, z, \ldots, w)$$
$$x = g(r, s, \ldots, t); \; y = h(r, s, \ldots, t;)$$
$$\ldots\ldots \; ; \; w = (r, s, \ldots, t).$$

En este caso, la derivada ~~total~~ parcial de u con respecto a t es:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta t} + \ldots\ldots + \frac{\delta u}{\delta w} \cdot \frac{\delta w}{\delta t}$$

Volviendo a la función de 2 variables:

$$z = f(x, y) \quad x = g(t) \quad ; y = h(t)$$

Observamos que z en realidad es una función de t únicamente por lo que fue posible encontrar la derivada total de z con respecto a t. Ahora, puesto que x es una función de t, podemos suponer que t es una función de x (la función inversa de $x = g(t)$) y por lo tanto se obtiene y como una función de x al sustituir t en $y = h(t)$. Entonces resulta que z puede ser considerada como una función de x únicamente. Un razonamiento semejante nos indica que también podemos considerar z como una función de y únicamente. Para encontrar la derivada total de z con respecto a x tenemos:

$$z = f(x, y) \quad ; x = x \quad ; y = 0(x)$$

Ahora: $$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

De la misma manera, al considerar x como función de y y por lo tanto z como función de y únicamente:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

Ejemplo: Encontrar $\frac{dz}{dx}$ si:

$$z = x^2 + x e^y$$
$$x = 3t^2 - 1 \quad ; y = 2t$$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + e^y \quad ; \frac{\partial z}{\partial y} = x e^y$$

Ahora: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{2}{6t}$$

Sustituyendo: $$\frac{dz}{dx} = (2x + e^y) + \frac{2x e^y}{6t}$$

6.9 Derivación parcial implícita.

Los métodos empleados para encontrar la derivada ordinaria de una función implícita de una variable pueden aplicarse para derivar parcialmente una función implícita de varias variables con respecto a una de ellas. La razón de ésto es que la definición de la derivada parcial permite considerarla como una derivada ordinaria con respecto a una de las variables independientes manteniendo a las demás variables como constantes durante el proceso de diferenciación.

Ejemplos:

1. Encontrar $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ en la siguiente ecuación:

$$w - xy + 3wx = 15$$

En este ejemplo es fácil despejar w antes de derivar:

$$w(1 + 3x) = 15 + xy$$
$$w = \frac{15 + xy}{1 + 3x}$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{(1 + 3x)\, y - (15 + y)\, 3}{(1 + 3x)^2}$$
$$= \frac{y + 3xy - 45 - 3xy}{(1 + 3x)^2}$$
$$= \frac{y - 45}{(1 + 3x)^2}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{1 + 3x}$$

2. Lo mismo que en el ejemplo anterior para:

$$w^3 x - 2x^2 y + 3wx = 4$$

En este caso no es fácil despejar w por lo que aplicamos el