método que consiste en derivar término a término considerando a w como una función de la variable con respecto a la cual se efectúa la derivación parcial.

a) $\frac{\delta w}{\delta x}$:

$$3w^2 x \frac{\delta w}{\delta x} + w^3 - 4xy + 3x \frac{\delta w}{\delta x} + 3w = 0$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} (3w^2 x + 3x) = 4xy - 3w - w^3$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{4xy - 3w - w^3}{3w^2 x + 3x}$$

b) $\frac{\delta w}{\delta y}$:

$$3w^2 x \frac{\delta w}{\delta y} - 2x^2 + 3x \frac{\delta w}{\delta y} = 0$$

$$\frac{\delta w}{\delta y} (3w^2 x + 3x) = 2x^2$$

$$\frac{\delta w}{\delta y} = \frac{2x^2}{3w^2 x + 3x}$$

Aplicación de las derivadas parciales a la derivación implícita.

Consideremos la ecuación $f(x, y) = 0$ que define a y como una función implícita de x. Para encontrar $\frac{dy}{dx}$ (pendiente de la tangente a la gráfica de la ecuación) hemos visto 2 procedimientos: 1) despejar y, cuando ésto sea posible, y derivar la función explícita resultante. 2) derivar término a término con respecto a x y después despejar $\frac{dy}{dx}$.

Ahora, utilizaremos las derivadas parciales para encontrar $\frac{dy}{dx}$. Introducimos una nueva variable auxiliar u tal que:

$$u = f(x, y)$$

Puesto que y es una función implícita de x, podemos obtener

$\frac{du}{dx}$ aplicando la fórmula obtenida anteriormente.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \frac{dy}{dx}$$

Ahora, $u = f(x, y)$ es igual a cero en nuestro problema original. Entonces $du = 0$ y por lo tanto:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta u}{\delta x}}{\frac{\delta u}{\delta y}}$$

Esta fórmula nos proporciona una tercera alternativa para encontrar $\frac{dy}{dx}$ que generalmente es ventajosa sobre los 2 métodos anteriores.

Ejemplo: Encontrar la derivada de y con respecto a x en la siguiente función:

$$3y^2 - 2x y + x^2 - 15 = 0$$

Consideremos:

$$u = 3y^2 - 2xy + x^2 - 15$$

Entonces:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = -2y + 2x = + 2(x - y)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = 6y - 2x = 2(3y - x)$$

Ahora:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta u}{\delta x}}{\frac{\delta u}{\delta y}}$$

Sustituyendo: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cancel{2}(x - y)}{\cancel{2}(3y - x)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{y - 3y}$$

<u>Generalización.</u> El artificio empleado para la fórmula anterior puede ser aprovechado para encontrar fórmulas que nos proporcionen las derivadas parciales de una función implícita de varias variables. En el caso general, la ecuación:

$$g\ (x,\ y,\ z,\ \ldots,\ w) = 0$$

Define a <u>w</u> como una función implícita de x, y, z, ... haciendo:

$$u = g\ (x,\ y,\ z,\ \ldots,\ w)$$

Puede demostrarse que:

$$\frac{\delta w}{\delta x} = - \frac{\dfrac{\delta u}{\delta x}}{\dfrac{\delta u}{\delta w}}$$

$$\frac{\delta w}{\delta y} = - \frac{\dfrac{\delta u}{\delta y}}{\dfrac{\delta u}{\delta w}}$$

etcétera.

De nuevo, estas fórmulas proporcionan un procedimiento, en general ventajoso sobre los métodos discutidos anteriormente para la derivación parcial implícita.

<u>6.10 Funciones homogéneas.</u> La selección de la forma funcional que va a ser ajustada a un conjunto de datos empíricos es el primer problema que se presenta cuando se desea obtener una expresión matemática que relacione un conjunto de variables para determinados dominios de definición de las mismas. Cuando el número de variables que relaciona la función es tal que no es posible hacer objetiva gráficamente la forma de la función, es preciso determinar propiedades de tipo general con la ayuda de derivadas parciales que nos permitan hacer una selección de la forma funcional mas conveniente. En teoría económica merecen especial

atención las funciones homogéneas porque sus propiedades corresponden a condiciones "normales" en algunos modelos económicos.

<u>Definición.</u> u = f (x, y, z, ..., w) es una función homogénea de grado <u>m</u> si al multiplicar todas las variables independientes por un número real <u>c</u>, la función resulta multiplicada por <u>c</u> elevada a la <u>m</u>.

Es decir:

$$f\ (cx,\ cy,\ cz,\ \ldots,\ cw) = c^m\ f\ (x,\ y,\ z,\ \ldots,\ w)$$

En particular cuando la función es homogénea de grado uno se dice que es <u>lineal homogénea</u> y de acuerdo con la definición:......

$$f\ (cx,\ cy,\ \ldots,\ cw) = cf\ (x,\ y,\ \ldots,\ w)$$

<u>Ejemplos:</u>

1. $f\ (x,\ y) = x - 2y$

Sustituyendo <u>x</u> por <u>cx</u> y <u>y</u> por <u>cy</u> :

$$f\ (cx,\ cy) = cx - 2cy = c\ (x - 2y) = cf\ (x,\ y)$$

Entonces, la función es lineal homogénea.

2. $f\ (x,\ y) = 3x^{1/4}\ y^{3/4}$

Sustituyendo x = cx y y = cy:

$$f\ (cx,\ cy) = 3\ (cx)^{1/4}\ (cy)^{3/4}$$
$$= 3c^{1/4}\ x^{1/4}\ c^{3/4}\ y^{3/4}$$
$$= c\ (3x^{1/4}\ y^{1/4}) = cf\ (x,\ y)$$

∴ la función es lineal homogénea.

3. $f\ (x,\ y,\ z) = x^2 - 3xy + z^2$

Sustituyendo x = cx ; y = cy ; z = cz;

$$f\ (cx,\ cy,\ cz) = (cx)^2 - 3cx\ cy + (cz)^2$$

$$= c^2x^2 - 3c^2\,xy + c^2z^2$$

$$= c^2\,(x^2 - 3xy + z^2)$$

$$= c^2 f\,(x, y, z)$$

$\therefore$ la función es homogénea de grado 2.

<u>Propiedades fundamentales de las funciones homogéneas</u>. Consideremos una función de 2 variables $z = f\,(x, y)$ homogénea de grado <u>m</u>.

<u>Propiedad (1)</u>. $\quad z = x^m\, g\left(\frac{y}{x}\right)$

<u>Demostración</u>: Por hipótesis, $z = f\,(x, y)$ es una función homogénea de grado m. Entonces:

$$f\,(cx, cy) = c^m\, f\,(x, y)$$

Multiplicando las variables por $\frac{1}{x}$, es decir para $c = \frac{1}{x}$;

$$f\,\left(1, \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^m \quad f\,(x, y) = \frac{f\,(x, y)}{x^m}$$

Despejando $f\,(x, y)$:

$$f\,(x, y) = x^m\, f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Ahora $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ es una función de $\left(\frac{y}{x}\right)$ solamente.

$$\therefore f\,(x, y) = x^m\, g\left(\frac{y}{x}\right)$$

<u>Propiedad (2)</u>. Las derivadas parciales de primer orden son homogéneas de grado $(m - 1)$. Es decir $\frac{\delta z}{\delta x}$ y $\frac{\delta z}{\delta y}$ son homogéneas de grado $m - 1$.

<u>Demostración</u>: De la propiedad (1) tenemos $z = x^m\, g\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\therefore \frac{\delta z}{\delta x} = f_x\,(x, y) = m\,x^{m-1}\, g\left(\frac{y}{x}\right) + x^m\, g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\delta}{d\,x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= m\,x^{m-1}\, g\left(\frac{y}{x}\right) - x^m\left(\frac{y}{x^2}\right)\, g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= m\,x^{m-1}\, g\left(\frac{y}{x}\right) - x^{m-1}\left(\frac{y}{x}\right)\, g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= x^{m-1}\left[mg\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\, g'\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

Ahora la parte de la expresión entre paréntesis rectangular es una función de $\frac{y}{x}$.

$$\therefore \frac{\delta z}{\delta x} = x^{m-1}\, h\left(\frac{y}{x}\right)$$

Entonces por la propiedad (1). $\frac{\delta z}{\delta x}$ es una función homogénea de grado $(m - 1)$. La demostración para $\frac{\delta z}{\delta y}$ es semejante.

<u>Propiedad (3)</u>. Teorema de Euler:

$$x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = mz$$

<u>Demostración</u>.

$$x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = xx^{m-1}\left[mg\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)g'\left(\frac{y}{x}\right)\right] + y\,x^{m-1}\, g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

Porque de (1) $z = x^m\, g\left(\frac{y}{x}\right)$

<u>Simplificando</u>:

$$x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = m\,x^m\, g\left(\frac{y}{x}\right) - y\,x^{m-1}\, g'\left(\frac{y}{x}\right) + y\,x^{m-1}\, g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ahora: $x^m g\left(\frac{y}{x}\right) = z$ de (1)

$$\therefore \; x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = mz$$

Propiedad (4). $x^2\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + 2xy\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y} + y^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = m(m-1)z$

Demostración. De la propiedad (3)

$$x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = mz$$

Derivando parcialmente con respecto a $\underline{x}$

$$x\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y} = m\frac{\delta z}{\delta x}$$

(a) $$x\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + y\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y} = m\frac{\delta z}{\delta x} - \frac{\delta z}{\delta x} = (m-1)\frac{\delta z}{\delta x}$$

Ahora derivando parcialmente con respecto a $\underline{y}$:

(b) $$x\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y} + y\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = (m-1)\frac{\delta z}{\delta y}$$

Multiplicando (a) por $\underline{x}$ y (b) por $\underline{y}$ y sumando:

$$x^2\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + 2xy\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y} + y^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = (m-1)\, x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y}$$

$$\therefore \; x^2\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + 2xy\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y} + y^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = m(m-1)z$$

Porque $x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = mz$ de prop. (3)

Estas propiedades se pueden extender con las modificaciones propias a funciones de más de 2 variables. El caso particular de la función lineal homogénea es especialmente importante en teoría económica. Para una función lineal homogénea de 2 variables, las propiedades (1) a (4) se transforman en las siguientes:

(1) $z = x\,g\left(\frac{y}{x}\right)$

(2) $\frac{\delta z}{\delta x}$ y $\frac{\delta z}{\delta y}$ son homogéneas de grado cero. Por lo tanto, aplicando (1), $\frac{\delta z}{\delta x}$ y $\frac{\delta z}{\delta y}$ son funciones de $\left(\frac{y}{x}\right)$.

(3) Teorema de Euler: $x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = z$

(4) $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = -y/x\,\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}$ y $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = -\frac{x}{y}\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}$

(4) se obtiene de (3) al derivar parcialmente con respecto a $\underline{x}$ y $\underline{y}$ y despejar respectivamente $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$ y $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$.

Ejemplo: Demostrar que la siguiente función es lineal homogénea y verificar el teorema de Euler:

$$z = f(x, y) = 18\, x^{1/3}\, y^{2/3}$$

Demostración:

a) Sustituyendo $\underline{x}$ por $\underline{cx}$ y $\underline{y}$ por $\underline{cy}$:

$$f(cx, cy) = 18\,(cx)^{1/3}\,(cy)^{2/3}$$
$$= 18\, c^{1/3}\, x^{1/3}\, c^{2/3}\, y^{2/3}$$
$$= 18\,(c^{1/3}\, c^{2/3})\, x^{1/3}\, y^{2/3}$$
$$= c\,(18\, x^{1/3}\, y^{2/3})$$
$$= c\, f(x, y)$$

Entonces, $z = f(x, y)$ es una función lineal homogénea.

b) Encontremos las primeras derivadas parciales de $\underline{z}$ con respecto a $\underline{x}$ y $\underline{y}$ para verificar el teorema de Euler:

$$z = 18\, x^{1/3}\, y^{2/3}$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 18\,(1/3)\, x^{-2/3}\, y^{2/3} = 6x^{-2/3}\, y^{2/3}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 18\ (2/3)\ x^{1/3}\ y^{-1/3} = 12\ x^{1/3}\ y^{-1/3}$$

Ahora $x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = x\ (6x^{-2/3}\ y^{2/3}) + y\ (12x^{1/3}\ y^{-1/3})$

$$\therefore x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = 6x^{1/3}\ y^{2/3} + 12\ x^{1/3}\ y^{2/3}$$

$$= 18\ x^{1/3}\ y^{2/3}$$

$$= z$$

L.C.D.D.

Ejercicio 19.

Tema: Funciones de varias variables. Derivadas parciales.

1. Encontrar las derivadas parciales de w con respecto a cada una de las variables independientes:

1.1 $w = 3x^2 + 2xy - y^2$

1.2 $w = \dfrac{x^2 - 2xy}{x + y}$

1.3 $w = (2xy - 3)^5$

1.4 $w = 3e^{2x^2y}$

1.5 $w = \ln\ (x^2 + 2xy - 3y)$

1.6 $w = x^2 - xz + z^2y - 3z^3$

1.7 $w = \dfrac{x + z}{y^2 - z\,y}$

1.8 $w = (xyz - 3)^4$

1.9 $w = e^{x^2y} - 3e^z$

1.10 $w = \mathrm{lu}\ (xz - 2y^2 + z^2)$

2. Encontrar las derivadas parciales de w con respecto a cada una de las variables independientes, en el punto indicado.

2.1 $w = x^2y - 3y^2 + 6x$; P (1, 1, 4)

2.2 $w = x^2 + y^2 - 4$; P (2, 1, 1)

2.3 $w = e^{x^2 - y^2}$; P (1, 1, 1)

2.4 $w = \ln xy$; P (1, 1, 0)

3. Encontrar las ~~ecuaciones~~ pendientes de las tangentes en las direcciones x y y de las siguientes superficies en el punto indicado:

3.1 $w = x^2 + y^2$; P (1, 1, 2)

3.2 $w = x^2 - xy + 1$; P (2, 1, 3)

3.3 $w = e^{xy - 1}$; P (1, 1, 1)

3.4 $w = e^{2x - y}$; P (1, 2, 1)

3.5 $w = \ln\ (x^2y + y^3)$; P (0, 1, 0)

Ejercicio 20.

Tema: Derivadas parciales de alto orden. Interpretación geométrica.

1. Encontrar todas las derivadas parciales de primero y segundo orden de las siguientes funciones:

1.1 $u = x^2 + y^2$

1.2 $u = (x + y)^2 - 3xy^3$

1.3 $u = e^x\ (3x + 2y^2)^3$

1.4 $u = 5xz^2 + 2xy - y^2$

1.5 $f\ (x, y) = \dfrac{2x}{x - y}$

1.6 $w = \ln e^{\frac{x + 2y}{x^2 - y^2}}$

2. Determinar el crecimiento o decrecimiento y el sentido de concavidad en las direcciones x y y de las siguientes superficies en el punto indicado:

2.1 $u = xy - x^2 + 5$; P (1, 1, 5)

2.2 $u = \ln\ (2x^2 - 3y)$; P (1, 1/3, 0)

2.3 $u = (x + 7y)e^{x^2 - y^2}$; P (-1, 1, 6)

2.4 $w = e^{-x} - e^{-y}$; P (1, 1, 0)

2.5 $w = \dfrac{xy}{2x + y^2}$; P (1, 2, 1/3)

2.6 $w = (xy - 3x + 2y)^4$; P (2, 2, 16)